第一章　　波动方程

齐海涛

2008 年 12 月 9 日

目录

1　方程的导出、定解条件

例 1.1 *细杆(或弹簧)受某种外界原因而产生纵向振动, 以$u(x,t)$ 表示静止时在x 点处的点在时刻t 离开原来位置的偏移. 假设振动过程中所发生的张力服从胡克定律, 试证明$u(x,t)$ 满足方程*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

其中ρ 为杆的密度, E 为杨氏模量.

解:　由细杆的假设, 在杆的垂直与杆的每一个截面上的每一点力与位移的情形是相同的. 取杆的左端截面的形心为原点, 杆轴为x 轴. 任取$(x,x+\Delta x)$ 上

的小段B为代表加以研究. t时刻, B的两端位移分别记作$u(x,t)$和$u(x+\Delta x,t)=u(x,t)+\Delta u$, B段的伸长为$u(x+\Delta x,t)-u(x,t)=\Delta u$, 相对伸长则为

$$\frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t),\quad \Delta x\to 0.$$

由Hooke定律, B两端的张力分别为$E(x)u_x|_x$, $E(x)u_x|_{x+\Delta x}$. B段的运动方程为

$$S\rho(x)\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\overline{x},t)=E(x)S\,u_x|_{x+\Delta x}-E(x)S\,u_x|_x$$

其中S为细杆截面面积, $\overline{x}$为B段重心坐标. 约去S, 令$\Delta x\to 0$, 有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

例 1.2 *在杆纵向振动时, 假设(1)端点固定, (2)端点自由, (3)端点固定在弹性支撑上, 试分别导出这三种情况下所对应的边界条件.*

解: (1) $u(0,t)=u(l,t)=0$;

(2) 端点自由, 即端点处无外力作用. 在左端点$SE(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$, 即$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$. 同理右端点$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0$.

(3)端点固定在弹性支承上, 端点受的外力与支撑的变形成比例. 如左端有弹性支承, 弹性系数设为k, 则

$$SE(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=ku(0,t),\quad \left.\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right)\right|_{x=0}=0\quad h=\frac{k}{E(x)S}.$$

同理右端:

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right)\right|_{x=l}=0.$$

例 1.3 *试证: 圆锥形枢轴的纵向振动方程为*

$$E\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\rho\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

其中h为圆锥的高.

解: 仿照第一题有(R为圆锥的底面半径)

$$\rho V(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\overline{x},t)=ES(x+\Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)-ES(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

其中

$$V(x)=\pi R^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\Delta x+o(\Delta x),\quad S(x)=\pi R^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2.$$

令$\Delta x\to 0$, 即得结论.

例 1.4 绝对柔软而均匀的弦线有一端固定，在它本身重力作用下，此线处于铅垂的平衡位置，试导出此线的微小横振动方程.

解: 设弦长为l, 取弦上端点为原点, 取铅垂向下的轴为x 轴. 设$u(x,t)$ 为时刻t, x 处的横向位移. 取位于$(x, x+\Delta x)$ 的微元进行分析, 由绝对柔软的假设, 弦的张力T 的方向总是沿弦的切线方向. 又由微小振动的假设$u_x \ll 1$. 因此认为弦在振动过程中不伸长, 且张力T 与时间无关. 考察受力平衡(α_1, α_2 为张力T 的方向与竖直线的夹角)

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1 = -\rho g\Delta x, \tag{1}$$

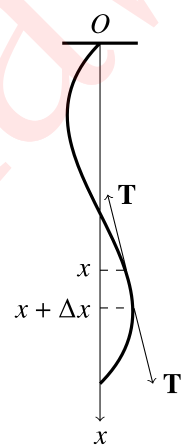
$$T(x+\Delta x)\sin\alpha_2 - T(x)\sin\alpha_1 = \rho\Delta x u_{tt}. \tag{2}$$

由(1) 知

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad T = -\rho g x + C.$$

而$x = 0$ 时, $T(0) = \rho g l$, 知$C = \rho g l$, 所以

$$T(x) = \rho g(l - x).$$



又

$$\sin\alpha_2 \approx \tan\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t),$$

$$\sin\alpha_1 \approx \tan\alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t).$$

由(2) 知

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right] = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

例 1.5 一柔软均匀的细弦，一端固定，另一端是弹性支承. 设该弦在阻力与速度成正比的介质中作微小的横振动，试写出弦的位移所满足的定解问题.

解: k, σ 为正常数

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} + k u_t = 0, \quad 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \\ u|_{x=0} = 0, \\ (u_x + \sigma u)|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

例 1.6 若$F(\xi)$, $G(\xi)$ 均为其变元的二次连续可导函数, 验证$F(x-at)$, $G(x+at)$ 均满足弦振动方程*(1.11)*.

例 1.7 验证$u(x,y,t) = 1/\sqrt{t^2-x^2-y^2}$ 在锥$t^2-x^2-y^2 > 0$ 中满足波动方程$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$.

2 达朗贝尔公式、波的传播

例 2.1 证明方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$(h>0$ 常数$)$的通解可以写成

$$u = \frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x},$$

其中F, G 为任意的具有二阶连续导数的单变量函数, 并由此求解它的初值问题:

$$t=0: \quad u=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(x).$$

解: (1) 令$v(x,t) = (h-x)u(x,t)$ 并代入方程得

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},$$

进而

$$u = \frac{v}{h-x} = \frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x}.$$

(2)

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \\ t=0:\ v=(h-x)\varphi(x),\ v_t = (h-x)\psi(x). \end{cases}$$

由d'Alembert 公式有

$$v(x,t) = \frac{1}{2}[(h-x+at)\varphi(x-at) + (h-x-at)\varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}(h-\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

再由(1) 知此定解问题的解.

注：此问题也可由(1) 并利用初始条件决定F 和G.

例 2.2 问初始条件$\varphi(x)$ 与$\psi(x)$ 满足怎样的条件时, 齐次波动方程初值问题的解仅由右传播波组成?

解: 由题意知

$$G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{C}{2a} \equiv const.$$

故$G'(x) = 0$, 即

$$a\varphi'(x) + \psi(x) = 0.$$

例 2.3 利用传播波法, 求解波动方程的古沙(Goursat)问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u|_{x-at=0} = \varphi(x), \\ u|_{x+at=0} = \psi(x), (\varphi(0) = \psi(0)). \end{cases}$$

解: 设$u(x,t)$ 具有行波解$u = F(x-at) + G(x+at)$, 由边界条件得

$$F(0) + G(2x) = \varphi(x), \qquad F(2x) + G(0) = \psi(x).$$

$$F(x) = \psi(x/2) - G(0), \quad G(x) = \varphi(x/2) - F(0), \quad F(0) + G(0) = \varphi(0) = \psi(0).$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \psi\left(\frac{x-at}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+at}{2}\right) - \varphi(0).$$

例 2.4 对非齐次波动方程的初值问题(2.5)、(2.6), 证明: 当$f(x,t)$ 不变时,

(1) 如果初始条件在x 轴的区间$[x_1, x_2]$ 上发生变化, 那么对应的解在区间$[x_1, x_2]$ 的影响区域外不发生变化;

(2) 在x 轴区间$[x_1, x_2]$ 上所给的初始条件唯一确定区间$[x_1, x_2]$ 的决定区域中解的数值.

解: 弄清影响区域、决定区域的定义.

例 2.5 求解

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \ x > 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t|_{t=0} = 0, \\ u_x - ku_t|_{x=0} = 0, \end{cases}$$

其中k 为正常数.

解: 波动方程的通解为$u = F(x-at) + G(x+at)$, 由初始条件得

$$F(x) + G(x) = \varphi(x), \qquad -aF'(x) + aG'(x) = 0$$

$$F(x) - G(x) = C, \ \ F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{C}{2}, \ \ G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{C}{2},$$

其中$C = F(0) - G(0)$. 由于$x + at \geq 0$, $G(x + at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) - \frac{C}{2}$. 当$x - at \geq 0$时, $F(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) + \frac{C}{2}$. 此时$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)]$. 当$x - at < 0$时, 由边界条件知

$$(1 + ka)F'(-at) + (1 - ka)G'(at) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 + ka)F'(-x) + (1 - ka)G'(x) = 0.$$

对上式从0 到x 积分

$$-(1 + ka)F(-x) + (1 - ka)G(x) = C_1, \quad C_1 = -(1 + ka)F(0) + (1 - ka)G(0).$$

$$F(-x) = \frac{1 - ka}{1 + ka}G(x) - \frac{C_1}{1 + ka},$$

$$F(x - at) = F(-(at - x)) = \frac{1 - ka}{1 + ka}G(at - x) - \frac{C_1}{1 + ka}.$$

$$\Rightarrow\ u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1 - ka}{2(1 + ka)}\varphi(at - x) + \frac{ka}{1 + ka}\varphi(0).$$

例 2.6 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0,\ 0 < t < kx, k > 1, \\ u|_{t=0} = \varphi_0(x),\ x \geq 0, \\ u_t|_{t=0} = \varphi_1(x),\ x \geq 0, \\ u|_{t=kx} = \psi(x), \end{cases}$$

其中$\varphi_0(0) = \psi(0)$.

解: 当$x - t \geq 0$ 时, 由d'Alembert 公式有

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi_0(x - t) + \varphi_0(x + t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\varphi_1(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

$x - t < 0$ 时, 取$u = F(x - t) + G(x + t)$. 当$t = x$ 时, 它应与上式的解相同. 当$t = kx$时, 利用边界条件有

$$F(0) + G(2x) = \frac{1}{2}[\varphi_0(0) + \varphi_0(2x)] + \frac{1}{2}\int_0^{2x}\varphi_1(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

$$F((1 - k)x) + G((1 + k)x) = \psi(x).$$

由以上两式解F 和G 得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \psi\left(\frac{x - t}{1 - k}\right) + \frac{1}{2}\left[\varphi_0(x + t) - \varphi_0\left(\frac{1 + k}{1 - k}(x - t)\right)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\frac{1+k}{1-k}(x-t)}^{x-t}\varphi_1(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad x < t < kx \end{aligned}$$

例 2.7 求解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \ x < t < f(x), \\ u|_{t=x} = \varphi(x), \\ u|_{t=f(x)} = \psi(x), \end{cases}$$

其中$\varphi(0) = \psi(0)$, $t = f(x)$ 为由原点出发的、介于特征线$x = t$ 与$x = -t$ 之间的光滑曲线, 且对一切x, $f'(x) \neq 1$.

解: 设通解为$u = F(x - t) + G(x + t)$, 将边界条件代入得

$$F(0) + G(2x) = \varphi(x),$$

$$F(x - f(x)) + G(x + f(x)) = \psi(x).$$

由$f'(x) \neq 1$, 故有$x - f(x) = y$ 可解得$x = h(y)$. 由上面两式可解得

$$G(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - F(0), \quad F(y) = \psi(h(y)) - \varphi\left(h(y) - \frac{y}{2}\right) + F(0),$$

代入通解表达式得

$$u = \varphi\left(\frac{x+t}{2}\right) - \varphi\left(h(x-t) - \frac{x-t}{2}\right) + \psi(h(x-t)).$$

例 2.8 求解波动方程的初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\sin x, \\ u|_{t=0} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sin x. \end{cases}$$

解:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin\xi \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \tau\sin\xi \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \\ &= t\sin x. \end{aligned}$$

例 2.9 求解波动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{tx}{(1+x^2)^2}, \\ u|_{t=0} = 0, \\ u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

解:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \frac{\tau\xi}{(1+\xi^2)^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{1}{4a^3}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+(x-at)^2}{1+(x+at)^2} - 2at\arctan x + (x+at-2a^2)\arctan(x+at)\right. \\ &\quad \left. - (x-at-2a^2)\arctan(x-at)\right]. \end{aligned}$$

3 初边值问题的分离变量法

例 3.1 用分离变量法求下列问题的解:

$$(1)\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u|_{t=0}=\sin\frac{3\pi x}{l},\\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=x(l-x)\ (0<x<l),\\ u(0,t)=u(l,t)=0.\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u(0,t)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0\\ u(x,0)=\frac{h}{l}x,\\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.\end{cases}$$

解: (1) 满足边界条件的解为

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

由初始条件知:

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi}{l}x=\sin\frac{3\pi}{l}x,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi}{l}x=x(l-x).$$

$$\Rightarrow A_3=1,\qquad A_k=0,k\neq 3;$$

$$B_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{8l^3}{(2n-1)^4\pi^4 a}, & k=2n-1,\\ 0, & k=2n.\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\cos\frac{3\pi a}{l}t\sin\frac{3\pi}{l}x+\frac{8l^3}{\pi^4 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\sin\frac{(2n-1)\pi a}{l}t\sin\frac{(2n-1)\pi}{l}x.$$

(2) 满足边界条件的解为

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{(k+\frac{1}{2})\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi a}{l}t\right)\sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}x.$$

由初始条件知:

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}x=\frac{h}{l}x,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{(k+\frac{1}{2})\pi a}{l}\sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}x=0.$$

$$\Rightarrow A_k=(-1)^k\frac{2h}{(k+\frac{1}{2})^2\pi^2},\qquad B_k=0,k=0,1,2,\ldots$$

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2h}{(k+\frac{1}{2})^2\pi^2}\cos\frac{k+\frac{1}{2}}{l}\pi at\sin\frac{k+\frac{1}{2}}{l}\pi x.$$

例 3.2 设弹簧一端固定, 一端在外力作用下作周期振动, 此时定解问题归结为

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = A\sin\omega t, \\ u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$

求解此问题.

