华中师范大学

二〇一二年研究生入学考试试题

院系、招生专业：　数学与统计学学院　　　　考试时间：元月 8 日上午

考试科目代码及名称：717 数学分析

一、(20 分) 设数列$\{x_n\}$满足：$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x_n^2\ (n\geq 1)$，$A=\sqrt{2}-1$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n-A)$绝对收敛.

二、(20 分) 据理说明下面的结论是否成立（成立请给出证明，不成立请举反例）：

(1) 设$f(x)$在区间I上连续，若$f(x)$在区间I上一致连续，则$\sin^3|f(x)|$也在区间I上一致连续；

(2) 设$f(x)$在区间I上连续，若$|f(x)|$在区间I上一致连续，则$\sin^3 f(x)$也在区间I上一致连续.

三、(20 分) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$ 反证法

$x\cdot f(x)=3x^2.$

$\dfrac{\arccos 3x^2}{x.}$

的充分必要条件是$f(x)$不为常函数或线性函数.

$4x^2$

四、(20 分) 设$F(x,y)=x^2+y-\cos(xy)$，证明：存在性. 惟一性. $f(0)=1.$

0 1 1

(1) 在$(0,1)$附近存在过点$(0,1)$的惟一连续可微的函数$y=f(x)$，使得$F(x,f(x))\equiv 0$；

(2) 在$x=0$附近，当$x>0$时，$y=f(x)$单调递减；当$x<0$时，$y=f(x)$单调递增.

$3x^2=\cos xy.$

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。

$\dfrac{\arccos 3x^2}{x.}$

五、（21 分）设$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，

（1）求$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$；

（2）证明：$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$在点$(0,0)$不连续；

（3）证明：$f(x,y)$在点$(0,0)$可微.

六、（15 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[y(\frac{1}{n})-1-\frac{1}{n}\right]x^n$的收敛域，其中$y=y(x)$满足：$y'=x+y$且$y|_{x=0}=1$.

七、（20 分）

（1）证明：当$x>0$时，有不等式$\left|\int_x^{x+c}\sin t^2\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{x}$（其中$c>0$）；

（2）试问（1）的不等式中"≤"是否能改为"<"，并证明你的结果.

八、（14 分）设$P(x,y)$和$Q(x,y)$在R^2上都具有连续的偏导数，且对任意$(x_0,y_0)\in R^2$以及任意$r>0$，总有

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0,$$

其中L为以(x_0,y_0)为心，$r>0$为半径的上半圆周，方向是逆时针，证明：在R^2上，

$$P(x,y)\equiv 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}\equiv 0.$$

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。