北京师范大学

2013年常微分方程概率论与数理统计回忆版

编辑：*zhangwei*

2013 年 3 月 21 日

写在前面的话：有些题目有些遗忘，只记住了大体意思。

需要指出的是第七题原题中是错的(原题中给的其他情况是1不是0，显然是不对的)， 这里更正了一下。如果考试中也遇到错题，可以自己先指出错误，改正后再做。

常微分方程部分(75分)

1,(15')求解方程组

$$\begin{cases} 2\sqrt{t}\frac{dx}{dt} = 2x - y + e^{2\sqrt{t}} \\ 2\sqrt{t}\frac{dy}{dt} = x + 2y + e^{\sqrt{t}} \end{cases} \tag{1}$$

2,(15')若$\varepsilon \neq 0$，求$x_\varepsilon'' - 25x_\varepsilon = e^{(5+\varepsilon)t}$满足初值 $x_\varepsilon(0) = 1, x_\varepsilon'(0) = 0$的解$x_\varepsilon(t)$，记$x(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t)$,并证明:$x(t)$是方程 $x'' - 25x = e^{5t}$满足初值$x(0) = 1, x'(0) = 0$的解.

3,(15')(1)(8')求解:$\frac{dy}{dx} + x(y - 2x) + x^3(y - 2x)^2 = 2$

(2)(7')记$y_n(x)$是$\frac{dy}{dx} + x(y - 2n\sin(\frac{x}{n})) + x^3(y - 2n\sin(\frac{x}{n}))^2 = 2, y(0) = 1$的解， 证明:当$n \to +\infty$时，$y_n(x)$的极限存在，并求此极限。

4,(15')设$y = \varphi(x)$是二阶线性微分方程$y'' + Q(x)y = 0$的任何非零解,其中$Q(x)$满足：$Q(x) \le M(a \le x \le +\infty)$,常数$M > 0$.

证明：$\varphi(x)$的任何两个相邻的零点的间距不小于常数$\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

5,(15')分析一阶非线性微分方程$\frac{dy}{dx} = Ay - By^2$的平衡点的稳定性。 其中$A, B$为常数且$AB > 0$.

概率论与数理统计部分(75分)

6,(15')(题头有所遗忘但都对此题无用，下面为题目大体意思)输入数字0,1,2， 输出数字与输入数字相同的概率为$\frac{1}{2}$, 输出数字与输入数字不相同而为另外两个数字的概率均为$\frac{1}{4}$, 且输入各位数字之间相互独立，现输入000,111,222的概率均为$\frac{1}{3}$,

问：已知输出为010，输入为000的概率为多少？

7，(15')(X, Y)的联合概率密度函数为:

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2, & x^2 \le y \le 1 \\ \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{2}$$

(1)求常数c (2),求X和Y的边缘密度函数，X,Y是否相互独立？

8，(15')已知ξ服从$N(0,1)$.

(1)(5')证明$-\xi$也服从$N(0,1)$.

(2)(10')η等于ξ和$-\xi$视$|\xi| \le 1$和$|\xi| > 1$而定,求η的分布。

9，(15')X服从$N(\mu_1, \sigma_1^2)$,Y服从$N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且X和Y相互独立。

(1)求$W = \alpha X + \beta Y$,$U = \alpha X - \beta Y$的相关系数。

(2)若(X, Y)服从正态分布，$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$, 证明：$W$和$U$相互独立。

10，(15')$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自母体服从$U[0, \theta]$,$(\theta > 0)$的一组字样。

(1)(7')求参数θ的矩估计$\widehat{\theta}_{1n}$和极大似然估计$\widehat{\theta}_{2n}$。

(2)(8')证明$\widehat{\theta}_{2n}$和$T = \dfrac{n+1}{n} \max\limits_{1 \le i \le n} X_i$均是$\theta$的无偏估计。 并判断哪个更有效？