解: 由于弦是在$x = l$端受迫作谐振动$A\sin\omega t$情况下的振动, 它一定有一个特解$V(x,t)$满足波动方程和非齐次边界条件, 且在$x = l$端同步振动, 其时间函数应为$\sin\omega t$, 即$V(x,t) = X(x)\sin\omega t$代入方程得

$$\begin{cases} X'' + \frac{\omega^2}{a^2}X = 0, \\ X(0) = 0, X(l) = A. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V(x,t) = \frac{A}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t.$$

令$u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$, 则$W(x,t)$满足如下定解问题

$$\begin{cases} W_{tt} = a^2 W_{xx}, \\ W(0,t) = 0,\ W(l,t) = 0, \\ W(x,0) = 0,\ W_t(x,0) = -A\omega\sin\frac{\omega x}{a}/\sin\frac{\omega l}{a}. \end{cases}$$

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$A_n = 0,\quad B_n = (-1)^n\frac{2A\omega}{al}\frac{1}{\omega^2/a^2 - n^2\pi^2/l^2},\quad n = 1, 2, \ldots$$

综上

$$u(x,t) = \frac{A}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t + \frac{2A\omega}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\omega^2/a^2 - n^2\pi^2/l^2}\sin\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

例 3.3 求弦振动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\quad 0 < x < l,\ t > 0$$

满足以下定解条件的解:

$$(1)\ \begin{array}{l} u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \sin\frac{3}{2l}\pi x,\ u_t|_{t=0} = \sin\frac{5}{2l}\pi x. \end{array} \quad (2)\ \begin{array}{l} u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = x,\ u_t|_{t=0} = 0. \end{array}$$

解: (1) 满足边界条件的解为

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{(k+\frac{1}{2})\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi a}{l}t\right)\sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}x.$$

由初始条件知:

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}x=\sin\frac{3\pi}{2l}x,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{(k+\frac{1}{2})\pi a}{l}\sin\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}x=\sin\frac{5\pi}{2l}x.$$

$$\Rightarrow A_1=1,\ A_k=0,k\neq 1;\quad B_2=\frac{2l}{5\pi a},\ B_k=0,k\neq 2.$$

$$u(x,t)=\cos\frac{3\pi a}{2l}t\sin\frac{3\pi}{2l}x+\frac{2l}{5\pi a}\sin\frac{5\pi a}{2l}t\sin\frac{5\pi}{2l}x.$$

(2) 满足边界条件的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}A_0+\frac{1}{2}B_0t+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{k\pi a}{l}t+B_k\sin\frac{k\pi a}{l}t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x.$$

由初始条件知:

$$\frac{1}{2}A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos\frac{k\pi}{l}x=x,$$

$$\frac{1}{2}B_0+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\frac{k\pi a}{l}\cos\frac{k\pi}{l}x=0.$$

$$\Rightarrow A_0=l,\ A_k=2l\frac{(-1)^k-1}{k^2\pi^2};\quad B_k=0.$$

$$u(x,t)=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi a}{l}t\cos\frac{(2k-1)\pi}{l}x.$$

例 3.4 用分离变量法求解初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=g, 0<x<l, t>0,\\ u|_{x=0}=u_x|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=0, u_t|_{t=0}=\sin\frac{\pi x}{2l}, \end{cases}$$

其中g 为常数.

解: 先求解如下问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = \sin \frac{\pi x}{2l}, \end{cases}$$

其解为

$$u_1(x,t) = \frac{2l}{\pi a} \sin \frac{\pi a}{2l} t \sin \frac{\pi}{2l} x.$$

再求解如下问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = g, 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

其解为

$$u_2(x,t) = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2lg}{\pi^2 a(k+\frac{1}{2})^2} \sin \frac{k+\frac{1}{2}}{l} \pi a(t-\tau) \sin \frac{k+\frac{1}{2}}{l} \pi x \mathrm{d}\tau.$$

所以原定解问题的解为$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$.

例 3.5 用分离变量法求下面问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + b\mathrm{sh}x, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

解:

$$B_k(\tau) = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l b\mathrm{sh}\xi \sin \frac{k\pi}{l} \xi \mathrm{d}\xi = \frac{2bl\mathrm{sh}l}{a(l^2 + k^2\pi^2)} (-1)^{k+1}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\tau) \sin \frac{k\pi a}{l} (t-\tau) \mathrm{d}\tau \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \\ &= \frac{2bl^2\mathrm{sh}l}{\pi a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{l^2 + k^2\pi^2} \left(1 - \cos \frac{k\pi a}{l} t\right) \sin \frac{k\pi}{l} x. \end{aligned}$$

例 3.6 用分离变量法求下面问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2bu_t = a^2 u_{xx} \quad (b > 0), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \frac{h}{l} x, u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

解: 令$u(x,t)=X(x)T(t)$, 代入方程得:

$$XT''+2bXT'=a^2X''T \Rightarrow \frac{T''+2bT'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda.$$

得到如下特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=X(l)=0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2},\ \ X_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\ \ (n=1,2,\dots)$$

$T(t)$ 满足如下方程

$$T''+2bT'+\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}T=0.$$

详细过程参见《数学物理方程》(陈恕行、秦铁虎、周忆编著，复旦大学出版社，2003）P37-39.

4 高维波动方程的柯西问题

例 4.1 利用泊松公式求解波动方程的柯西问题:

$$(1)\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=x^2+yz; \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \\ u|_{t=0}=x^3+y^2z,\ u_t|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解: (1)

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \frac{1}{4\pi a^2t}\iint_{S_M^{at}}(\xi^2+\eta\zeta)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi a^2t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[(x+at\cos\varphi\sin\theta)^2 \\ &\quad +(y+at\sin\varphi\sin\theta)(z+at\cos\theta)]a^2t^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= (x^2+yz)t+\frac{a^2t^3}{3}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2t}\iint_{S_M^{at}}(\xi^3+\eta^2\zeta)\mathrm{d}S\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\pi}{3}a^2t^3(3x+z)+(x^3+y^2z)t\right] \\ &= x^3+y^2z+(3x+z)a^2t^2. \end{aligned}$$

例 4.2 试用降维法导出弦振动方程的达朗贝尔公式.

解: 由三维波动方程的Cauchy 问题的Poisson 公式有

$$\xi = x + r\cos\theta, \quad \eta = y + r\cos\phi\sin\theta, \quad \zeta = z + r\sin\phi\sin\theta, \quad (r = at)$$

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^M}\varphi(\xi)\mathrm{d}S\right] + \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^M}\psi(\xi)\mathrm{d}S \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x + r\cos\theta)r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right]_{r=at} \\
&\quad + \left[\frac{1}{4\pi a}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(x + r\cos\theta)r\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\right]_{r=at} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{2a}\int_0^{\pi}\varphi(x + r\cos\theta)\mathrm{d}(x + r\cos\theta)\right]_{r=at} \\
&\quad - \left[\frac{1}{2a}\int_0^{\pi}\psi(x + r\cos\theta)\mathrm{d}(x + r\cos\theta)\right]_{r=at} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right] - \frac{1}{2a}\int_{x+at}^{x-at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

例 4.3 求解平面波动方程的柯西问题

$$\begin{cases}
u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \\
u|_{t=0} = x^2(x + y), \\
u_t|_{t=0} = 0.
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{(x + r\cos\theta)^2(x + r\cos\theta + y + r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right] \\
&= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\frac{\pi[2x^2(x + y) + \pi r^2(3x + y)]}{\sqrt{(at)^2 - r^2}}r\mathrm{d}r \\
&= \frac{\partial}{\partial t}[x^2 t(x + y) + a^2 t^3(3x + y)/3] = x^2(x + y) + a^2 t^2(3x + y).
\end{aligned}$$

例 4.4 求二维波动方程的轴对称解(即二维波动方程的形如$u = u(r,t)$ 的解, 其中$r = \sqrt{x^2 + y^2}$).

解: 二维波动方程的轴对称解应满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

令$u(r,t)=R(r)T(t)$, 代入上式(注意: $t\to\infty$ 时, 解应有界) 有

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=-\lambda^2\qquad(\lambda>0).$$

$\Rightarrow\ T(t)=C_1\cos\lambda at+C_2\sin\lambda at,\ R(r)=\mathrm{J}_0(\lambda r)$ ($\mathrm{J}_0(x)$为0阶第一类Bessel 函数),

$$u(r,t)=(C_1\cos\lambda at+C_2\sin\lambda at)\mathrm{J}_0(\lambda r).$$

例 4.5 求解下列柯西问题:

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+c^2u,\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y),\\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y).\end{cases}$$

解: 令$v(x,y,z,t)=\mathrm{e}^{cz/a}u(x,y,t)$, 则原定解问题转化为

$$\begin{cases}v_{tt}=a^2(v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}),\\ v|_{t=0}=\mathrm{e}^{cz/a}\varphi(x,y),\\ v_t|_{t=0}=\mathrm{e}^{cz/a}\psi(x,y).\end{cases}$$

由Poisson 公式有

$$\begin{aligned}v&=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2t}\iint_{S_{at}^M}\mathrm{e}^{\frac{c\zeta}{a}}\varphi(\xi,\eta)\mathrm{d}S\right]+\frac{1}{4\pi a^2t}\iint_{S_{at}^M}\mathrm{e}^{\frac{c\zeta}{a}}\psi(\xi,\eta)\mathrm{d}S\\
&=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2t}\iint_{S_{at}^M}\varphi(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\frac{c}{a}z\pm\frac{c}{a}\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}S\right]\\
&\quad+\frac{1}{4\pi a^2t}\iint_{S_{at}^M}\psi(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\frac{c}{a}z\pm\frac{c}{a}\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}S\\
&=\frac{\mathrm{e}^{\frac{c}{a}z}}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\iint_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta)\mathrm{ch}\left(\frac{c}{a}\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}\right)}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right]\\
&\quad+\frac{\mathrm{e}^{\frac{c}{a}z}}{2\pi a}\iint_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)\mathrm{ch}\left(\frac{c}{a}\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}\right)}{\sqrt{(at)^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

例 4.6 试用齐次化原理导出平面非齐次波动方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t)$$

在齐次初始条件

$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0$$

下的求解公式.

解: 由齐次化原理$u(x,y,t) = \int_0^t w(x,y,t;\tau)\mathrm{d}\tau$, $w(x,y,t;\tau)$ 为以下定解问题的解

$$w_{tt} = a^2(w_{xx} + w_{yy}) \ \ (t > \tau)$$

$$w|_{t=\tau} = 0, \quad w_t|_{t=\tau} = f(x,y,\tau).$$

根据二维Poisson 公式有$(r = a(t-\tau))$

$$w(x,y,t;\tau) = \frac{1}{2\pi a}\iint_{\Sigma_r^M} \frac{f(\xi,\eta,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}},$$

$$\begin{aligned}u(x,y,t) &= \int_0^t \frac{1}{2\pi a}\iint_{\Sigma_r^M} \frac{f(\xi,\eta,\tau)}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau\\ &= \frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{at}\iint_{\Sigma_r^M}\frac{f(\xi,\eta,t-\frac{r}{a})}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

例 4.7 用降维法来求解上面的问题.

解:

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t) &= \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{r\le at}\frac{f(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a})}{r}\mathrm{d}V\\ &= \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{r\le at}\frac{f(\xi,\eta,t-\frac{r}{a})}{r}\mathrm{d}V\\ &= \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\iint_{S_r^M}\frac{f(\xi,\eta,t-\frac{r}{a})}{r}\mathrm{d}S_r\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{at}\iint_{\Sigma_r^M}\frac{f(\xi,\eta,t-\frac{r}{a})}{\sqrt{r^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

例 4.8 解非齐次方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2(y-t),\\ u|_{t=0} = 0,\\ u_t|_{t=0} = x^2 + yz.\end{cases}$$

解:

$$\begin{aligned}u(x,y,z,t) &= \frac{1}{4\pi}\iint_{S_t^M}(\xi^2+\eta\zeta)\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi}\iiint_{r\le t}\frac{2(\eta-t+\frac{r}{a})}{r}\mathrm{d}V\\ &= (x^2+yz)t + \frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}t^2(t-3y)\\ &= (x^2+yz)t + yt^2\end{aligned}$$

5 波的传播与衰减

例 5.1 试说明: 对一维波动方程所描述的波的传播过程一般具有后效现象.

解:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

例 5.2 试说明: 对一维波动方程, 即使初始资料具有紧支集, 当$t \to +\infty$ 时其柯西问题的解没有衰减性.

解: 设初始资料φ, ψ 具有紧支集, 则存在一个常数$\rho > 0$, 使φ 及ψ 在$[-\rho, \rho]$ 外恒等于零, 而在$[-\rho, \rho]$ 内成立$|\varphi|, |\psi| \le C$. 对充分大的t, 有

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{2a}\int_{-\rho}^{\rho}\psi(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \text{const}. \end{aligned}$$

所以, 一维波动方程柯西问题的解没有衰减性.

例 5.3 设u 为初始资料φ 及ψ 具有紧支集的二维波动方程的解. 试证明: 对任意固定的$(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, 成立

$$\lim_{t\to+\infty} u(x_0, y_0, t) = 0.$$

解: 初始资料φ 及ψ 具有紧支集, 则存在一个常数$\rho > 0$, 使φ 及ψ 在在以原点为中心、ρ 为半径的圆Σ_ρ^O 外恒等于零, 而在圆Σ_ρ^O 内成立$|\varphi|, |\psi| \le C$. 对固定的(x, y) 和充分大的t

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\Bigg[&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &+ \int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x + r\cos\theta, y + r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\Bigg] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right.\\
&\quad\left.+\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right]\\
&= \frac{1}{2\pi a}\left[\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right.\\
&\quad\left.+\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x+r\cos\theta,y+r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2-r^2}}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\right],
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} u(x_0,y_0,t)=0.$$

6 能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性

例 6.1 对受摩擦力作用且具固定端点的有界弦振动，满足方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t,$$

其中常数$c>0$，证明其能量是减少的，并由此证明方程

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t+f$$

的初边值问题解的唯一性以及关于初始条件及自由项的稳定性.

解: 记$E(t)=\displaystyle\int_0^l(u_t^2+a^2u_x^2)\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= 2\int_0^l(u_tu_{tt}+a^2u_xu_{xt})\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^l\left[u_t(u_{tt}-a^2u_{xx})+a^2\frac{\partial}{\partial x}(u_tu_x)\right]\mathrm{d}x\\
&= -2\int_0^l cu_t^2\mathrm{d}x+2a^2u_tu_x|_0^l=-2\int_0^l cu_t^2\mathrm{d}x\le 0,
\end{aligned}
$$

故其能量是减少的.

欲证如下初边值问题解的唯一性,

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t+f,$$

$$u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0)=\psi(x),$$

只需证明齐次定解问题只有零解

$$v_{tt}=a^2v_{xx}-cv_t,$$

$$v(0,t)=0,\qquad v(l,t)=0,$$

$$v(x,0)=0,\qquad v_t(x,0)=0.$$

根据能量不等式得出

$$E(t)\le E(0)=\int_0^l[v_t(x,0)+a^2v_x^2(x,0)]\mathrm{d}x=0$$

$$v_t=v_x=0,\quad\Rightarrow\ v\equiv\text{常数}.$$

由初始条件知$v\equiv 0$, 得证.

关于初始条件的稳定性: 记$E_0(t)=\int_0^l u^2\mathrm{d}x$,

$$\frac{\mathrm{d}E_0(t)}{\mathrm{d}t}=2\int_0^l uu_t\mathrm{d}x\le\int_0^l u^2\mathrm{d}x+\int_0^l u_t^2\mathrm{d}x\le E_0(t)+E(t)$$

$$\Rightarrow\ E_0(t)\le \mathrm{e}^tE_0(0)+\mathrm{e}^t\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}E(\tau)\mathrm{d}\tau\le\mathrm{e}^tE_0(0)+E(0)(\mathrm{e}^t-1).$$

根据上式, 当初值的均方模很小时, 对固定的T, $t\le T$ 时其解的均方模也很小. 因而关于初始条件是稳定的.

如有外力的作用, 此时定解问题为

$$u_{tt}=a^2u_{xx}-cu_t+f,$$

$$u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0,\quad u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0.$$

此时$E_0(0)=E(0)=0$, 且

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=2\int_0^l u_t(-cu_t+f)\mathrm{d}x=-2c\int_0^l u_t^2\mathrm{d}x+2\int_0^l u_tf\mathrm{d}x\le E(t)+\int_0^l f^2\mathrm{d}x,$$

$$\Rightarrow\ E(t)\le C_0\left(E(0)+\int_0^T\int_0^l f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)=C_0\int_0^T\int_0^l f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

$$E_0(t)\le\mathrm{e}^tE_0(0)+\mathrm{e}^t\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}E(\tau)\mathrm{d}\tau\le A\int_0^T\int_0^l f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\quad\square$$

例 6.2 证明函数$f(x,t)$ 在$G: 0 \le x \le l, 0 \le t \le T$ 作微小改变时, 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u + f(x,t),$$

(其中$k(x) > 0$、$q(x) > 0$ 和$f(x)$ 都是一些充分光滑的函数)具固定边界条件的初边值问题的解在G 内的改变也是很微小的.

解: 令$E(t) = \int_0^l [u_t^2 + k(x)u_x^2 + q(x)u^2]\mathrm{d}x$, $E_0(t) = \int_0^l u^2\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}
E'(t) &= 2\int_0^l (u_t u_{tt} + k u_x u_{xt} + q u u_t)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^l u_t[u_{tt} - (ku_x)_x + qu]\mathrm{d}x + 2(k u_t u_x)|_0^l \\
&= 2\int_0^l u_t f\mathrm{d}x \le E(t) + \int_0^l f^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ E(t) \le \mathrm{e}^t E(0) + \mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau \int_0^l f^2(x,\tau)\mathrm{d}x.$$

$$E_0'(t) = 2\int_0^l u u_t \mathrm{d}x \le E_0(t) + E(t),$$

$$\Rightarrow\ E_0(t) \le \mathrm{e}^t E_0(0) + \mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-\tau} E(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

设$u(x,t)$ 为满足齐次初边值条件定解问题的解, 显然有$E_0(0) = E(0) = 0$.

$$E_0(t) \le C\int_0^T \int_0^l f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

例 6.3 证明波动方程

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t)$$

的自由项f 在$L^2(K)$ 意义下作微小改变时, 对应的柯西问题的解u 在$L^2(K)$ 意义之下改变也是微小的.

解: 作特征锥: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le (R-at)^2$, 记$\Omega_t$ 为$t = \text{const}$ 与此锥的交截部分. 令

$$E_1(\Omega_t) = \iint_{\Omega_t} [u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad E_0(\Omega_t) = \iint_{\Omega_t} u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(\Omega_t) = 2\int_0^{R-at}\int_0^{2\pi r} u_t(u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})\mathrm{d}s\mathrm{d}r$$
$$+ 2\int_{\Gamma_t}\{a^2[u_xu_t\cos(n,x) + u_yu_t\cos(n,y)] - \frac{a}{2}[u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2)]\}\mathrm{d}s$$
$$\leq 2\iint_{\Omega_t} u_tf(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq E_1(\Omega_t) + \iint_{\Omega_t} f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

记$F(t) = \iint_{\Omega_t} f^2(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$$\Rightarrow\ E_1(\Omega_t) \leq \mathrm{e}^tE_1(\Omega_0) + \mathrm{e}^t\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}F(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_0(\Omega_t) = -a\int_{\Gamma_t} u^2\mathrm{d}s + 2\iint_{\Omega_t} uu_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq E_0(\Omega_t) + E_1(\Omega_t),$$

$$\Rightarrow\ E_0(\Omega_t) \leq \mathrm{e}^tE_0(\Omega_0) + \mathrm{e}^t\int_0^t \mathrm{e}^{-\tau}E_1(\Omega_\tau)\mathrm{d}\tau.$$

考察Cauchy 问题

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t), \\ &u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

的解u, 此时$E_0(\Omega_0) = E_1(\Omega_0) = 0$.

$$E_0(\Omega_t) \leq e^t\int_0^t\int_0^\tau \mathrm{e}^{-\xi}F(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

对上式从0 到$R/a = T$ 关于t 积分得

$$\|u\|_{L^2(K)}^2 \leq C\|f\|_{L^2(K)}^2,$$

C 为仅依赖于T 的常数. 因此若在$L^2(K)$ 意义下f 在作微小改变, u 亦只做微小改变.

例 6.4 固定端点有界弦的自由振动可以分解成各种不同固有频率的驻波(谐波)的叠加, 试计算各个驻波的动能和位能, 并证明弦振动的总能量等于各个驻波能量的叠加. 这个物理性质对应的数学事实是什么?

解: 此问题的解为

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty u_k(x,t) = \sum_{k=1}^\infty N_k\cos(\omega_kt + \theta_k)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$N_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \omega_k = \frac{k\pi a}{l}, \quad \cos\theta_k = \frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}, \quad \sin\theta_k = \frac{-B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}}$$

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi, \quad B_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi.$$

第k 次谐波的能量为

$$\begin{aligned}
E_k &= \int_0^l [(u_k)_t^2 + a^2 (u_k)_x^2]\mathrm{d}x \\
&= \omega_k^2 N_k^2 \int_0^l [\sin^2(\omega_k t + \theta_k)\sin^2\frac{k\pi}{l}x + \cos^2(\omega_k t + \theta_k)\cos^2\frac{k\pi}{l}x]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\omega_k^2 N_k^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k = \frac{(\pi a)^2}{2l}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 N_k^2.$$

另一方面

$$u_t = -\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k N_k \sin(\omega_k t + \theta_k)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

$$u_x = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \frac{k\pi}{l}\cos(\omega_k t + \theta_k)\cos\frac{k\pi}{l}x,$$

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^l (u_t^2 + a^2 u_x^2)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k,j=1}^{\infty}\omega_k\omega_j N_k N_j \sin(\omega_k t + \theta_k)\sin(\omega_j t + \theta_j)\int_0^l \sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{j\pi}{l}x\mathrm{d}x \\
&+ \sum_{k,j=1}^{\infty}\frac{kj\pi^2}{l^2}N_k N_j\cos(\omega_k t + \theta_k)\cos(\omega_j t + \theta_j)\int_0^l \cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{j\pi}{l}x\mathrm{d}x \\
&= \frac{(\pi a)^2}{2l}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 N_k^2.
\end{aligned}$$

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k.$$

此事实反映了特征函数系的完备性, 即成立Parseval 等式.

例 6.5 *考虑波动方程的第三类初边值问题*

$$\begin{gathered}
u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \quad t > 0, (x, y) \in \Omega, \\
u|_{t=0} = \varphi(x, y), \ u_t|_{t=0} = \psi(x, y), \\
\left(\tfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\Big|_{\Gamma} = 0,
\end{gathered}$$

其中$\sigma > 0$是常数, Γ为Ω的边界, $\mathbf{n}$为Γ上的单位外法线向量. 对于上述定解问题的解, 定义能量积分

$$E(t) = \iint_{\Omega} (u_t^2 + a^2(u_x^2 + u_y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a^2 \int_{\Gamma} \sigma u^2 \mathrm{d}s,$$

试证明$E(t) =$ 常数, 并由此证明上述定解问题解的唯一性.

解: 即证$E'(t) = 0$.

$$\begin{aligned}
E'(t) &= 2\iint_{\Omega} [u_t u_{tt} + a^2(u_x u_{xt} + u_y u_{yt})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2a^2 \int_{\Gamma} \sigma u u_t \mathrm{d}s \\
&= 2\iint_{\Omega} u_t[u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2a^2 \int_{\Gamma} u_t \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\mathrm{d}s \\
&= 0.
\end{aligned}$$

只需证明此波动方程满足齐次初边条件的定解问题只有零解,

$$E(t) = E(0) = 0.$$

第二章　　热传导方程

齐海涛

2008 年 12 月 9 日

目录

1　热传导方程及其定解问题的导出

例 1.1 一均匀细杆直径为l, 假设它在同一截面上的温度是相同的, 杆的表面和周围介质发生热交换, 并服从规律

$$\mathrm{d}Q = k_1(u - u_1)\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t.$$

假设杆的密度为ρ，比热为c, 热传导系数为k, 试导出此时温度u 满足的方程.

