浙江大学

2013年数学分析试题

2013 年 1 月 15 日

编辑：zhangwei

一(40′)

$$(1).\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\arctan x}{\tan x-\arcsin x}(2).\int_0^{\pi}\frac{\cos 4\theta}{1+\cos^2\theta}d\theta.$$

(3.)$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le\sqrt{3},x,\ y\ge 0\}$ 其中$[x]$ 为不超x的最大整数.

计算: $\iint_D xy[1+x^2+y^2]dxdy$

(4).求

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i}})$$

二(10′)论证是否存在连续函数$f(x)$，使得$f(f(x))=e^{-x}$.

三(15′)讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})/n^x$$

的收敛性与一致连续性。

四(15′)$f(x)$,$g(x)$,$\varphi(x)$ 都是连续函数，$g(x)$ 单调递增，$\varphi(x)\ge 0$, 已知$f(x)\le g(x)+\int_a^x\varphi(t)f(t)dt$.

证明:$f(x)\le g(x)e^{\int_a^x\varphi(t)dt}$

五(15′)证明 (1题5分)(2题10分)

$$(1)\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=0.(2)\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x^n)dx=0.$$

六(20′)(1) (5′)构造一个函数使得其在$[-1,1]$内可微，但其导数在其中无界。

(2) (15′) 证明若一个函数在(a,b)内可导，则存在 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$，在$(\alpha,\beta)$ 内导数有界。

七(15′)二元函数$f(x,y)$，若$f_{xy}(0,0)$,$f_{yx}(0,0)$存在，且$f_{xy}(x,y)$在$(0,0)$ 附近连续，证明$f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$

八(20′)、已知公式 $\sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p}=\ln n+O(1)\,,n\ge 2$ ，其中p是质数.

求证:

$$\sum_{p\le n}\frac{1}{p}=C+\ln\ln n+O(\frac{1}{\ln n})$$