北京大学

2013年数学分析与高等代数试题(回忆版)

2013 年 2 月 2 日

说明：1.试题来自博士家园我家车车的回忆版.

2.题目未完全按照题序排列.

数学分析

(1)用柯西收敛准则证明R^n上的有限覆盖定理.

(2)$f(x)=\sin x+x^2+1$,在0附近有反函数，求$(f^{-1})^{(4)}(1)$.

(3)类比第二型曲线积分$\int p(x,y)dx+q(x,y)dy$,给出积分$\int p(x,y)dq(x,y)$的定义，并给出合理的可积判别准则和计算方法，证明你的结论.

(4)$f(x)$是$[-\pi,\pi]$上的单调函数，定义$F(x)=\int_{-\pi}^{x}f(t)dt$,证明任意$x\in(-\pi,\pi)$,极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x-\Delta x)}{2\Delta x}$存在，并等于f(x)的傅里叶级数的和.

(5)证明拉格朗日中值定理，并给出它的一个应用.

(6)$f_n(x)$是$[0,+\infty)$上一致有界的函数列，并且在任意的闭区间上一致收敛于$f(x)$.对于任意固定的$n,f_n(x)$是单调递增或者递减的函数。又$\int_0^\infty g(x)dx$收敛. 证明:$f(x)g(x)$与$f_n(x)g(x)$都在$[0,+\infty)$上可积，并且有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)g(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)g(x)dx$$

(7)$f(x,y)$定义在$[a,b]\times[c,d]$上，且对于任意固定的y，$f(x,y)$在$[a,b]$上可积。又$\forall\epsilon>0\exists\delta>0$任意$|x_1-x_2|<\delta$时，对任意的y，有$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|<\epsilon$,证明$p(x)=\int_c^d f(x,y)dx$在$[a,b]$上可积，$q(y)=\int_a^b f(x,y)dx$在$[c,d]$上可积，且积分相等.

(8)正项级数$\sum\limits_{i=1}^{+\infty}a_i$收敛，$b_n\to 0(n\to+\infty)$.

证明:$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+...+a_nb_1)=0$

(9)用两种方法将积分$\iint_\omega xydxdy$化成累次积分,其中ω 是$y=x^2,x+y=2,x$轴围成的区域.

(10)未知.

高等代数与解析几何

(1)已知$\alpha=2013+2013^{\frac{1}{106}}$是有理多项式的一个根.

证明:$\beta=2013+2013^{\frac{1}{106}}e^{\frac{2\pi i}{53}}$也是其一个复根.

(2)矩阵A的特征多项式为$f(x)=(x-1)^2(x+3)^2$,极小多项式为:$m(x)=(x-1)^2(x+3)$

求:A的$Jordan$标准型.

(3) ① A可逆，$AB=BA$，证明: $det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}=det(A^2-B^2)$.

② 如果A不可逆，AB=BA,结论是否成立？

③ 如果A可逆，AB=BA不成立，结论是否成立？

(4)形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$的R上的矩阵形成一个线性空间$V$，定义$V\times V\to R$上的映射为 $(A,B)=\frac{1}{2}(det(A+B)-det(A)-det(B))$

①证明这是一个双线性映射.

②求其在基$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$下的度量矩阵M.

③对于上述M，求$f(X)=\frac{X'MX}{X'X}$的最大值与最小值（注：用数学分析方法不给分）.

(5)一个关于投影映射的问题，题目定义了到子空间W上的投影算子: $T_w(\alpha)=\sum\limits_{i=1}^{r}(\alpha,\alpha_i)\alpha_i$,$\alpha_1,...,\alpha_r$是W上的标准正交基.

①证明任意$\beta\in W,|\alpha-T_w(\alpha)|\leq|\alpha-\beta|$.

②A是投影映射的充要条件是 $A^2=A$且A为对称映射.

③任意对称映射可以表示为$f(\alpha)=\sum\limits_{i=1}^{r}\lambda_i T_{wi}(\alpha),w_i$为子空间.

(6)定义矩阵A的双曲余弦$cosh(A)=E+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^4}{4!}+\cdots$.

问：是否存在二阶复矩阵A，使得: $cosh(A)=\begin{pmatrix} 1 & 2013 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7)未知.

(8)A是圆心在x轴正方向过原点的圆上一动点，B是z轴上的一动点，且$|OA|=k|OB|$,k为定值.

求AB直线确定的曲面方程.

(9)具体方程忘记，是根据二次曲线方程的参数讨论其曲线类型的.

(10)(20'),给定了一个锥面,还有一个带两个参数的直线，讨论截口形状，并画图.