解: 取杆轴为x 轴, 考察杆位于$[x, x + \Delta x]$的微段的热量平衡. 单位时间从侧面流入的热量为

$$\mathrm{d}Q_1 = -k_1(u - u_1)\pi l\Delta x;$$

单位时间从x 处, $x + \Delta x$ 处流入的热量为

$$\mathrm{d}Q_2 = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\cdot\frac{\pi l^2}{4},\quad \mathrm{d}Q_3 = k(x + \Delta x)\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t)\cdot\frac{\pi l^2}{4},$$

故单位时间流入$(x, x+\Delta x)$ 的热量为

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}Q_1 + \mathrm{d}Q_2 + \mathrm{d}Q_3 = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x^*} \cdot \frac{\pi l^2}{4}\Delta x - k_1(u-u_1)\pi l \Delta x.$$

综上, 从时刻t_1 到t_2 流入位于$[x_1, x_2]$ 杆段的热量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\pi l^2}{4} - k_1(u-u_1)\pi l\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

而在这段时间内$[x_1, x_2]$ 杆段内各点温度从$u(x, t_1)$ 变到$u(x, t_2)$, 其吸收热量为

$$\int_{x_1}^{x_2} c\rho(u(x,t_2) - u(x,t_1))\frac{\pi l^2}{4}\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\pi l^2}{4}c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

根据热量守恒, 并注意到x_1, x_2, t_1, t_2 的任意性, 得所求方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{4k_1}{c\rho l}(u-u_1).$$

例 1.2 *试直接推导扩散过程所满足的微分方程.*

解: 设$N(x, y, z, t)$ 表示在时刻t, (x, y, z) 点处扩散物质的浓度, $D(x, y, z)$ 为扩散系数, 在无穷小时间段$\mathrm{d}t$ 内, 通过无穷小曲面块$\mathrm{d}S$ 的质量为

$$\mathrm{d}m = -D(x, y, z)\frac{\partial N}{\partial n}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t.$$

因此从时刻t_1 到t_2 流入区域Ω (Γ 为Ω 的表面) 的质量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_{\Gamma} D(x, y, z)\frac{\partial N}{\partial n}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_{\Omega}\mathrm{div}(D\mathrm{grad}N)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t.$$

另外, 从时刻t_1 到t_2, Ω 中该物质的增加为

$$\iiint_{\Omega}[N(x, y, z, t_2) - N(x, y, z, t_1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial N}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

根据质量守恒, 并注意到Ω, t_1, t_2 的任意性, 得所求方程为

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial N}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

例 1.3 *砼(混泥土)内部储藏着热量, 称为水化热, 在它浇筑后逐渐放出, 放热速度和它所储藏的水花热成正比. 以$Q(t)$ 表示它在单位体积中所储的热量, Q_0 为初始时刻所储的热量, 则$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\beta Q$, 其中$\beta$ 为正常数. 又假设砼的比热为c, 密度为ρ, 热传导系数为k, 求它在浇筑后温度u 满足的方程.*

解: 设砼内点(x,y,z)在时刻t的温度为$u(x,y,z,t)$, 显然

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\beta Q, \\ Q(0) = Q_0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q(t) = Q_0 \mathrm{e}^{-\beta t}.$$

易知t_1到t_2时刻, 砼内任一区域Ω中的热量的增加等于从Ω外部流入Ω的热量及砼中的水化热之和, 即

$$\begin{aligned} &\iiint_\Omega \int_{t_1}^{t_2} c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega (Q(t_1) - Q(t_2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \\ &= -\iiint_\Omega \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \\ &\int_{t_1}^{t_2} \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

注意到t_1, t_2及Ω的任意性, 有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\beta}{c\rho}Q_0\mathrm{e}^{-\beta t}.$$

例 1.4 设一均匀的导线处在周围为常数温度u_0的介质中, 试证: 在常电流作用下导线的温度满足微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{k_1 P}{c\rho\omega}(u - u_0) + \frac{0.24 i^2 r}{c\rho\omega},$$

其中i及r分别表示导体的电流及电阻, P表示横截面的周长, ω表示横截面的面积, 而k_1表示导线对于介质的热交换系数.

解: 与第1题类似, 取导线轴为x轴, 在时刻t_1到t_2介于$[x_1, x_2]$的导线段的热量增加为: 从导线的其它部分流入的热量, 从侧面流入的热量以及电流通过$[x_1, x_2]$这段产生的热量之和, 即

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\omega\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} k_1 P(u-u_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} 0.24\frac{i^2 r}{\omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

因此根据热量平衡就可得导线温度满足的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{k_1 P}{c\rho\omega}(u - u_0) + \frac{0.24 i^2 r}{c\rho\omega}.$$

例 1.5 设物体表面的绝对温度为u, 此时它向外界辐射出去的热量依斯特藩-玻耳兹曼(*Stefan-Boltzmann*) 定律正比于u^4, 即

$$\mathrm{d}Q = \sigma u^4 \mathrm{d}S\,\mathrm{d}t.$$

假设物体和周围介质之间只有热辐射而没有热传导, 又假设物体周围介质的绝对温度为已知函数$f(x,y,z,t)$, 求此时该物体热传导问题的边界条件.

解: 考察边界上的面积微元$\mathrm{d}S$. 在$\mathrm{d}t$ 时间内, 经边界微元流出的热量为(k 为热传导系数)

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t.$$

由该微元辐射到外部介质的热量为

$$\sigma u^4 \mathrm{d}S\,\mathrm{d}t.$$

外部介质通过该微元辐射到物体表面的热量为

$$\sigma f^4 \mathrm{d}S\,\mathrm{d}t.$$

根据热量平衡有

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = \sigma u^4 \mathrm{d}S\,\mathrm{d}t - \sigma f^4 \mathrm{d}S\,\mathrm{d}t.$$

故所求边界条件为

$$-k\frac{\partial u}{\partial n} = \sigma(u^4 - f^4).$$

2 初边值问题的分离变量法

例 2.1 用分离变量法求下列定解问题的解:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \ \ (t>0, 0<x<\pi), \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \ \ (t>0), \\ u(x,0) = f(x) \ \ (0<x<\pi). \end{cases}$$

解: 设$u(x,t) = X(x)T(t)$, 则

$$T' + \lambda a^2 T = 0,$$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X'(\pi) = 0.$$

$$\Rightarrow\ \lambda_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2,\quad k=0,1,2,\dots$$

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2a^2t}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x.$$

由初始条件知

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x$$

$$\Rightarrow\ C_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\xi)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\xi\mathrm{d}\xi.$$

例 2.2 用分离变量法求解热传导方程的初边值问题:

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}\ \ (t>0,0<x<1),\\ u(x,0)=\begin{cases}x, & 0<x\le\frac{1}{2},\\ 1-x, & \frac{1}{2}<x<1,\end{cases}\\ u(0,t)=u(1,t)=0\ \ (t>0).\end{cases}$$

解:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\mathrm{e}^{-k^2\pi^2t}\sin k\pi x.$$

$$\begin{aligned}C_k&=2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\xi\sin k\pi\xi\mathrm{d}\xi+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\xi)\sin k\pi\xi\mathrm{d}\xi\right]\\&=\frac{4}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2n,\\ \dfrac{4(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}, & k=2n+1,\end{cases}\quad n=0,1,2,\dots\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}\mathrm{e}^{-(2n+1)^2\pi^2t}\sin(2n+1)\pi x.$$

例 2.3 如果有一长度为l的均匀细棒, 其周围以及两端$x=0,x=l$均为绝热, 初始温度分别为$u(x,0)=f(x)$, 问以后时刻的温度分布如何? 且证明当$f(x)$等于常数u_0时, 恒有$u(x,t)=u_0$.

解:

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},\\ u_x|_{x=0}=u_x|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=f(x).\end{cases}\ \Rightarrow\ u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{l^2}a^2t\right)\cos\frac{k\pi}{l}x$$

$$C_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad C_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi \ \ (k \neq 0)$$

$$f(x) \equiv u_0 \quad \Rightarrow \quad C_0 = u_0, C_k = 0\ (k \neq 0) \quad \Rightarrow \quad u(x,t) \equiv u_0.$$

例 2.4 在区域$t > 0,\ 0 < x < l$ 中求解如下的定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \beta(u - u_0), \\ u(0,t) = u(l,t) = u_0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

其中α, β, u_0 均为常数, $f(x)$ 为已知函数.

解: 令$u = u_0 + v(x,t)\mathrm{e}^{-\beta t}$, 则得关于$v$ 的如下定解问题:

$$v_t = a^2 v_{xx},$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0,$$

$$v(x,0) = f(x) - u_0.$$

解得

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp\left(-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x,$$

其中

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l (f(\xi) - u_0)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi = f_k + \frac{2u_0}{k\pi}((-1)^k - 1),$$

$$f_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi.$$

故有

$$\begin{aligned} u(x,t) = u_0 &+ \sum_{k=1}^{\infty} f_k \exp\left(-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t - \beta t\right)\sin\frac{k\pi}{l}x \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4u_0}{(2k+1)\pi}\exp\left(-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t - \beta t\right)\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x. \end{aligned}$$

例 2.5 长度为l 的均匀细杆的初始温度为$0\,^\circ$C, 端点$x=0$ 保持常温u_0, 而在$x=l$ 和侧面上, 热量可以发散到周围的介质中去, 介质的温度为$0\,^\circ$C, 此时杆上的温度分布函数$u(x,t)$ 满足下述定解问题:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - b^2 u, \\ u(0,t) = u_0, \quad (u_x + Hu)|_{x=l} = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

试求出$u(x,t)$.

解: 令$u(x,t) = \mathrm{e}^{-b^2 t} v(x,t) + \psi(x)$, 则当$\psi(x)$ 满足

$$\psi'' - \frac{b^2}{a^2}\psi = 0,$$

$$\psi(0) = u_0, \quad (\psi' + H\psi)|_{x=l} = 0$$

时, $v(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \\ v|_{x=0} = (v_x + Hv)|_{x=l} = 0, \\ v(x,0) = -\psi(x). \end{cases}$$

易知

$$\psi(x) = \frac{b\,\mathrm{ch}\left(\frac{b(l-x)}{a}\right) + aH\,\mathrm{sh}\left(\frac{b(l-x)}{a}\right)}{b\,\mathrm{ch}\left(\frac{bl}{a}\right) + aH\,\mathrm{sh}\left(\frac{bl}{a}\right)} u_0.$$

而关于$v(x,t)$ 的定解问题可参照教材P49用分离变量法求解.

例 2.6 半径为a 的半圆型平板, 其表面绝热, 在板的圆周边界上保持常温u_0, 而在直径边界上保持常温u_1, 求圆板稳恒状态(即与时间t 无关的状态)的温度分布.

解: 此定解问题为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$u(a,\theta) = u_0, \quad 0 < \theta < \pi,$$

$$u(r,0) = u(r,\pi) = u_1, 0 \le r \le a.$$

作变换$u(r,\theta) = v(r,\theta) + u_1$, 则$v$ 满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$v(a,\theta) = u_0 - u_1, \quad 0 < \theta < \pi,$$

$$v(r,0) = v(r,\pi) = 0, 0 \le r \le a.$$

用分离变量法求解, 令$v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 代入方程及边界条件有

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0,$$

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0, \\ \Theta(0) = \Theta(\pi) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = k^2 (k = 1, 2, \dots).$$

此特征值问题解为$\lambda_k = k^2$ $(k = 1, 2, \dots)$,

$$\Theta_k = A_k \sin k\theta, \quad R_k = B_k r^k + C_k r^{-k}.$$

由解的有界性知$C_k = 0$, 所以

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k \sin k\theta.$$

代入圆周上的边界条件有

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k a^k \sin k\theta = u_0 - u_1.$$

于是

$$A_k = \frac{2}{a^k\pi}\int_0^{\pi}(u_0 - u_1)\sin k\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2(u_0 - u_1)}{a^k k\pi}[1 - (-1)^k].$$

综上可得

$$u(r,\theta) = u_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(u_0 - u_1)}{(2n+1)\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}\sin(2n+1)\theta.$$

3 柯西问题

例 3.1 求下述函数的傅里叶变换:

$$(1)\ \mathrm{e}^{-\eta x^2} \quad (\eta > 0); \quad (2)\ \mathrm{e}^{-a|x|} \quad (a > 0);$$

$$(3)\ \frac{x}{(a^2 + x^2)^k}, \quad \frac{1}{(a^2 + x^2)^k} \quad (a > 0, k\text{为自然数}).$$

解: (1)

$$F[\mathrm{e}^{-\eta x^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta(x+\frac{\mathrm{i}\lambda}{2\eta})^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4\eta}}.$$

(2)

$$\begin{aligned} F[\mathrm{e}^{-a|x|}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|}\cos\lambda x\mathrm{d}x - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|x|}\sin\lambda x\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos\lambda x\mathrm{d}x = \frac{2a}{\lambda^2+a^2}. \end{aligned}$$

(3) 利用留数定理和如下Fourier 变换的性质计算,

$$F[-\mathrm{i}xf(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F[f].$$

例 3.2 证明: 当$f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$ 上绝对可积时, $F[f]$ 为连续函数.

