微积分是算术

作为关于高的故事(以$0.\dot{9}$表示)

林群

linq@lsec.cc.ac.cn

http://blog.sciencenet.cn/blog-1252-481572.html

关键词　无限　$0.\dot{9}$

几个原则

1.有两种版本. 一是说书版，暴露思想活动. 另一是翻译版，将思想翻译成符号. 一唱一和.

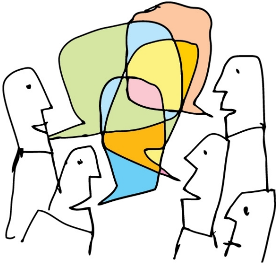
2.思想与符号的关系，如同瓮与鳖. 前者建瓮，后者捉鳖. 即先想好，后施行，有的放矢，避免瞎碰，方可事半功倍.

3.少则多. 留下最少或非要不可的. 主线紧紧围绕着千古难题圆周长的破解.

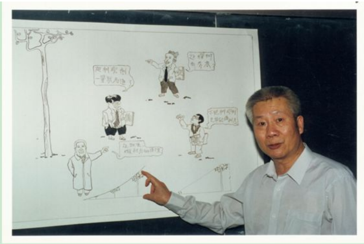
4.取材必须是公众搞得明白，自己也不费劲.

5.最后也是最重要的：别以为高级的数学必定是复杂的数学，永远记住“用最简单的方法表述概念及概念的联系，才是最有价值的事. 但是一种简单的数学关系，可能经历了长期与凌乱的研究过程才被发现”(摘自美国科学促进会《21世纪科学教育书系》).

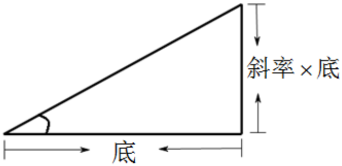
一. 一天，游客参观一棵老树. 导游说：这棵树年年长高，有工程人员来测高. 游客问：树高怎么测？有的说，把树砍倒来量，有的说，爬到树顶来量



我学过中学三角（正切公式），立刻想到按斜率测高的方法



人民日报1997-08-06



三元素:高，斜率，底

所以，测高不必砍树或爬树.

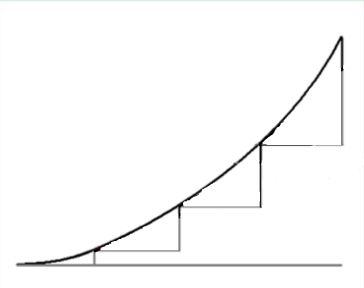
三角学，或斜率，有用吧？

二、又一天，爬山去

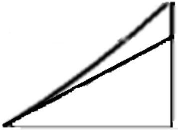
由直边三角形进到曲边三角形，带来新的灵感，唤起了牛顿-莱布尼茨公式.

登山首先关心两件事：一是山高，一是斜率（或陡度）. 树高按斜率测，那么山高能不能也按斜率测呢？区别：这里山坡是曲线，每一点的斜率（或方向）都在变，怎么计算呢？

让山坡看成一段一段组成

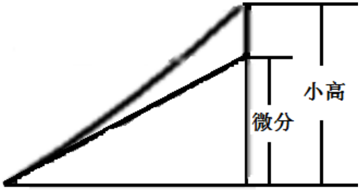


每一段则按起点附近最靠近它的一条直线段

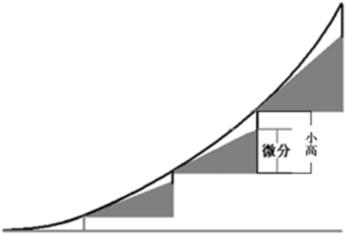


（先假设存在，称为切线. 什么是“最靠近”或“切线”？暂时有点模糊，以后再定义）来取代.

或者说，每一段曲边三角形（绝对真理）将按起点相切的直边三角形（相对真理）来取代. 于是，前者的高，称为小高，将按后者的高，称为微分，来取代



那么，全高将按微分相加来取代



为少说些话，暂设山坡单调上升（非单调时，要做一点修改）.

沿着图想到什么？如果以上切线段的确最靠近曲线，那么，随着底缩小，微分应该越来越接近于小高.

“最靠近”“越来越接近”怎么量化呢？看局部相比，$\dfrac{\text{微分}}{\text{小高}}$，以及整体相比，$\dfrac{\text{微分相加}}{\text{全高}}$：比例应该越来越接近于1（亦即绝对真理应该与相对真理相吻合），即

$$\text{点点}\frac{\text{微分}}{\text{小高}} = 0.999\cdots, \quad \frac{\text{微分相加}}{\text{全高}} = 0.999\cdots \tag{1.1}$$

随着底缩小，在不断添9.值得推销.

对抛物线做数据实验(设微分与高已知)

分割	2	4	10	20	100
$\frac{\text{微分相加}}{\text{全高}}$	0.5	0.75	0.90	0.95	0.99

无论添多少9，都可以做到，直至 $0.\dot{9}$，提到1.

于是(1.1)右式的分子变成分母，由此定义

$$\text{无限项微分相加} = \text{全高} \tag{1.2}$$

得到有限的答案：一条直线段的长.

本是无限项的加法，本来有点模糊，但靠（1.1）式或$0.\dot{9}$来量化，形象，令人放心，值得推销.

（1.2）式的意义：如果计算无限条微分，只要计算一条全高，使微分的无限相加成为可能.

以上动机来自图形.先想到(1.1)式，再验证,瓮中捉鳖，只要几分钟，简单到极度（见第8讲）.但传统论证需要一学期.成本如此悬殊，由一学期降到几分钟，这就是按高度比，(1.1)，看误差，所带来的明显优势与意外收获.所以亮点突出，应该得到认可，值得推销.

