一元二次方程的仿射变换与二元二次型线性变换之间的对应关系

叶卢庆*

2014年10月21日

设 x 满足一元二次方程

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad (1)$$

通过仿射变换 $x' = px + q$, 其中 $p \neq 0$, 则可得一个新的二次方程

$$ax'^2 + (-2aq + 2bp)x' + aq^2 - 2bpq + cp^2 = 0. \quad (2)$$

一元二次方程(1)对应于二次型

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0, \quad (3)$$

而一元二次方程(2)对应于二次型

$$ax'^2 + (-2aq + 2bp)x'y' + (aq^2 - 2bpq + cp^2)y'^2 = 0. \quad (4)$$

我们知道,

$$\frac{x'}{y'} = p \frac{x}{y} + q,$$

也即,

$$\frac{x'}{y'} = \frac{px + qy}{y}.$$

可见, 线性变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

能把二次型(3)变成二次型(4).

*叶卢庆 (1992-), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业大四. 学号:1002011005.E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com