解: 记$\widetilde{f}(\lambda) = F[f(x)]$, 则

$$\begin{aligned} |\widetilde{f}(\lambda+h) - \widetilde{f}(\lambda)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}f(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx}-1|\cdot|f(x)|\mathrm{d}x \le 2\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由于对任意的$x\in\mathbf{R}$, 有

$$\lim_{h\to0}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}hx}-1| = 0.$$

故

$$\lim_{h\to0}|\widetilde{f}(\lambda+h)-\widetilde{f}(\lambda)| \le \lim_{h\to0}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{e}^{-ihx}-1|\cdot|f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

例 3.3 用傅里叶变换法求解三维热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y,z). \end{cases}$$

解: 对方程和初始条件进行Fourier 变换(见教材P56), 记

$$\widetilde{u}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,t) = F[u(x,y,z,t)],\quad \widetilde{\varphi}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = F[\varphi(x,y,z)],$$

得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\widetilde{u}}{\mathrm{d}t} &= -a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\widetilde{u}, \\ \widetilde{u}|_{t=0} &= \widetilde{\varphi}. \end{aligned}$$

解上述ODE 得

$$\widetilde{u} = \widetilde{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\mathrm{e}^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)t}.$$

取Fourier 逆变换得

$$u(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) * F^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)t}],$$

而

$$\begin{aligned}
&F^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)t}] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{\mathbf{R}^3} \mathrm{e}^{-a^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3 z)}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\mathrm{d}\lambda_3 \\
&= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}\right).
\end{aligned}$$

故

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\iiint_{\mathbf{R}^3} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.$$

例 3.4 *证明(3.29) 所表示的函数满足非齐次方程(3.15) 以及初始条件(3.16).*

解: 类似教材证明积分的一致收敛性.

例 3.5 *求解热传导方程(3.17) 的柯西问题, 已知(1) $u|_{t=0} = \sin x$, (2) 用延拓法求解半有界直线上的热传导方程(3.17), 假设*

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 < x < \infty), \\ u(0, t) = 0. \end{cases}$$

解: (1)

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x-2a\sqrt{t}\xi)\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x-2a\sqrt{t}\xi)\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-a^2t}\sin x.
\end{aligned}$$

(2) 对$\varphi(x)$ 作奇延拓, 即

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

求解如下Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx}, \\ u|_{t=0} = \Phi(x), \end{cases}$$

得(取$x>0$)

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_0^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi+\int_{-\infty}^{0}-\varphi(-\xi)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\right]\\ &= \frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2t}}\mathrm{sh}\frac{x\xi}{2a^2t}\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

例 3.6 证明函数

$$v(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

对于变量(x,y,t)满足方程

$$v_t=a^2(v_{xx}+v_{yy}),$$

而对于变量(ξ,η,τ)满足方程

$$v_\tau+a^2(v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta})=0.$$

解: 直接对表达式求偏导即可验证.

例 3.7 证明: 如果$u_1(x,t)$, $u_2(y,t)$分别是下述两个定解问题的解:

$$\begin{cases}\frac{\partial u_1}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},\\ u_1|_{t=0}=\varphi_1(x);\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{\partial u_2}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2},\\ u_2|_{t=0}=\varphi_2(y),\end{cases}$$

则$u(x,y,t)=u_1(x,t)u_2(y,t)$是定解问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\ u|_{t=0}=\varphi_1(x)\varphi_2(y)\end{cases}$$

的解.

解:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u_1}{\partial t}u_2+u_1\frac{\partial u_2}{\partial t} &= a^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+u_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\right)\\ &= a^2\left(\frac{\partial^2(u_1u_2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u_1u_2)}{\partial y^2}\right)\\ &= a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\end{aligned}$$

$$u|_{t=0}=(u_1u_2)|_{t=0}=\varphi_1(x)\varphi_2(y).$$

例 3.8 导出下列热传导方程柯西问题解的表达式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ u|_{t=0} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(y). \end{cases}$$

解: 由叠加原理与上题结果或直接应用Fourier 变换可得解为

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4a^2\pi t}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha_i(\xi)\beta_i(\eta)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

例 3.9 验证二维热传导方程柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\ u|_{t=0} = \varphi(x,y) \end{cases}$$

解的表达式为

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\eta)\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

解: 仿照教材P58-59的证明方法进行验证.

4 极值原理、定解问题解的唯一性和稳定性

例 4.1 证明方程$u_t = a^2u_{xx} + cu$ $(c \geq 0)$ 具狄利克雷边界条件的初边值问题解的唯一性和稳定性.

解: 作变换$v(x,t) = u(x,t)\mathrm{e}^{-ct}$, 则$v(x,t)$ 满足方程$v_t = a^2v_{xx}$, 且有

$$|v|_{x=\alpha}| = |u\mathrm{e}^{-ct}|_{x=\alpha}| \leq B,$$

$$|v|_{x=\beta}| = |u\mathrm{e}^{-ct}|_{x=\beta}| \leq B,$$

$$|v|_{t=0}| = |u|_{t=0}| \leq M.$$

根据热传导方程的极值原理有

$$|v(x,t)| \leq \max\{M, B\},$$

而对任何$t > 0$

$$|u(x,t)| = |v(x,t)\mathrm{e}^{ct}| \leq \max\{M\mathrm{e}^{ct}, B\mathrm{e}^{ct}\}.$$

为证唯一性只要证明问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + cu, \\ u|_{x=\alpha} = u|_{x=\beta} = 0, \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

只有零解. 事实上, 此时$M = B = 0$, 因此$|u(x,t)| \le 0$, 即$u(x,t) \equiv 0$.

为证稳定性, 只要证明问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + cu, \\ u|_{x=\alpha} = \eta_1(t),\ u|_{x=\beta} = \eta_2(t), \\ u|_{t=0} = \varepsilon(x) \end{cases}$$

当$\eta_1(t), \eta_2(t)$ 和$\varepsilon(x)$ 微小时, 解亦微小. 设当$t \le T$ 时,

$$|\eta_1(t)| < \eta,\ |\eta_2(t)| < \eta,\ \max|\varepsilon(x)| < \varepsilon,$$

则对$t \le T, \alpha \le x \le \beta$, 成立

$$|u(x,t)| \le \max\{\eta e^{ct}, \varepsilon e^{ct}\} \le \max\{\eta e^{cT}, \varepsilon e^{cT}\}.$$

故此问题是稳定的.

例 4.2 利用证明热传导方程极值原理的方法, 证明满足方程$u_{xx} + u_{yy} = 0$ 的函数在有界闭区域上的最大值不会超过它在边界上的最大值.

解: 设$u(x,y)$ 在以Γ 为边界的区域Ω 上调和. 考虑到u 在闭区域上的连续性, 知u 一定可以取到最大值M. 又因Γ 是闭集, u 在Γ 上也有最大值m. 下证$M = m$.

用反证法. 设$u(x,y)$ 在Ω 内某点(x_0,y_0) 达到最大值

$$u(x_0,y_0) = M > m.$$

作辅助函数

$$v(x,y) = u(x,y) + \frac{M-m}{4R^2}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2],$$

其中R 是以原点为中心、包含区域Ω 的一个圆的半径. 此时有

$$v(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) = M,$$

而
$$v|_\Gamma = u|_\Gamma + \frac{M-m}{4R^2}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]|_\Gamma < m + (M-m) = M.$$
故v 不在边界Γ 上取到最大值, 它必在Ω 内某点(x_1, y_1) 取到最大值, 在这点应有
$$v_{xx} \le 0,\ v_{yy} \le 0, \quad \Rightarrow \quad v_{xx} + v_{yy} \le 0.$$
但另一方面
$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + \frac{M-m}{4R^2} > 0$$
导致矛盾. 因此应有$M = m$.

例 4.3 证明初边值问题
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \\ u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad (u_x + hu)|_{x=l} = \mu_2(t) \ \ (h > 0), \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$
的解$u(x,t)$ 在$R_{t_1} : \{0 \le t \le t_1, 0 \le x \le l\}$ 中满足
$$u(x,t) \le \\ e^{\lambda t_1} \max\left(0, \max_{0\le x\le l} \varphi(x), \max_{0 \le t \le t_1}\left(e^{-\lambda t}\mu_1(t), \frac{e^{-\lambda t}\mu_2(t)}{h}\right), \frac{1}{\lambda}\max_{R_{t_1}}(e^{-\lambda t} f)\right),$$
其中λ 为任意正常数.

解: 作变换$v(x,t) = e^{-\lambda t}u$, 其中λ 为任意正常数. 由u 的初边值问题易知v 满足
$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} + \lambda v = e^{-\lambda t} f(x,t), \\ v|_{x=0} = e^{-\lambda t}\mu_1(t), \left(\frac{\partial v}{\partial n} + hv\right)\Big|_{x=l} = e^{-\lambda t}\mu_2(t), \\ v|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases}$$
考虑v 在R_{t_1} 上的最大值, 如果$v(x,t)$ 在R_{t_1} 上有正的最大值, 则在最大值点有$v_t \ge 0$, $v_{xx} \le 0$ 且$v > 0$, 进而
$$v = \frac{1}{\lambda}[e^{-\lambda t} f(x,t) - (v_t - a^2 v_{xx})] \le \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} f(x,t).$$
所以
$$|u(x,t)| \le e^{\lambda t_1}\frac{1}{\lambda}\max_{R_{t_1}}(e^{-\lambda t} f(x,t)).$$
再仿照教材P62证明其它估计式, 即得结论.

5 解的渐近性态

例 5.1 证明下列热传导方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

的解当 $t \to +\infty$ 时指数地衰减于零, 其中 φ 为连续函数, 且 $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

解: 此定解问题的解为

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{k^2\pi^2 a^2}{l^2}t} \sin\frac{k\pi}{l}x,$$

其中

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\mathrm{d}x.$$

解的渐近性态 由 $\varphi(x) \in C[0,l]$ 知, 对一切 k,

$$|A_k| \le C_1,$$

其中 C_1 为仅与 φ 的最大模有关的常数.

$$|u(x,t)| \le C_1\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\frac{a^2\pi^2(k^2-1)}{l^2}t}\right) e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}t} \le C e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}t}.$$

例 5.2 证明: 当 $\varphi(x,y)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上的有界连续函数, 且 $\varphi \in L^1(\mathbf{R}^2)$ 时, 二维热传导方程柯西问题的解, 当 $t \to +\infty$ 时, 以 t^{-1} 衰减率趋于零.

解:

$$\begin{aligned} |u(x,y,t)| &\le \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{\mathbf{R}^2} |\varphi(\xi,\eta)| e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \\ &\le \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{\mathbf{R}^2} |\varphi(\xi,\eta)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = Ct^{-1}. \end{aligned}$$

例 5.3 证明: 当 $\varphi(x,y,z)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 上的有界连续函数, 且 $\varphi \in L^1(\mathbf{R}^3)$ 时, 三维热传导方程柯西问题的解, 当 $t \to +\infty$ 时, 以 $t^{-3/2}$ 衰减率趋于零.

解:

$$\begin{aligned} |u(x,y,z,t)| &\le \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\iiint_{\mathbf{R}^3} |\varphi(\xi,\eta,\zeta)| e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \\ &\le \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\iiint_{\mathbf{R}^3} |\varphi(\xi,\eta,\zeta)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = Ct^{-3/2}. \end{aligned}$$

第三章　调和方程

齐海涛

2008 年 12 月 9 日

目录

1　建立方程、定解条件

例 1.1 设$u(x_1, \ldots, x_n) = f(r)$ (其中$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$) 是$n$ 维调和函数, 试证明

$$f(r) = c_1 + \frac{c_2}{r^{n-2}} \qquad (n \neq 2),$$

$$f(r) = c_1 + c_2 \ln \frac{1}{r} \qquad (n = 2),$$

其中c_1, c_2 为任意常数.

证: 由于$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, 知

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r)\frac{x_i}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{x_i^2}{r^2} f''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) f'(r), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

将上式代入调和方程得

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0,$$

即

$$\frac{f''(r)}{f'(r)} = -\frac{n-1}{r}.$$

对上式两边积分即得结论.

例 1.2 证明: 拉普拉斯算子在球面坐标(r, θ, φ) 下可以写成

$$\triangle u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

证: 方法一: 球面坐标系与直角坐标系之间的变换关系为

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

为计算简单, 将此坐标变换分为两步

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = z,$$

及

$$R = r\sin\theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

由柱面坐标系下Laplace 算子的表达式知

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1}$$

再由

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial R}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial\theta} = \frac{\partial u}{\partial R} r\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial z} r\sin\theta,$$

反解得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial R} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}. \tag{2}$$

注意到

$$R^2 + z^2 = r^2, \qquad \tan\theta = \frac{R}{z},$$

故有

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial R} = \sin\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial R} = \frac{\cos\theta}{r}. \tag{3}$$

由(2) 及(3) 知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}.$$

将最后两式及(2) 代入(1) 并加以整理, 即得到所需结果.

方法二: 采用正交曲线坐标系(q_1, q_2, q_3)

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z),$$

另一方面(x, y, z) 也可表为(q_1, q_2, q_3) 的函数

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3).$$

并记拉梅系数为H_1, H_2, H_3 为

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2},$$

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2},$$

则有

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

此时Laplace 算子在曲线坐标系中的表达式为

$$\triangle u = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]. \quad (4)$$

在球面坐标系下$q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2,$$

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r\sin\theta$$

将H_1, H_2, H_3 代入(4) 即得球面坐标下Laplace 算子的表达式.