(1.2)式又读为

$$\text{微分的积分} = \text{全高}$$

此即牛顿-莱布尼茨公式. 没有想到的：托尔斯泰的“战争与和平”正是应用这个原理，解读人类历史.原话很长，这里只摘出最后三句：“只有采取无穷小的观察单位——历史的微分，并且运用积分的方法（就是得到这些无穷小的总和），我们才有希望了解历史的规律.”

小结

欲计算无限个数据相加，只需验证比例

$$\frac{\text{无限个数据相加}}{\text{有限的总量}} = 0.\dot{9}$$

于是定义

$$\text{分子} = \text{分母}$$

得到有限的答案.

更简单明了的例子，参考以后的级数(2.3).

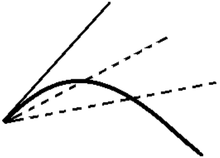
三. 不放心

上述新定义：起点附近最靠近曲线的那一条直线，恰好对应到教科书中老定义：在起点的切线. 事实上，由(1.1)左式改头换脸

$$\frac{\text{切线斜率}}{\text{弦的斜率}} = \frac{\frac{\text{微分}}{\text{底}}}{\frac{\text{小高}}{\text{底}}} = \frac{\text{微分}}{\text{小高}} = 0.999\cdots \tag{1.3}$$

于是，当底不断缩小，9 不断增加，弦（或割线）不断接近于切线，由此定义或存在

弦(或割线)的极限 = 切线



于是由无限条（弦或割线）回到一条（切线）.

这本是 $\frac{0}{0}$ 的除法，本来有点模糊，但靠(1.3)式或 $0.\dot{9}$ 来量化，形象，令人放心，值得推销.

满足条件(1.3) 的曲线称“可微”.这是定义或假设，要证明的只是(1.1)右式.

小结

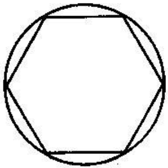
原始动机求山高，副产品却是无限的算术：无限项的相加公式，(1.2)，以及 $\frac{0}{0}$ 的相除公式，(1.3). 所以，微积分又称无限的算术.

微积分原理大功告成. 剩下只是应用.

四. 更好理解的案例

在任意曲线中，圆最美好，也更好理解.

求圆周长.历史上有割圆术，求内接多边形周长



随着边数增加，弦长就越来越接近于弧长.

怎么量化呢？看局部相比,$\dfrac{\text{弦长}}{\text{弧长}}$，以及整体相比,$\dfrac{\text{弦长相加}}{\text{圆周长}}$：比例越来越接近于1, 即

$$\frac{\text{弦长}}{\text{弧长}} = 0.999\cdots \Rightarrow \frac{\text{弦长相加}}{\text{圆周长}} = 0.999\cdots \quad (1.4)$$

左式即 $\dfrac{\text{弦长}}{\text{弧长}} = \dfrac{\sin x}{x} = 0.999\cdots$ 当 x 不断缩小（这里的 x 值,不用角度但用弧度）. 数据实验

正n边形	周长	周长比
6	6	0.9549296586
7	6.0743723476	0.9667663853
8	6.1229349178	0.9744953584
12	6.2116570824	0.9886159295
14	6.2305861508	0.9916285843
16	6.2428903046	0.9935868512

于是 (1.4) 右式的分子变成分母，由此定义或存在

$$\text{无限条弦长相加} = \text{圆周长}$$

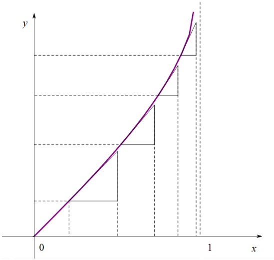
右边是未知数，所以说不出最终值或真值.

根据(1.2)式，山坡的各项微分相加，对应到它的高，即一条直线段的长.这就是由无限条(微分)回到一条(山高).

本讲不去求高，但应用到求山坡长，或曲线弧长.历史上，弧长本是无限条切线段（或弦）的长来相加

这样的定义说不出最终值或真值. 除非这些切线

长能翻山越岭，对应到上一讲说的某一山坡的切线高（即微分）

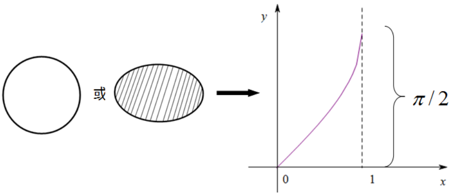


从而，加起来便对应到一条直线段的长，那就是最终值或真值. 这是绝技：把原来曲线的切线长，对应到另一条曲线的切线高.但由牛顿等实现了.

以圆周长，圆面积以及椭圆面积（对应于自

然界，如测地，航海，天文）为案例，它们的确都翻山越岭，对应到下图中反正弦山坡（正好是单调上升）的高（一条电线杆的长），记 $\frac{\pi}{2}$：

$$\frac{\text{圆周长}}{2\times\text{半径}}=\frac{\text{圆面积}}{\text{半径}^2}=\frac{\text{椭圆面积}}{\text{长轴}\times\text{短轴}}=\pi \qquad (2.1)$$



手镯或面包拉直或挤压成"反正弦电线"杆

这也叫做三连贯公式.右边这个高，或 π，又表示

成一个有规律的级数

$$\pi = 8(\frac{1}{3} + \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{9\times 11} + \cdots) \qquad (2.2)$$

从而看到周长与面积的真值，或绝对真理，是什么样子. 它包含有这一个数的任何一位（如3.1,3.14,3.14159），实现了真善美.

没有想到的：三个不同案例会对应到同一个反正弦山坡，连锁反应.

