

中国科学技术大学

2013年高等代数与解析几何试题(回忆版)

zhangwei

2013年2月1日

1. 给了两条异面直线, 好像是 $x+1=2y=3z$ 和 $x-1=y=2z+4$, 求它们的夹角和距离.

2. a, b, c 满足什么条件时, $z = ax^2 + bxy + cy^2$ 表示一个椭圆双曲面.

3. 给了一个元素只有0和1的四阶矩阵, 好像是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 求伴随矩阵和若

当标准型.

4. 一个是求 $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$ 在基 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵. 第一个是变换为 $xf'(x)$. 求变换在基 $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$ 的过渡矩阵, 并且求这个过渡矩阵的最小多项式.

5. 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的初等因子.

6. 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3$ 的规范型. 二计算证明题

7. 求 x 轴绕直线 $x=y=z+1$ 旋转所得的曲面方程.

8. 设 \mathcal{A} 是有限维线性空间中的线性变换, 证明:

$$\dim(\text{Ker } \mathcal{A} \cap \text{Im } \mathcal{A}) = \dim \text{Ker } \mathcal{A} - \dim \text{Ker } \mathcal{A}^2$$

9. 证明 Hamilton-Cayley 定理.

10. 设 A, B 为 n 阶复方阵, 定义线性变换

$$\mathcal{A}: X \mapsto AX - XB, X \in C^{n \times n}$$

证明 \mathcal{A} 可逆等价于 A, B 无公共特征值.

11. 设 $g(x) = (f_1(x), f_2(x)), h(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, 证明 $g(A)$ 可逆等价于

$$\text{Ker } h(\mathcal{A}) = \text{Ker } f_1(\mathcal{A}) \oplus \text{Ker } f_2(\mathcal{A})$$