例 1.3 证明: 拉普拉斯算子在柱面坐标(r, θ, z) 下可以写成

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

证: 方法一: 柱面坐标系与直角坐标系之间的变换关系为

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad z = z,$$

或者为

$$r = (x^2+y^2)^{1/2},\quad \theta = \arctan\frac{y}{x},\quad z = z.$$

从而

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta,\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r},\quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

由此得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin 2\theta}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} - \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin 2\theta}{r^2},$$

将最后两式相加, 并加以整理, 即得到所需结果.

方法二: 同上题, 在柱面坐标系下$q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = z$, 则

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2,$$

$$H_1 = 1,\quad H_2 = r,\quad H_3 = 1,$$

代入(4) 即得柱面坐标下Laplace 算子的表达式.

例 1.4 证明下列函数都是调和函数:

1. $ax + by + c \quad (a, b, c$ 为常数);
2. $x^2 - y^2$ 和$2xy$;
3. $x^3 - 3xy^2$ 和$3x^2y - y^3$;
4. $\operatorname{sh} ny \sin nx$, $\operatorname{sh} ny \cos nx$, $\operatorname{ch} ny \sin nx$ 和$\operatorname{ch} ny \cos nx$ (n 为常数);

5. $\operatorname{sh} x(chx + \cos y)^{-1}$ 和$\sin y(\operatorname{ch} x + \cos y)^{-1}$.

证: 方法一: 直接求导加以验证; 方法二: 利用复变函数的方法加以验证, 即运用解析函数的实部和虚部均为调和函数的性质予以证明.

1. $\triangle(ax + by + c) = 0$;

2. 取复变量函数为$f(z) = z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2$;

3. 取复变量函数为$f(z) = z^3 = (x + \mathrm{i}y)^3$;

4. 取复变量函数为$f_1(z) = \operatorname{sh}(nz) = \operatorname{sh}(n(y + \mathrm{i}x))$, $f_2(z) = \operatorname{ch}(nz) = \operatorname{ch}(n(y + \mathrm{i}x))$;

5. 取复变量函数为$f(z) = \operatorname{th}\frac{z}{2} = \operatorname{sh}\frac{z}{2}/\operatorname{ch}\frac{z}{2}$, 除去$x = 0$ 且$y = (2k + 1)\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$ 外均调和.

例 1.5 证明用极坐标表示的下列函数都是调和函数:

1. $\ln r$ 和θ;

2. $r^n \cos n\theta$ 和$r^n \sin n\theta$ (n 为常数);

3. $r \ln r \cos\theta - r\theta \sin\theta$ 和$r \ln r \sin\theta + r\theta\cos\theta$.

证: 方法一: 直接求导加以验证; 方法二: 记$z = re^{\mathrm{i}\theta}$, 利用解析函数的实部和虚部均为调和函数的性质予以证明.

1. 取复变量函数为$f(z) = \ln z = \ln r + \mathrm{i}\theta$;

2. 取复变量函数为$f(z) = z^n = r^n \cos n\theta + \mathrm{i}r^n \sin n\theta$;

3. 取复变量函数为$f(z) = z\ln z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\ln r + \mathrm{i}\theta)$.

例 1.6 用分离变量法求解由下述调和方程的第一边值问题所描述的矩形平板($0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$) 上的稳定温度分布:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = \sin\frac{\pi x}{a}, \ u(x, b) = 0. \end{cases}$$

解: 令$u(x,y)=X(x)Y(y)$代入$u_{xx}+u_{yy}=0$的X和Y分别满足

$$X''+\lambda X=0,\quad X(0)=X(a)=0; \tag{5}$$

$$Y''-\lambda Y=0. \tag{6}$$

(5) 只有$\lambda>0$时有非零解,

$$\lambda=\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{a^2},$$

$$X_k(x)=C_k\sin\frac{k\pi}{a}x,\quad Y_k(y)=A_k\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_k}y}+B_k\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_k}y}.$$

故定解问题的解为

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{a}y}+B_k\mathrm{e}^{\frac{k\pi}{a}y}\right)\sin\frac{k\pi}{a}x.$$

由边界条件得

$$\sum_{k=1}^{\infty}(A_k+B_k)\sin\frac{k\pi}{a}x=\sin\frac{\pi x}{a},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{a}b}+B_k\mathrm{e}^{\frac{k\pi}{a}b}\right)\sin\frac{k\pi}{a}x=0.$$

解得

$$A_1=\frac{e^{\frac{b}{a}\pi}}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}\pi},\quad B_1=-\frac{e^{-\frac{b}{a}\pi}}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}\pi},A_k=B_k=0\ (k\neq 1).$$

综上得

$$u(x,y)=\frac{\mathrm{sh}\,\frac{\pi(b-y)}{a}}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}.$$

例 1.7 在膜型扁壳渠道闸门的设计中, 为了考察闸门在水压力作用下的受力情况, 要在矩形区域$0\le x\le a$, $0\le y\le b$上求解如下的非齐次调和方程的边值问题:

$$\begin{cases}\triangle u=py+q\quad(p<0,q>0\text{常数}),\\ u_x|_{x=0}=0,\ u|_{x=a}=0,\\ u|_{y=0,y=b}=0.\end{cases}$$

解: 令$v(x,y)=u(x,y)+(x^2-a^2)(fy+g)$, 取$f=-p/2$, $g=-q/2$, 则v 是下述问题之解

$$\begin{cases}\triangle v=0,\\ v_x|_{x=0}=0,\ v|_{x=a}=0,\\ v|_{y=0}=-\frac{q}{2}(x^2-a^2)=\alpha(x),\\ v|_{y=b}=-\frac{1}{2}(x^2-a^2)(pb+q)=\beta(x).\end{cases}$$

由分离变量法解得

$$\begin{aligned}v(x,y)&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k\mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi}{2a}y}+B_k\mathrm{e}^{-\frac{(2k+1)\pi}{2a}y}\right)\cos\frac{2k+1}{2a}\pi x\\ &=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2a}\right)^3\operatorname{sh}\frac{2k+1}{2a}\pi b}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\\ &\quad\times\left[(pb+q)\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi}{2a}(y-b)-q\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi y}{2a}\right].\end{aligned}$$

例 1.8 举例说明在二维调和方程的狄利克雷外问题中, 如对解$u(x,y)$ 不加在无穷远处为有界的限制, 那么定解问题的解就不是唯一的.

解: 考虑如下Dirichlet 外问题

$$\triangle u=0,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}>1,$$

$$u|_{r=1}=1.$$

显然$u\equiv 1$, $u=c\ln\frac{1}{r}+1$ $(c\in\mathbf{R})$ 均为此外问题的解, 即此定解问题的解不唯一.

例 1.9 设

$$J(v)=\iiint_{\Omega}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Gamma}\left\{\frac{1}{2}\sigma v^2-gv\right\}\mathrm{d}s,$$

考察变分问题: 求$u\in V$, 使

$$J(u)=\min_{v\in V}J(v),$$

其中$V=C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. 试导出与其等价的边值问题, 并证明它们的等价性.

证: 此变分问题与如下定解问题等价

$$\triangle u=0,$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\right|_{\Gamma}=g.$$

2 格林公式及其应用

例 2.1 证明(2.7) 式对于M_0 在Ω 外与Γ 上的情形成立.

证: 当M_0 在Γ 上时, 作小半球$B_\varepsilon(M_0)$ 挖去M_0 (M_0 为球心, ε 为半径). 记S_ε 为半球球面, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(M_0)}$, 则$u$ 及$\frac{1}{r_{M_0M}}$ 在Ω_ε 内调和. 利用Green 第二公式

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_{\Omega_\varepsilon} \left(u \triangle \frac{1}{r_{M_0M}} - \frac{1}{r_{M_0M}} \triangle u \right) \mathrm{d}V_M \\ &= \iint_{\Gamma \cup S_\varepsilon(M_0)} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{M_0M}} - \frac{1}{r_{M_0M}} \frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}S_M, \end{aligned}$$

$$-\iint_\Gamma \left(\frac{1}{r_{M_0M}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{M_0M}} \right) \mathrm{d}S_M = \iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{r_{M_0M}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{M_0M}} \right) \mathrm{d}S_M.$$

$$\begin{aligned} &\iint_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{r_{M_0M}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{M_0M}} \right) \mathrm{d}S_M \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \iint_{S_\varepsilon} \frac{\partial u(M)}{\partial n} \mathrm{d}S_M + \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon} u(M) \mathrm{d}S_M \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}(M^*) 2\pi\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} u(M^{**}) 2\pi\varepsilon^2 \\ &= 2\pi\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}(M^*) + 2\pi u(M^{**}) \to 2\pi u(M_0), \quad \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

故有

$$-\iint_\Gamma \left(\frac{1}{r_{M_0M}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r_{M_0M}} \right) \mathrm{d}S_M = 2\pi u(M_0).$$

当M_0 在Γ 外时, u 及$\frac{1}{r_{M_0M}}$ 在Ω 内调和. 利用Green 第二公式易得.

例 2.2 若函数$u(x, y)$ 是单位圆上的调和函数, 又它在单位圆周上的数值已知为$u = \sin\theta$, 其中θ 表示极角, 问函数u 在原点之值等于多少?

解: 由二维调和函数的平均值公式

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\Gamma_a} u \mathrm{d}s,$$

知

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma u \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 0.$$

例 2.3 如果用拉普拉斯方程表示平衡温度场中温度分布函数所满足的方程,试阐明使诺伊曼内问题有解的条件 $\iint f\mathrm{d}s=0$ 的物理意义.

解: $\iint f\mathrm{d}s=0$ 即表示通过边界曲面热流量的代数和为零,即处于稳定温度状态的物体,从表面流入和流出的热量是相同的.

例 2.4 证明:当 $u(M)$ 在闭曲面 Γ 的外部调和,并且在无穷远处成立

$$u(M)=O\left(\frac{1}{r_{OM}}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial r}=O\left(\frac{1}{r_{OM}^2}\right)\quad (r_{OM}\to\infty),$$

而 M_0 是 Γ 外的任一点,则公式(2.6)仍成立.

证: 设 M_0 是 Γ 外的任一点,作一以 R 为半径的球 K_R,使其包含 Γ 及 M_0 在其内,记 K_R 的球面为 Γ_R,则成立

$$\iint_{\Gamma+\Gamma_R}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S+4\pi u^*-4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*=0.$$

其中 u^* 和 $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$ 分别是函数 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在包含 M_0 的小球面 Γ_ε 上的平均值.令 $R\to\infty$,注意到 $u(M)=O\left(\frac{1}{r_{OM}}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial r}=O\left(\frac{1}{r_{OM}^2}\right)$ 时有

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{\Gamma_R}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=0.$$

故当 $u(M)$ 在 Γ 外部调和时亦成立

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Gamma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S_M.$$

例 2.5 证明调和方程狄利克雷外问题解的稳定性.

证: 设 u_1,u_2 为Dirichlet 外问题的解,即

$$\triangle u_i=0,\quad u_i|_\Gamma=f_i,\quad \lim_{r\to\infty}u_i=0,\quad i=1,2.$$

令 $v=u_1-u_2$,则 v 满足

$$\triangle v=0,\quad v|_\Gamma=f_1-f_2,\quad \lim_{r\to\infty}v=0.$$

由于 $\lim\limits_{r\to\infty}v=0$,对任意的 $\varepsilon>0$,可取充分大的 R 为半径的球 K_R,使 Γ 落在 K_R 内,且 $|v|_{\Gamma_R}|<\varepsilon$.在 $K_R\backslash\Omega$ 中 v 应用极值原理,得在 $K_R\backslash\Omega$ 上成立

$$|v|<\max\left\{\varepsilon,\max_\Gamma|f_1-f_2|\right\}\quad\Rightarrow\quad |v|<\max_\Gamma|f_1-f_2|.$$

例 2.6 对于二阶偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0,$$

其中a_{ij}, b_i, c $(i, j = 1, \ldots, n)$ 均为常数, 假设矩阵a_{ij} 是正定的, 即对任何实数λ_i $(i = 1, \ldots, n)$, 成立

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \quad (\alpha\text{为正的常数}),$$

则称它为椭圆型方程. 又设$c < 0$, 试证明该方程的解也成立极值原理. 也就是说, 若u 在Ω 中满足方程, 在$\Omega \cup \Gamma$ 连续, 则u 不能在Ω 的内部达到正的最大值或负的最小值.

证: (反证法) 记$A = (a_{ij})$. 若存在$M_0 \in \Omega$, 使u 在M_0 达到正的最大值(对负的最小值的情形可用$-u$ 讨论), 将坐标轴作一旋转, 使$A(M_0)$ 化成对角阵: $\overline{a}_{ii}(M_0) > 0$, $\overline{a}_{ij}(M_0) = 0$ $(i \neq j)$. 记新坐标系为$y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$, 则

$$\overline{L}u = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ii}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_i \frac{\partial u}{\partial y_i} + cu = 0.$$

由u 在M_0 达极大值知$\dfrac{\partial u}{\partial y_i}(M_0) = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(M_0) \leq 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. 记

$$\overline{L}_1 u = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ii}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_i \frac{\partial u}{\partial y_i},$$

则$\overline{L}_1 u(M_0) \leq 0$, 而由$\overline{L}_1 u(M_0) = \overline{L}u(M_0) - cu(M_0)$, $c < 0$ 知$\overline{L}_1 u(M_0) > 0$, 由此得矛盾, 故$u$ 不能在Ω 的内部达到正的最大值.