再次遇到无限：级数 (2.2) 中无限项相加，本来有点模糊，它应如何定义？再次推销$0.\dot{9}$，即复制老办法 (1.1)，即换算为$0.\dot{9}$, 但更简单明了：比例

$$\frac{8(\frac{1}{3}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{9\times 11}+\cdots)}{\pi}=0.999\cdots \tag{2.3}$$

随着项数增加，在不断添9：无论添多少9，都可以做到，直至 $0.\dot{9}$ ，提到1. 于是分子变成分母，得到有限的总量. 如此定义无限级数，形象，令人放心，值得推销.

比较：教科书定义一个级数

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

收敛到一个有限的总量 a ，指不等式

$$\exists a : |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N$$

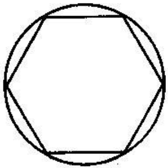
太抽象. 如今，当 $a \neq 0$,指比例

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots}{a} = 0.999\cdots$$

随着项数增加，在不断添9，形象，令人放心.

所以，以$0.\dot{9}$来换算$\varepsilon - N$, 值得推销.

微积分不神秘，它让人们生活在追求真理的公式里. 以软件画圆为例



就是使比例

$$\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}} = \frac{\text{多边形周长}}{\text{圆周长}} = 0.999\cdots$$

不断添9，越来越圆.

又以金的纯度为例，只有十足金(一个9，900‰)，百足金(二个9，990‰)，千足金(三个9，999‰)，万足金(四个9，999.9‰)，也是使比例

$$\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}} = \frac{\text{市场金}}{\text{赤金}} = 0.999\cdots$$

不断添9，越来越纯.

人的认识亦此，只有90%正确，99%正确，99.9%正确，99.99% 正确，也是使比例

$$\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}} = \frac{\text{认识}}{\text{真理}} = 0.999\cdots$$

不断添9，越来越正确.

人们天天学习，也是天天加9，不断提高.

总结

我们生活在一个有统一比例数的哲学公式里

$$\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}} = 0.999\cdots \tag{2.4}$$

这是什么意思?左边不看成一个数,而看成一个求比例的过程,即中间必经多道坎,如 $0.9, 0.99, 0.999, \cdots$ ，直至 $0.\dot{9}$ ，提到1.

讲来讲去，反复推销 $0.\dot{9}$.

继续推销$0.\dot{9}$.

无限是最迷人的哲学话题，更是微积分的预备知识.

在中国，它最早存在于庄子哲学.

世界是变化不停的.庄子设计一种最简单或理想的变化.

一尺之锤,日取其半,万世不竭. 数据实验看它怎么变化

次数	剩下	取走
1	0.5	0.5
2	0.25	0.75
3	0.125	0.875
4	0.0625	0.9375
5	0.03125	0.96875
6	0.015625	0.984375
7	0.0078125	0.9921875

生活化:某物日取其半,如每日取款50%, 如每日吃掉蛋糕的一半.

每日吃掉一半,即每日剩下一半. 结果,不断剩下一半,剩下就越来越少,吃掉越来越多,越来越接近于1(记$0.\dot{9}$).

或者说,统一到一个公式 (2.4)

$$\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}}=\frac{\text{吃掉加起来}}{\text{全部}}=\frac{\frac{1}{2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots}}{1}=0.999\cdots$$

或说愚公登山：每日登一半，即每日剩下一半. 结果，不断剩下一半，剩下就越来越少，登上越来越高，越来越接近于1(记$0.\dot{9}$).

举一反三.

有的树每日落叶10%.数据实验看它怎么变化

次数	剩下	掉落
1	0.9	0.1
2	0.81	0.19
3	0.729	0.271
4	0.6561	0.3439
5	0.59049	0.40951
6	0.531441	0.468559
7	0.4782969	0.5217031
8	0.43046721	0.56953279

13	0.2541865829	0.7458134171
14	0.2287679246	0.7712320754
15	0.2058911321	0.7941088679
16	0.1853020189	0.8146979811
17	0.166771817	0.833228183
18	0.1500946353	0.8499053647
19	0.1350851718	0.8649148282
20	0.1215766546	0.8784233454
21	0.1094189891	0.8905810109
22	0.0984770902	0.9015229098

每日落叶10%,即每日剩下90%. 结果,不断剩下90%, 剩下就越来越少,落叶越来越多,越来越接近于1(记$0.\dot{9}$).

或者说,统一到一个公式 (2.4)

$$\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}} = \frac{\text{落叶加起来}}{\text{树叶数}}$$

$$= \frac{0.1 + 0.9 \times 0.1 + 0.9^2 \times 0.1 + \cdots}{1} = 0.999\cdots \tag{2.5}$$

这里,9出的慢,到第22次才出第一个9.

炼金,每次提升90%的纯度.数据实验看它怎么变化

次数	杂质	金的纯度
1	0.1	0.9
2	0.01	0.99
3	0.001	0.999
4	0.0001	0.9999
5	0.00001	0.99999

每次提升90%,即每次剩下杂质10%. 结果, 不断剩下杂质的10%, 杂质就越来越少,纯度越来越高, 越来越接近于1 (记$0.\dot{9}$). 或者说,统一到一个公式(2.4)

$$\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}} = \frac{\text{金的纯度}}{\text{赤金纯度}}$$
$$= \frac{0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots}{1} = 0.999\cdots \text{(2.6)}$$

以上案例串联一起,结论都服从同一个哲学公式,(2.4).

以上案例各不相同,却有着惊人相似,都有一个共同特点:不断重复,每次都以一定比例进行,最后有$0.\dot{9}$.

所以$0.\dot{9}$是共性,也可以说是不变量.通过以上反复循环,成为习惯,条件反射或固定思维. 于是以它贯穿始终, 推销到底.

百闻不如一见,不如自己设计一个案例.

作业:例如日取20%或日取80%, 比较出9 的快慢.

以上理想案例,分母或

$$\text{绝对真理} = 1, \text{分子} = \text{等比级数}$$

下面升级到另一案例.大家还记得$\sqrt{2}$吗?有近似值,$1.4, 1.41, 1.414, \cdots$ （已经不再是等比级数了）,只是相对真理. $\sqrt{2}$ 才是绝对真理, 但为未知数. 当它经过平方(即2)转变为已知数,才是绝对真理的更好选择.这时, 相对真理也要配成平方.结果，公式(2.4) 换脸为

$$\left(\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}}\right)^2 = 0.999\cdots$$

详见下一附录.

人类追求真理的另一个故事，求 $\sqrt{2}$，再次遇到无限.

毕达哥拉斯门生由勾股定理得知,一个单位方块的对角线长的平方等于2. 若给对角线长起名叫, $\sqrt{2}$. 那么,

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

这个学派崇信万物皆数,那么这个对角线长是一个什么数.

猜猜看,它是1或是2? 都不是,但肯定在1与2之间. 那么是1.1 1.2,1.3,1.4,1.5,⋯⋯?都不是,但肯定在1.4 与1.5 之间. 那么1.41或是1.42? 都不是, 但肯定在1.41与1.42 之间. 这样,一位一位产生小数，你想算出多少位都可以,永无休止.

这时,绝对与相对真理应该选什么，明摆着.而且，它们之间什么关系，也是意料的到：它们的比例将按公式(2.4) 来变化. 数据试验

$$\frac{1.4}{\sqrt{2}} \geq \frac{1.4}{1.5} = 0.9333$$
$$\frac{1.41}{\sqrt{2}} \geq \frac{1.41}{1.42} = 0.993$$
$$\frac{1.414}{\sqrt{2}} \geq \frac{1.414}{1.415} = 0.9993$$
$$\cdots$$

即右边不断添9，无论要添多少9，都可以做到. 但左边小于1，由此知道相对与绝对真理越来越近，还知道相差多少.

或经过平方,也可以计算:

$$\left(\frac{1.4}{\sqrt{2}}\right)^2, \left(\frac{1.41}{\sqrt{2}}\right)^2, \left(\frac{1.414}{\sqrt{2}}\right)^2, \cdots, \nearrow 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1.5}\right)^2, \left(\frac{\sqrt{2}}{1.42}\right)^2, \left(\frac{\sqrt{2}}{1.415}\right)^2, \cdots, \nearrow 1$$

数据实验

不足近似	1.4	1.41	1.414	1.4142
比例	0.98	0.99405	0.999698	0.99998082

过剩近似	1.5	1.42	1.415	1.4143
比例	0.889	0.9919	0.9988887	0.99987777

即近似值的平方越来越接近于2.

这里出现相对真理有不足与过剩两种近似(相对称),不一定都分布在分子上,拓广了庄子的思路.

为了规范化或统一,今后永远保持比例≤ 1,养成习惯,成为条件反射,或潜规则.

总之,公式(2.4)换脸为

$$\left(\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}}\right)^2 \left(\text{或}\left(\frac{\text{绝对真理}}{\text{相对真理}}\right)^2\right) = 0.\dot{9}$$

所以, $\sqrt{2}$ 也是填空题,只要填上相对真理($\sqrt{2}$ 的不足或过剩近似).

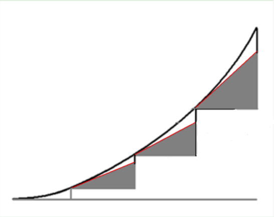
既然第2讲声称：圆周长能表示成级数，类似有

作业：将 $\sqrt{2}$ 表示成级数.提示：查网.

作业:分别用高中课本有的二分法与牛顿法求 $\sqrt{2}$, 比较出9的快慢.

微积分内容，一是求弧长，二是求面积. 附录只介绍通用但非特效的方法.

1. 动机来自图形：求弧长利用切线



它诉说着求弧长的思想活动:切线长,小弧长

归结到求斜率，构造相切的三角形，按勾股定理求切线长.

这时，绝对与相对真理如何选？

几乎重复公式(1.1)或（1.4）的思想活动.

沿着图想到什么?以下每步尽在意料中:

看局部相比，$\frac{\text{切线长}}{\text{弧长}}$，以及整体相比，$\frac{\text{切线相加}}{\text{全弧长}}$:比例越来越接近于1，即

$$\frac{\text{切线长}}{\text{弧长}} = 0.999\cdots \quad \frac{\text{切线相加}}{\text{全弧长}} = 0.999\cdots$$

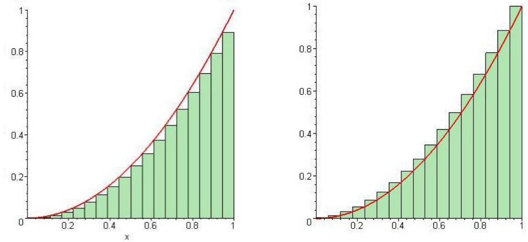
由此定义或存在

$$\text{无限条切线长相加} = \text{全弧长} \tag{2.7}$$

（当底无限缩小）. 这种通用定义只说明存在.全弧长还是未知数,说不出最终值或真值.

2. 求面积利用上下和

求一般曲线的面积比,统一使用下和与上和



$$\frac{\text{下和}}{\text{面积}} = 0.\dot{9} \quad \text{或} \quad \frac{\text{面积}}{\text{上和}} = 0.\dot{9}$$

这里假设下和与上和存在,且易求.由此定义或存在

$$\text{面积} = \text{无限项的下和或上和} \tag{2.8}$$

（当分割无限加密）.曲边面积是未知数,仿 $\sqrt{2}$,可代以上和

$$1 \geq \frac{\text{下和}}{\text{面积}} \geq \frac{\text{下和}}{\text{上和}} = 0.\dot{9}$$

从而说出下和跟最终值或真值相差多少.