例 2.7 证明第6题中讨论的椭圆型方程的第一边值问题解的唯一性与稳定性.

证: 唯一性: 若u_1, u_2 均满足

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0,$$

$$u|_\Gamma = f.$$

令$v = u_1 - u_2$, 则

$$Lv = 0, \quad v|_\Gamma = 0.$$

由上题知, v 在Ω 内部达不到正的最大和负的最小, 故正的最大和负的最小均在边界上达到, 由此得$v\equiv 0$, 故$u_1\equiv u_2$.

稳定性: 若u_1, u_2 分别满足

$$Lu_i=0,\quad u_i|_\Gamma=f_i,\ \ i=1,2.$$

则$v=u_1-u_2$ 满足

$$Lv=0,\quad v|_\Gamma=f_1-f_2.$$

由上题知, 当$\min\limits_\Gamma(f_1-f_2)>0$ 时, 成立$0\le v<\max\limits_\Gamma(f_1-f_2)$; 当$\max\limits_\Gamma(f_1-f_2)<0$ 时, 成立$0\ge v>\min\limits_\Gamma(f_1-f_2)$; 当$\max\limits_\Gamma(f_1-f_2)>0$ 且$\min\limits_\Gamma(f_1-f_2)<0$ 时, 成立$\min\limits_\Gamma(f_1-f_2)<v<\max\limits_\Gamma(f_1-f_2)$.

综上所述, 当$|f_1-f_2|<\varepsilon$ 时, 成立$|v|<\varepsilon$. 稳定性得证.

例 2.8 举例说明对于方程$u_{xx}+u_{yy}+cu=0\ (c>0)$, 不成立极值原理.

解: 令

$$u=\sin\sqrt{\frac{c}{2}}x\cdot\sin\sqrt{\frac{c}{2}}y,$$

则$u_{xx}+u_{yy}+cu=0$. 取Ω 为正方形$\left[-\sqrt{\frac{2}{c}}\pi,\sqrt{\frac{2}{c}}\pi\right]\times\left[-\sqrt{\frac{2}{c}}\pi,\sqrt{\frac{2}{c}}\pi\right]$, 则$u$ 在边界Γ 上的值为0, 而当$x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{c}}\pi$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{c}}\pi$ 时$u=1$, 且在Ω 内$u\le 1$, 所以u 的最大值在区域内部达到, 从而不成立极值原理.

3 格林函数

例 3.1 证明格林函数的性质3及性质5.

证: (性质3) 由于

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-g(M,M_0),\quad M_0\in\Omega$$

其中$g(M,M_0)$ 满足

$$\triangle g(M,M_0)=0,\quad M\in\Omega,$$
$$g(M,M_0)|_\Gamma=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}.$$

显然, $g|_\Gamma>0$, 由极值原理知$g(M,M_0)>0$, 故

$$G(M,M_0)<\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}.$$

再作一以M_0 为球心, 充分小正数ε 为半径的球K_ε, 使K_ε 完全落在Ω 内, 且球面Γ_ε 上$G(M,M_0)>0$. 考虑

$$\triangle G(M,M_0)=0,\qquad \Omega\setminus K_\varepsilon,$$
$$G|_\Gamma=0,\qquad G|_{\Gamma_\varepsilon}=\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-g(M,M_0)>0.$$

由极值原理得, 在$\Omega\setminus K_\varepsilon$ 内, $G>0$. 而ε 可任意小, 故$G>0$ 在Ω 内成立, 由此即得

$$0<G(M,M_0)<\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}.$$

(性质5) 方法一: 求解

$$\triangle u=0\ \ \Omega$$
$$u|_\Gamma=1.$$

由解的表达式得

$$u(M_0)=-\iint_\Gamma f\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S_M=-\iint_\Gamma\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S_M.$$

又由解的唯一性得$u\equiv 1$, 得证.

方法二: 由于$G(M,M_0)$ 在$\Omega\setminus K_\varepsilon$ (K_ε 为以M_0 为球心、ε 为半径的球) 内调和, 则

$$\iint_{\Gamma+\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S=0.$$

$$\Rightarrow\iint_\Gamma\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\mathrm{d}S=-\iint_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\mathrm{d}S$$
$$=-\iint_{\Gamma_\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi r_{M_0M}}-\frac{\partial g}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=-1.$$

例 3.2 证明格林函数的对称性：$G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1)$.

证: 以M_1,M_2 为心, 半径为ε 的球K_1,K_2, 其边界分别记为Γ_1,Γ_2. 由Green 第二公式

$$\iiint_{\Omega-K_1-K_2}(u\triangle v-v\triangle u)\mathrm{d}\Omega=\iint_{\Gamma+\Gamma_1+\Gamma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

令$u=G(M,M_1)$, $v=G(M,M_2)$, 注意到在$\Omega-K_1-K_2$ 内, $\triangle u=\triangle v=0$, 且在$\Gamma$ 上$u=v=0$, 得

$$\iint_{\Gamma_1+\Gamma_2}\left[G(M,M_1)\frac{\partial G(M,M_2)}{\partial n}-G(M,M_2)\frac{\partial G(M,M_1)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S=0.$$

注意到当$\varepsilon \to 0$时

$$\iint_{\Gamma_1} G(M, M_1) \frac{\partial G(M, M_2)}{\partial n} \mathrm{d}S \to 0,$$

$$\iint_{\Gamma_1} G(M, M_2) \frac{\partial G(M, M_1)}{\partial n} \mathrm{d}S \to G(M_1, M_2).$$

对Γ_2上有类似的结果, 故得

$$G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1).$$

例 3.3 写出球的外部区域的格林函数,并由此导出对调和方程求解球的狄利克雷外问题的泊松公式.

解: 采用教材P82 图3.2, 与球内Green 函数推导完全类似可得

$$G(M, M_1) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{M_1 M}} - \frac{R}{\rho_1} \frac{1}{r_{M_0 M}} \right),$$

其中M_0为球外一点M_1关于球面的反演点, $\rho_1 = r_{OM_1}$.

由此得Poisson 公式为

$$u(\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \frac{1}{4\pi R} \iint_K \frac{(\rho_1^2 - R^2) f(R, \theta, \varphi)}{(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1 \cos\gamma)^{3/2}} \mathrm{d}S,$$

其中$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)$.

例 3.4 利用泊松公式求边值问题的解

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1, \\ u(R, \theta, \varphi)|_{R=1} = A + B\cos 2\theta \ \ (R, \theta, \varphi\text{表示球坐标}). \end{cases}$$

解: 记$f(\theta) = A + B\cos 2\theta$, 由Poisson 公式知: 此定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) &= \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2) f(\theta)}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos\gamma)^{3/2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(1 - \rho_0^2) f(\theta)}{(1 + \rho_0^2 - 2\rho_0\cos\gamma)^{3/2}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi, \end{aligned}$$

其中$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$. 由于被积函数是$\varphi$的、以$2\pi$为周期的函数, 故只需计算$\varphi_0 = 0$的值, 即计算$M_0$落在$xoz$平面上的情形.

将y轴固定, 旋转x轴与z轴, 使z'轴通过点M_0, 现在新坐标系$Ox'y'z'$ (相应的极坐标为R, θ', φ') 下计算积分. 注意到在新坐标系下: OM的单位向量

为$(\sin\theta'\cos\varphi', \sin\theta'\sin\varphi', \cos\theta')$, OM_0 的单位向量为$(0,0,1)$, oz 轴的单位向量为$\mathbf{k} = (\sin\theta_0, 0, \cos\theta_0)$, 于是

$$\cos\theta = \overrightarrow{OM}\cdot\mathbf{k} = \sin\theta_0\sin\theta'\cos\varphi' + \cos\theta_0\cos\theta'.$$

又由于单位球面的面积元素为$\sin\theta d\theta d\varphi = \sin\theta' d\theta' d\varphi'$, 从而得

$$u(\rho_0,\theta_0,0) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{(1-\rho_0^2)I(\theta')}{(1+\rho_0^2-2\rho_0\cos\theta')^{3/2}}\sin\theta' d\theta', \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}
I(\theta') &= \int_0^{2\pi} f(\theta)d\varphi' = \int_0^{2\pi}[(A-B)+2B\cos^2\theta]d\varphi' \\
&= \int_0^{2\pi}[(A-B)+2B(\sin\theta_0\sin\theta'\cos\varphi'+\cos\theta'\cos\theta_0)^2]d\varphi' \\
&= 2\pi[A-B\cos^2\theta_0+B(3\cos^2\theta_0-1)\cos^2\theta'].
\end{aligned}$$

将$I(\theta')$ 的表达式代入(7), 并引入变量代换得

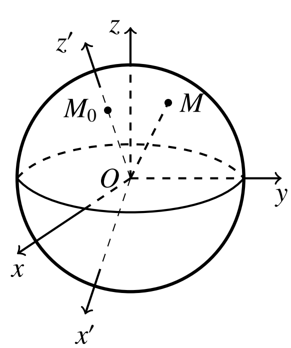
$$u(\rho_0,\theta_0,0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\rho_0^2)[A-B\cos^2\theta_0+B(3\cos^2\theta_0-1)x^2]}{(1+\rho_0^2-2\rho_0 x)^{3/2}}dx.$$

经积分计算可知

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\rho_0^2)dx}{(1+\rho_0^2-2\rho_0 x)^{3/2}} = 1, \quad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\rho_0^2)x^2dx}{(1+\rho_0^2-2\rho_0 x)^{3/2}} = \frac{1+2\rho_0^2}{3}.$$

最后得

$$\begin{aligned}
u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0) &= u(\rho_0,\theta_0,0) \\
&= A - B\cos^2\theta_0 + \frac{B}{3}(1+2\rho_0^2)(3\cos^2\theta_0-1) \\
&= A - \frac{B}{3} - \frac{2}{3}B\rho_0^2 + 2B\rho_0^2\cos^2\theta_0.
\end{aligned}$$



注: 事实上, 在直角坐标系下, 很容易将解凑出来. 令

$$x=\rho_0\cos\varphi_0\sin\theta_0,\quad y=\rho_0\sin\varphi_0\sin\theta_0,\quad z=\rho_0\cos\theta_0,$$

则当$\rho_0=1$ 时, 有

$$A+B\cos 2\theta=A+B(\cos^2\theta-\sin\theta^2)=A+B(z^2-x^2-y^2),$$

$$\triangle(A+B(z^2-x^2-y^2))=-2B,\ \ \triangle(\rho_0^2-1)=\triangle(x^2+y^2+z^2-1)=6,$$

从而

$$\triangle\left(A+B(z^2-x^2-y^2)+\frac{B}{3}(\rho_0^2-1)\right)=0.$$

所以由解的唯一性, 得

$$\begin{aligned}u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)&=A+B(z^2-x^2-y^2)+\frac{B}{3}(\rho_0^2-1)\\&=A+B(2z^2-\rho_0^2)+\frac{B}{3}(\rho_0^2-1)=A-\frac{B}{3}-\frac{2}{3}B\rho_0^2+2B\rho_0^2\cos^2\theta_0.\end{aligned}$$

例 3.5 *证明二维调和函数的奇点可去性定理: 若A 是调和函数$u(M)$ 的孤立奇点, 在A 点邻域中成立着*

$$u(M)=o\left(\ln\frac{1}{r_{AM}}\right),$$

则此时可以重新定义$u(M)$ 在$M=A$ 的值, 使它在A 点亦调和.

证: 与三维调和函数的可去奇点定理类似, 设K 是一个以A 为心、R 为半径的圆, 它整个地包含在点A 的那个邻域中. 先求解Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\triangle u_1=0, & \text{圆}K\text{内}\\ u_1|_\Gamma=u|_\Gamma.\end{cases}$$

则$w=u-u_1$ 满足

$$\begin{cases}\triangle w=0, & K\setminus A\\ w|_\Gamma=0, & w(M)=o\left(\ln\frac{1}{r_{AM}}\right).\end{cases}\tag{8}$$

若能证得w 在圆K 内除去A 点均为零, 这就完成了可去奇点定理的证明. 为此, 作函数

$$w_\varepsilon(M)=\varepsilon\left(\ln\frac{1}{r_{AM}}-\ln\frac{1}{R}\right)\tag{9}$$

则显然有

$$\begin{aligned} &\triangle w_\varepsilon(M) = 0, \quad K \setminus A, \\ &w_\varepsilon|_\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

由(8) 的第三式及(9) 知, 可取δ 充分小, 使在以A 为心, δ 为半径的圆周Γ_δ 上成立$|w| \le w_\varepsilon$. 利用极值原理在$r = R$ 和$r = \delta$ 所包围的同心圆环D 内成立$w \le w_\varepsilon(M)$, 固定M, 令$\varepsilon \to 0$, 即得$w(M) = 0$, 而M 可以是K 内除A 的任一点.