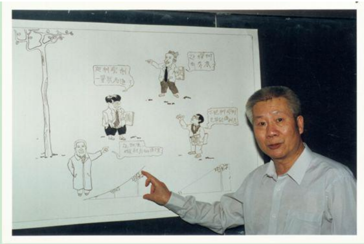
作业：用上下和方法求圆面积.

弧长或面积的上述定义，适用于多种图形，通用但非特效：能伤十指（只有近似值），不能断一指（说不出最终值）.

所以，以后，第6讲，我们又将上述通用定义，(2.7) 的切线长相加,或(2.8)的下和,脱胎换骨，对应到公式(1.2)的微分相加，得到一个山坡的高，即一条直线段的长.所以又由无限条（微分）回到一条（全高）.

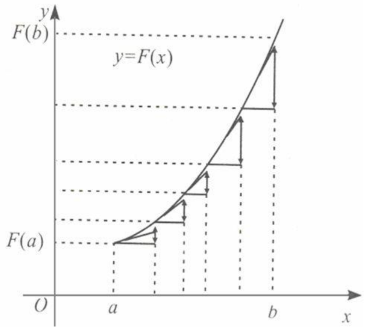
以上转化虽然有点矫揉造作，是绝技，却简洁有效：得到最终值或真值，发生突变.

总结：原来微积分跟着最后一张图走.天机泄露在《光明日报》1997-06-27及《人民日报》1997-08-06,由求树高得到启发:



图解微积分：由求树高到求山高

以后（1999-01）又写成书.



张景中《不用极限的微积分》(2012)图16-2: 林群模型

注:在外人看来,第1讲求高有点突然或矫揉造作，不如求弧长更合情理?

回应:求高行为乍一看有点造作,但若你习惯了求弧长,再跨出求高这一步,便有据可依,只是改头换脸或旧翻新，渐变到突变.

下学期伏笔: 人口预测.若一家一户做加法,算了一年还不够准,但按微积分,一个人花几分钟,就可以算出更准.这也是没有想象过的,究其原因:是否无限(如13亿)反而会比有限(如1亿)更好算？悖论?

第1讲假设：山坡单调上升. 这正是第2讲遇到的反正弦曲线（或抛物线）情形. 这时, 微分 $\le$ 小高，属于不足近似.

本讲转到一般曲线.若不是单调，可能遇到微分 $\ge$ 小高（即过剩近似）.

此时有一个补充，约定或潜规则：公式(1.1)中比例必须颠倒为 $\frac{\text{小高}}{\text{微分}}$， $\frac{\text{全高}}{\text{微分相加}}$，以便坚持比例，才有 $0.\dot{9}$.

具体来说，当底越来越小，不断计算比例 $\frac{\text{微分}}{\text{小高}}$，若 比例 ≤ 1，则继续下一步计算；若比例 > 1，则计算 $\frac{\text{小高}}{\text{微分}}$，然后将底缩小，进行下一步计算.这样所有比例统一为 ≤ 1，与

$$\frac{\text{相对真理}}{\text{绝对真理}} = 0.999\cdots$$

达成一致.

这样合起来，只要有: 比例 $\to 1$ ，就能统一归结到: 比例 $= 0.\dot{9}$ ，只是公式(1.1)的比例可能颠倒为 $\frac{\text{小高}}{\text{微分}}$ ， $\frac{\text{全高}}{\text{微分相加}}$.

受公式(1.4) 启发，还应该有(1.1) 的

左式 $\Rightarrow$ 右式

$$\text{点点}\frac{\text{微分}}{\text{小高}}(\text{或}\frac{\text{小高}}{\text{微分}}) = 0.999\cdots \Rightarrow$$

$$\frac{\text{微分相加}}{\text{全高}}(\text{或}\frac{\text{全高}}{\text{微分相加}}) = 0.999\cdots \tag{3.1}$$

或合起来

$$\frac{\text{微分}}{\text{小高}}\text{或可微} \to 1 \Rightarrow \frac{\text{微分相加}}{\text{全高}} \to 1 \qquad (3.2)$$

主要怎么想到这一点，证明不是问题.只要想得到,没有证不到.见第8讲.

由公式(3.1)或(3.2),当底无限缩小,定义

$$\frac{\text{无限个微分相加}}{\text{全高}}\left(\text{或}\frac{\text{全高}}{\text{无限个微分相加}}\right) = 0.\dot{9}$$

或

$$\text{微分的积分} = \text{全高} \tag{3.3}$$

得到有限的答案.这样的定义，不仅说明存在，没有想到的：可以包含有最终值或真值.

天机泄露：原来积分就是一个个微分相加，或全高.公式(3.3)也意味着微分的积分回到自身，或积分是微分的逆运算.

到此，只用到白话.原来微积分也可以换成民间说书,以前没有想象过吧？

以上是微积分怎么想以及怎么说,下面转到怎么写.

有了白话,再跳到符号,只是做翻译或换脸,好像瓮中捉鳖,留为作业，也是为了考研者做准备.

这大概就是Halmos的教学法:据说他在第1讲就抛出十多道作业,让学生自己钻研,期末交卷.

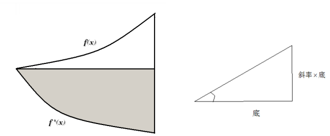
在老师辅导下,将曲线翻译成函数 $f(x)$ (定义在区间 $[a,b]$), 公式(1.3)中切线斜率翻译成 $f'(x)$ 导数,微分翻译成 $f'(x)\Delta x$ （正弦公式）,则(1.3)翻译成

$$\frac{f'(x)}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} = \frac{f'(x)\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)} = 0.999\cdots$$

无限项微分相加则翻译成微分的积分, $\int_a^b f'(x)dx$,
最后, 新定义(1.2)翻译成基本公式

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \tag{4.1}$$

太专业了?那就换脸:



这不是原汁原味、货真价实的牛顿-莱布尼兹公式吗？没有走样或偷工减料吧？

天机泄露：基本公式(4.1) 缩小到每一小段,就是正切公式.原来基本公式（或微分方程）由正切公式（或平面三角）拼接而成.所以有一本书，就叫《微分方程与平面三角》(2005).

面积的通用定义(2.8)翻译(或换脸)成积分

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4.2}$$

暂时只有存在性.

弧长的通用定义(2.7),翻译(或换脸)成积分

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \tag{4.3}$$

暂时只有存在性.

天机泄露：弧长公式(4.3)，缩小到每一小段,就是勾股公式.原来弧长由勾股公式拼接而成.

绝技：若公式(4.2)(4.3)中被积函数能写成导数形式,根据新定义(4.1), 事情起了突变：面积或弧长脱胎换骨，变成另一函数的高. 不仅说明存在而且可知.

注意:有了关键符号,斜率或导数, $f'(x)$,才解决了求高图中微分如何求的困惑;有了关键模式(4-1),积分不仅存在而且可知.

到此,一学期微积分(就是一定理,(4.1)) 学完了!

1.微积分教科书按 $\varepsilon-\delta$ 的方法处理极限，本书换算为 $0.\dot{9}$，更形象与放心，更值推销.

作业：试将 $0.\dot{9}$ 翻译成 $\varepsilon-\delta$，即两者互通.

2.对于微积分用户，除了必须搞明白微分或导数）与积分的概念与定义，还必须会计算初等函数的导数与积分.

根据基本公式(4.1)，求积分又归结到求导数.归根结底，就是计算初等函数的导数.

求导数有神法：要计算所有初等函数的导数，只要计算极少数几个初等函数的导数，它们是

$$f(x) = x^n(\text{当}n\text{为整数}), \sqrt{x}(x > 0), \sin x, \frac{1}{x}$$

作业1:求x^2的导数，$(x^2)' = 2x$.

提示：割线斜率$= \frac{\text{小高}}{\text{底}} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x + h$

故$\frac{\text{导数}}{\text{割线斜率}} = 1 - \frac{h}{2x+h} = 0.999\ldots$，当$x > 0$.

作业2：求$\sin x$的导数. 先求$(\sin x)'(0) = 1$.

提示：割线斜率$= \frac{\sin h - \sin 0}{h} = 1 - \frac{h - \sin h}{h}$

以及$\frac{h-\sin h}{h} < |h|$，故$\frac{\text{割线斜率}}{\text{导数}} = 0.999\ldots$.

再求当$x \neq 0$时, $(\sin x)' = \cos x$.计算几乎一样, 只是长些

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x - \cos x\frac{h-\sin h}{h} - \sin x\frac{1-\cos h}{h}$$

$$\frac{\text{割线斜率}}{\text{导数}} = 1 - \frac{h-\sin h}{h} - \tan x \cdot \frac{1-\cos h}{h} = 0.999\ldots.$$

作业3：求导数$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$, 当$x \neq 0$.

作业4：求导数$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 当$x > 0$.

作业5：求反正弦函数的导数

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{5.1}$$

$$\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})' = \sqrt{1-x^2} \qquad (5.2)$$

（这里$y=\arcsin x$ 的值不用角度但用弧度表示）

作业6:熟悉求导运算法

则,$(f+g)' = ?$,$(f\cdot g)' = ?$

$(\frac{f}{g})' = ?$, 以及复合函数求导法则,$[f(g(x))]' = ?$

于是,由少数几个初等函数的导数,得出所有初等函数的导数.神不神？

积分的处境相反. 更多初等函数不能写成另

一初等函数的导数，所以只能争取扩大求积分的范围,但大片处在阴影之中.

作业7:熟悉求积分法则:分部积分以及换元法则.

数学家喜欢比武

大学课本将导数求零点作为求极值的普适方法.华罗庚与张景中不服，曾用中学特殊技巧（不用导数）挑战大学方法（用导数）.结论：大学课本极值题目，可以用中学技巧解出．但大学方法有普适性，无需中学技巧．即使中学生，也喜欢用大学方法.

考倒人还不容易.你可以造一个很长很烦很怪的初等函数，求出导数.然后将前者藏起来，问后者的积分是什么.

坚持一下：将基本公式（4-1）陆续使用,量变结果,得出泰勒展开式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots$$

这里无限项相加有点模糊，它应如何定义？
复制公式(2.3), 即换算为$0.\dot{9}$: 比例

$$\frac{\text{各阶微分相加}}{\text{小高}}=\frac{f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots}{f(x)-f(0)}=0.999\cdots$$

随着阶数增加，在不断添9：无论添多少9，都可以做到，记 $0.\dot{9}$ ，从而提到1. 于是分子变成分母. 但是，根据第3讲的约定或潜规则，如果分子 $>$ 分母 ，则要颠倒分子分母，以保持比例小于1.

再做一个

作业8：求反正切函数的展开式

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, (|x| \le 1) \quad (5.3)$$

提示：由幂级数 $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$ 推出. 令 $x = 1$, 即得.

重中之重

泰勒公式，如(5.3)，是微积分的重中之重.为什么？中学时已经知道一些初等函数的最重要性质，但不曾回答怎样计算它们.如今，通过公式(5.3)等提供了答案.这为应用中大多数计算问题开辟了道路，所以是重中之重.

比武

我们只能拿同一块试金石,公众有基础的题目，如周长或面积,来对比新旧两种定义, 看胜负如何?

通用定义，公式(2.7)(2.8),只是过程，不包含有真值,败下阵来.那么,转为新定义，(4.1)，便能包含有真值？这才是对新定义的考验.

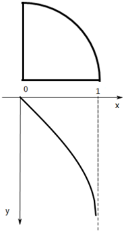
难题1:对最美的圆(试金石)求周长, 将通用定义(2.5)，或(4.3)，转变成新定义(4.1).