例 3.6 证明: 如果三维调和函数$u(M)$ 在奇点A 处附近能表示为N/r_{AM}^α, 其中常数$0 < \alpha \le 1$, 而N 是不为零的光滑函数, 则当$M \to A$ 时它趋于无穷大的阶数必与$1/r_{AM}$ 同阶, 即$\alpha = 1$.

证: 由$u(M) = N/r_{AM}^\alpha$ 知,

$$r_{AM} \cdot u(M) = r^{1-\alpha} N.$$

若$\alpha \ne 1$, 当r_{AM} 趋于零时, 上式极限$\lim\limits_{M\to A} r_{AM} \cdot u(M) = 0$, 由可去奇点定理, A 为可去奇点, 现A 为不可去奇点, 则必有$\alpha = 1$.

例 3.7 试求一函数u, 使其在半径为a 的圆的内部是调和的, 而且在圆周C 上取下列的值:

$$(1)\ \ u|_C = A\cos\varphi; \qquad (2)\ \ u|_C = A + B\sin\varphi.$$

解: (1) 解法一: (观察法) 已知$A_1 r\cos\varphi$ 为调和函数, 又由边界条件知$A_1 = A/a$, 故$u = \frac{A}{a} r\cos\varphi$;

解法二: 用圆的Poisson 公式.

解法三: 用分离变量法.

(2) $u = A + \frac{B}{a} r\sin\varphi$.

例 3.8 试用静电源像法导出二维调和方程在半平面上的狄利克雷问题的解

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad y > 0,$$

$$u|_{y=0} = f(x).$$

解: 与半空间情形类似可得

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0M}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_1M}}.$$

由此得

$$u(x_0,y_0)=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x_0-x)^2+y_0^2}f(x)\mathrm{d}x.$$

注意推导中要用到对二维无穷区域当u 满足$u(M)=O\left(\ln\frac{1}{r_{OM}}\right)$ 及$\frac{\partial u}{\partial n}=O\left(\frac{1}{r_{OM}}\right)$ 时成立

$$u(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\right)-\ln\frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]\mathrm{d}s_M.$$

例 3.9 设区域Ω 整个地包含在以原点O 为心、R 为半径的球K 中, $u(r,\theta,\varphi)$ 是此区域中的调和函数, 其中(r,θ,φ) 表示Ω 中动点M 的球坐标. 设$r_1=\frac{R^2}{r}$, 则点$M_1=(r_1,\theta,\varphi)$ 就是点M 关于球K 的反演点, 从$M(r,\theta,\varphi)$ 到$M_1(r_1,\theta,\varphi)$ 的变换称为**逆矢径变换**或**反演变换**. 以Ω_1 表示Ω 的反演区域, 证明函数

$$v(r_1,\theta,\varphi)=\frac{R}{r_1}u\left(\frac{R^2}{r_1},\theta,\varphi\right)$$

是区域Ω_1 中的调和函数(无穷远点除外).

如果区域Ω 为球面K 以外的无界区域, 则函数$v(r_1,\theta,\varphi)$ 在Ω_1 中除去原点O 外是调和的. 函数$v(r_1,\theta,\varphi)$ 称为函数$u(r,\theta,\varphi)$ 的**凯尔文(*Kelvin*) 变换**.

证: 利用柱坐标系下Laplace 算子的表达式, 由复合函数求导法则可得: 当

$$\triangle_{r,\theta,\varphi}u(r,\theta,\varphi)=0$$

时, 必有

$$\triangle_{r_1,\theta,\varphi}v(r_1,\theta,\varphi)=0.$$

例 3.10 利用凯尔文变换及奇点可去性定理把狄利克雷外问题化为狄利克雷内问题.

解: 求解Dirichlet 外问题

$$\begin{cases}\triangle u=0, & \Omega'\text{内}\\ u|_{\Gamma}=f,\\ \lim\limits_{r\to\infty}=0.\end{cases}$$

作一半径为R 的球K 使其完全落在Ω 内, 将Ω' 关于球K 反演得Ω 内有界区域Ω_1, 其边界为Γ_1, 由上题知

$$v(r_1,\theta,\varphi)=\frac{R}{r_1}u\left(\frac{R^2}{r_1},\theta,\varphi\right)$$

满足

$$\begin{cases} \triangle_{(r_1,\theta,\varphi)} v = 0, & \Omega_1\text{内} \\ v|_{\Gamma_1} = f_1(r_1,\theta,\varphi), \end{cases}$$

其中$f_1(r_1,\theta,\varphi) = \frac{R}{r_1} f\left(\frac{R^2}{r_1},\theta,\varphi\right)$. 注意到

$$\lim_{r_1\to 0} r_1 \cdot v = \lim_{r\to\infty} R\cdot u(r,\theta,\varphi) = 0$$

所以$r_1 = 0$ 是v 的可去奇点, 故可重新定义v 在$r_1 = 0$ 的值, 使v 在Ω_1 内调和.

例 3.11 *证明空间无界区域上的调和函数如在无穷远处趋于零, 那么它趋于零的阶数至少为$O\left(\frac{1}{r}\right)$.*

证: 由上题知, 当$u(r,\theta,\varphi)$ 在无界区域内调和, 在无穷远处趋于零时,

$$v(r_1,\theta,\varphi) = \frac{R}{r_1} u\left(\frac{R^2}{r_1},\theta,\varphi\right)$$

在有界区域Ω_1 内调和(包括原点), 故v 必在Ω_1 内有界, 即存在常数A, 使$|v| \le A$.

由v 的定义得, 当$r\to\infty$ 时有

$$\left|\frac{r}{R} u(r_1,\theta,\varphi)\right| \le A \quad\Rightarrow\quad |u(r_1,\theta,\varphi)| \le \frac{c}{r}.$$

这就证明了u 在无穷远处趋于零的阶数至少为$O\left(\frac{1}{r}\right)$.

例 3.12 *证明处处满足平均值公式(2.11) 的连续函数一定是调和函数.*

证: u 为连续函数, 在Ω 内处处满足平均值公式, 以任一点M_0 为球心, ε 为半径作球K_ε, 使其完全落在Ω 内, 在K_ε 内求解Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \triangle v = 0, & K_\varepsilon\text{内} \\ v|_{\Gamma_\varepsilon} = u|_{\Gamma_\varepsilon}. \end{cases}$$

由Poisson 公式知存在唯一解v, v 是K_ε 内的调和函数, 成立平均值公式, 进而$u-v$ 在K_ε 内亦成立平均值公式, 因此$u-v$ 成立极值原理, 而由v 的定义知$(u-v)|_{\Gamma_\varepsilon} = 0$, 由此得在$K_\varepsilon$ 内$u - v \equiv 0$, 即u 在K_ε 内调和. 由M_0 的任意性即得u 在Ω 内调和.

4　强极值原理、第二边值问题解的唯一性

例 4.1 试用强极值原理来证明极值原理.

证: 若u的最大值在内点M_0达到$u(M_0) = m$. 取$\delta > 0$充分小, 使以M_0为心, 2δ为半径的球落在Ω内.

下面首先证明在以M_0为心, δ为半径的球内必有$u(M) = m$. 否则若存在M_1, 使$u(M_1) < m$, 且M_1与M_0的距离小于δ, 则必存在$0 < \rho < \delta$, 使以M_1为心, ρ为半径的球内均有$u(M) < m$, 而在球面上存在$\widehat{M}$, 使$u(\widehat{M}) = m$. 由强极值原理知, 在$\widehat{M}$点法向导数不为零, 而由函数在内点达到极值的必要条件知在$\widehat{M}$点的任何方向的导数均为零. 由此矛盾知, 若$u(M_0) = m$, 则在以M_0为心, δ为半径的球内$u(M) = m$. 这就说明集合$E = \{M|u(M) = m\}$是开集, 而又由u为连续函数, E必为闭集, 因此$E = \Omega$, 也就是$u \equiv m$. 这也就证明了凡不恒等于常数的调和函数在内部达不到极值.

例 4.2 利用极值原理及强极值原理证明: 当区域Ω的边界Γ满足定理4.2中的条件时, 调和方程第三边值问题

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\bigg|_{\Gamma} = f \quad (\sigma > 0)$$

的解的唯一性.

证: 令u_1, u_2分别为调和方程第三边值问题的解, 则$u = u_1 - u_2$满足

$$\triangle u = 0, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\bigg|_{\Gamma} = 0.$$

若u不恒等于常数, 由极值原理, u的最大值和最小值必在边界上达到. 设在M_0达到极小, 在M_1达到极大. 由强极值原理知

$$\frac{\partial u}{\partial n}(M_0) < 0,$$

再由边界条件知

$$u(M_0) = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial n}(M_0) > 0,$$

知u的最小值大于零; 同理可得$u(M_1) < 0$, 即u的最大值小于零. 由此得矛盾, 所以只能u恒等于常数. 再由边界条件可得$u \equiv 0$, 唯一性得证.

例 4.3 说明在证明强极值原理中, 不可能作出一个满足条件(1)和(3)的辅助函数$v(x, y, z)$, 使它在整个球$x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$内满足$\triangle v > 0$.

证: 如$v(x,y,z)$ 在整个球内($r \le R$) 满足$\Delta v > 0$, 则必有v 的最大值只能在区域的边界上达到, 而由条件(3) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} < 0$, v 沿r 方向是单调递减的函数, 极小值必在边界上达到, 由条件(1) 知v 在$r = R$ 上为零, 所以$v \equiv 0$, 这与$\Delta v > 0$ 矛盾.

例 4.4 对于一般的椭圆型方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0,$$

假设矩阵(a_{ij} 是正定的, 即对任意给定的实数$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, 成立

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda_i\lambda_j \ge \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \quad (\alpha\text{为正的常数}),$$

又设$c \le 0$, 试证明它的解也成立着强极值原理. 也就是说, 如果$u(M)$ 在球$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 < R^2$ 内满足上述方程, 在闭球$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \le R^2$ 上连续, 在球面上的一点M_0 取到非正的最小值, 且在该点沿ν 方向的方向导数$\frac{\partial u}{\partial \nu}$ 存在, 其中ν 与球的内法线方向成锐角, 则在M_0 点有$\dfrac{\partial u}{\partial \nu} > 0$.

证: 设u 在M_0 点达负的最小值, 作一半径为r_0 的小球K^*, 其圆心在O 与M_0 的连线段上, 且与$K: \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2$ 相切, K^* 内成立$u(M) < 0$. 以K^* 的球心$\overline{O}$ 为新坐标原点, 新的坐标记为$\overline{x}_i$, 且$\overline{r}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x}_i^2$. 由于$u$ 在球K 内满足方程知在K^* 内成立

$$\begin{aligned} L_1 u &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - cu \\ &= Lu - cu \le 0. \end{aligned}$$

经坐标平移后在K^* 内成立

$$\overline{L}_1 u = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a}_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{x}_i \partial \overline{x}_j} + \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_i \frac{\partial u}{\partial \overline{x}_i} \le 0.$$

作辅助函数

$$v(M) = \mathrm{e}^{-ar_0^2} - \mathrm{e}^{-ar^2}$$

则v 满足: (1) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} > 0$, (2) $v|_{r=r_0} = 0$, (3)

$$\overline{L}_1 v = -\mathrm{e}^{-ar^2}\left[4a^2\sum_{i,j=1}^{n}\overline{a}_{ij}\overline{x}_i\overline{x}_j - 2a\sum_{i=1}^{n}(\overline{a}_{ii} + \overline{b}_i\overline{x}_i)\right].$$

记D 为以$\overline{O}$ 为心, r_0 为半径的球与$r_0/2$ 为半径的球之间的区域, 则可以取a 充分大使在D 内$\overline{L}_1 v < 0$. 又由M_0 为K^* 内负的极小点, 可取ε 充分小, 使函数

$$w(M) = u(M) + \varepsilon v(M)$$

在D 的内边界$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i^2 = \left(\frac{r_0}{2}\right)^2$ 上成立$w > u(M_0)$.

由定义, 在同心球区域D 内成立$\overline{L}_1 w = \overline{L}_1 u + \varepsilon\overline{L}_1 v < 0$, 所以$w$ 的最小值必在D 的边界上达到, 而在D 的外边界上$w = u(M) \geq u(M_0)$, 在内边界上亦成立$w > u(M_0)$, 所以w 在M_0 点达极小值, 应成立

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(M_0) \geq 0.$$

注意到$\dfrac{\partial v}{\partial \nu} < 0$, 从而有

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(M_0) = \frac{\partial w}{\partial \nu}(M_0) - \varepsilon\frac{\partial v}{\partial \nu}(M_0) > 0.$$