提示:单位圆在第一象限内表示为则根据通用定义，或(4.3), 第一象限内周长定义成积分

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx &= \int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{aligned}$$

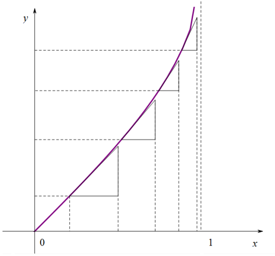
再利用作业(5.1)，将右边转化到微分

$$\int_0^1 (\arcsin x)'dx = \arcsin x\big|_0^1 = \arcsin 1 \qquad (6.1)$$



结果,第一象限内周长转变成反正弦函数,$\arcsin x$, 在区间$(0,1)$的高.正好是半平角的弧度制：圆心角= 单位圆弧长.

回放公式(2.1)，终于明白了：圆周长如何通过切线长的公式(4.3)，转化为反正弦函数的微分与山高,(6.1).



这是绝技，由图形看不出. 几何不是万能.

注：仔细说,公式(6.1)的积分上限应是$1-\varepsilon(\varepsilon>0)$, 于是积分值为$\arcsin(1-\varepsilon)$. 再让$\varepsilon\to 0$, 得$\arcsin 1$.

可贵的是，由单位圆过渡到半径r,只要通过变换,$x=rt$.

作业

$$\frac{\text{积分}}{\text{半径}} = \arcsin 1$$

（即弧度制:圆心角 $= \frac{\text{弧长}}{\text{半径}}$）.所以

$$\frac{\text{圆周长}}{2\times\ \text{半径}} = 2\arcsin 1$$

问题集中到: 这一个高,$\arcsin 1$, 是一个什么数?

利用$\arcsin 1 = 2\arctan 1$以及展开式(5.4),最终将高表示成公式

$$\arcsin 1 = 4\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5\times 7} + \frac{1}{9\times 11} + \cdots\right) \qquad (6.2)$$

总结:新定义(4.1)+泰勒展式（(4.1)的量变）导致公式(2.1)

$$\frac{\text{圆周长}}{2\times\text{半径}} = 2\arcsin 1 = 8(\frac{1}{3}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{9\times 11}+\cdots)$$

说出了真值.

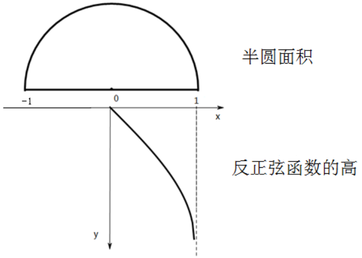
有人会问:一个数,只要知道几位就够用了,何苦追求真值? 但人类追求真理或真善美，不仅满足于实际需要,还要搞明白真值到底是什么.这也是破案的欲望.

连锁反应

难题2:求圆面积,将通用定义(2.8),或(4.2),转变成新定义(4.1).

提示:单位圆在上半平面表示为 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,则根据定义(2.8),上半平面圆面积定义成积分

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})'dx \\ &= \arcsin 1\end{aligned}$$



这里利用了作业(5-2).

可贵的是，有

作业: 当圆半径=r,令$x = rt$,则

$$\frac{\text{圆面积}}{\text{半径}^2} = 2\arcsin 1$$

连锁反应

难题3(作业):

$$\frac{\text{椭圆面积}}{\text{长轴} \times \text{短轴}} = 2\arcsin 1.$$

总结:无论哪一个难题,圆周长,圆面积或椭圆面积,都统一到反正弦曲线的高

$$\arcsin 1\text{是一个什么数?}$$

数学多么神秘.

正是：牛刀杀鸡,一刀两断.

总之,比武结果,新定义战胜了通用定义.这是人类千年来在追求圆真理的道路上,取得可比的进步.

除了体育,别的行业,文学艺术,也有可比性?

从计算角度,圆是根号函数,抛物线是多项式,更简单.

作业:求抛物线$y = x^2$,在区间(0,1)的面积与弧长,变成什么样函数的高?

得寸进尺,椭圆周长也有类似的公式吗？更乐观些，只要曲线是用初等函数给定的,就有可能计算弧长与面积吗？

遗憾:多数初等函数（例如 $\frac{1}{x}$ ）不能写成另一初等函数的导数（除非用积分人造一个函数，称 $\ln x$ ）.所以，多数面积与弧长不能按定义(4.1)计算.侥幸者，有少数但却是最常见的函数，如圆（见以上难题1与2），的确可写成导数形式，险棋.所以公式(4.1)不通用，却有特效，能断其一指.

结论：基本公式(4.1) 不能没有，但不是万能.

补救办法见后续部分.

以上看到，难题的共同点：看似简单明白的题目（如圆）,其完美答案不只是凭赤手空拳或单枪匹马,需要高深学问或先进武器（如微积分的牛顿-莱布尼茨公式及泰勒公式）来帮忙. 高成本才有高回报.

评论

微积分主题是什么？如果定为天文，那还必须必须阅读项武义书. 如果涉及的技术公众搞不明白，或自己也费劲, 那也必须作为附录.

讨论题:中英文有机器翻译, 那么文字与符号也有机器翻译吗?

数学爱讲充分与必要.公式(1.2), 分两条不是必要的,两条能降为一条, 整体比能从局部比得出

$$\text{点点}\frac{\text{微分}}{\text{小高}} = 0.999\cdots \Rightarrow \frac{\text{微分相加}}{\text{全高}} = 0.999\cdots \tag{7.1}$$

这里比例 ≤ 1,指调整后的结果（否则指: 点点$\frac{\text{微分}}{\text{小高}} \to 1 \Rightarrow \frac{\text{微分相加}}{\text{全高}} \to 1$，见公式(3.2)）.

所以没有必要再验证后者,即只做前半,省了后半,事半功倍. 但不是显然可见了,要用几行反证法,见第8讲.

那么,公式(7.1)说,若

$$\text{点点可微或有切线} \Rightarrow \text{有积分及牛顿-莱布尼兹公式} \tag{7.2}$$

全剧达到高潮或最亮点:由微分智取积分,事半功倍,完整的理论只花几分钟.

台上几分钟,台下几年功.

微分作为比例的优越性已显现,只做微分,省了积分,所需工作量只有一半. 事半功倍, 就是学习的窍门.

这就是最浅最短, 而且准确严谨的微积分说明书. 我们的原则:怎么浅怎么短就怎么说. 但加上作业,也等于一本厚书.

微积分怎么证?

数学的发现既需数据实验,又需逻辑证明.只是证明越短越好.

我们可以就几个初等函数,分别验证公式(4.1). 这是直接法, 显式的. 实际上, $\frac{\text{微分和}}{\text{全高}}$是各项($\frac{\text{微分}}{\text{小高}}$)的加权平均, 自然也等于$0.999\cdots$. 这就是微积分基本公式.

也可以就一致可导函数,对小区间上导数定义式相加,即得全区间上牛顿-莱布尼兹公式.虽然简洁但用了更强的条件以及隐式的 $\varepsilon-\delta$ 方法,受够了.见作者早期的书(1999-01).

最后换挡上坡,也可以就所有"可微"函数(不要求 分子 $\leq$ 分母)一举拿下公式(7.2). 这时用了最弱的条件以及聚点定理(后者最吃力了).见以下证明.

要证明公式(7.2),就是由点点可微: $\frac{\text{微分}}{\text{小高}} \to 1$ (可调整为$\frac{\text{微分}}{\text{小高}}$或$\frac{\text{小高}}{\text{微分}} = 0.\dot{9}$) 来证明可积以及牛顿-莱布尼茨公式:当分割加密,

$\frac{\text{微分相加}}{\text{全高}} \to 1$(可调整为$\frac{\text{微分相加}}{\text{全高}}$或$\frac{\text{全高}}{\text{微分相加}} = 0.\dot{9}$) .

首先,假设在区间 $[a,b]$ 上不存在微分恒为0的点,这样对每个分割而言, $\frac{\text{微分}}{\text{小高}}$ 必定在某个分点取到下界c(如果在某个分点,小高为0, 此时下界c 可取为负无穷),而且

$$\frac{\text{微分相加}}{\text{全高}} = \frac{\sum \text{微分}}{\text{全高}} = \sum \frac{\text{微分}}{\text{小高}} \frac{\text{小高}}{\text{全高}} \geq c \sum \frac{\text{小高}}{\text{全高}} = c$$

所以,只需证明当分割加密,上述下界$c \to 1$即可.

由于涉及无限，只好用反证法:假设分割加密, 下界 $\not\to 1$, 那么可以取得一个数列 $\{a_n\}$, 这些点处的 $\frac{\text{微分}}{\text{小高}} \not\to 1$, 既然 $\{a_n\}$ 分布在有界区间,那么至少有一个点周围有无穷多点,且该点的 $\frac{\text{微分}}{\text{小高}} \not\to 1$, 与已知矛盾,即有 $c \to 1$.

原来，这几行或几分钟的论证，只要你读懂了，你就读懂了微积分的理论. 没有想象过吧？

作业:学习聚点定理(老师有事可做了).

作业:类似地,可以证明当分割加密, $\frac{\text{微分相加}}{\text{全高}}$ 的上界也趋于1. 所以就有 $\frac{\text{微分相加}}{\text{全高}} \to 1$ (不要求分子 $\leq$ 分母),即有基本公式(4.1):

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

既然趋于1,只要让 $\frac{分子}{分母} \le 1$,就有 $0.\dot{9}$.

作业:最后,如果存在微分恒为0的点c(有限多个点的情形类似),那么将点c取为分点.由前半部分证明可知

$f(c-) - f(a) = \int_a^c f'(x)dx$

$f(b) - f(c+) = \int_c^b f'(x)dx$

并由 $f(x)$ 连续与积分的可加性,得基本公式(4.1)

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

意外:这条大定理,证明只几行.我们的原则:怎么短就怎么说.

微积分结局就在这一讲.前各讲换脸过程,就不必追究了,就当做什么都没有说吧.

原来微积分很少:碾碎就这么一点.

又回到那句

台上几分钟,台下几年功.

够短了?难说.人多点子多,不断有新说法冒出,见下.

换脸:第三版连环画

微积分第一步,改造成说书,还是费劲! 第二步得寸进尺,靠视觉才不费劲,例如拍成一个镜头,像一幅清明上河图,甚或一笔画?

国内小学大胆提出"一分钟算术",张景中提出"甲乙函数微积分", 还有Livshits, Range 等不用极限定义导数的巧妙方法, 都要不费劲.

微积分下一步是什么?

上学期留下两大空白:泰勒展开（见公式(5.3)前）与欧拉- 麦克劳林展开,微分与积分的大联合,分别对 $\frac{微分}{小高}$ 与 $\frac{微分相加}{全高}$ 提速,使之快出0.9,甚或说出真值：表示成有规律的级数,使函数按加减法来算成为可能.这才是微积分的重中之重.否则函数不能计算,建模还能干什么.所以说,这两大定理构成微积分的左右膀,缺一不可.

那么,跟第一定理,(4.1), 一起共有了三个定理,太费劲,所以又统一为同一个哲学公式,(2.4).

讨论题(Jhonson):牛顿的一个万有引力定律比开普勒的三大定律更重要吗?为什么?

统一贯穿始终,主旋律.

讨论题

幸福的家庭皆相似.

就随机计算,概率论, $\cdots$, 推销 $0.\dot{9}$.

参考文献略.