

华中师范大学

2005 年研究生入学考试试题（高等代数）

1、(15) 设 A 是数域 P 上的 $r \times r$ 阶矩阵, D 是 $s \times s$ 阶矩阵, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$,

并且 $\text{秩}(M) = \text{秩}(A) = r$, 证明 $D = CA^{-1}B$ 。

2、(15) 设 A 是数域 P 上的 $m \times n$ 矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的线性无关的解, $A\beta \neq 0$, 证明 $\beta, \beta + \alpha_1, \beta + \alpha_2, \dots, \beta + \alpha_t$ 线性无关。

3、(30) 设 P 是数域,

$$V = \{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in P, i = 0, 1, 2, \dots, n\},$$

(1) 证明 V 关于多项式的加数乘多项式构成数域 P 上的线性空间;

(2) $\forall f(x) \in V$, 规定 $A: f(x) \mapsto f(x) - x \cdot f'(x)$, 证明 A 是 V 的线性变换;

(3) 求线性变换 A 在基 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 上的矩阵。

4、(20) 设 A 是 $n \times n$ 阶复矩阵, $A \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_r$ 是 A 的所有非零的特征值,

1) 证明 $E - A$ 是可逆矩阵, 并求 $(E - A)^{-1}$;

2) 求 $(E - A)^{-1}$ 的所有特征值。

5、(20) 设 A 是 n 阶正定矩阵, B 是 n 阶半正定矩阵,

(1) 证明 A^{-1} 是 n 阶正矩阵;

(2) 求实的可逆矩阵 T , 使得 $T'(A^{-1} + B)T = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 是对角矩

阵, 并说明主对角线上的元素 $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

6、(20) 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶矩阵, $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ 是主对角线上的元素

之和, $P^{2 \times 2}$ 表示数域 P 上所有二阶构成的集合, $\forall A \in P^{2 \times 2}$, 规定

$$f: A \mapsto Tr(A),$$

(1) 证明 f 是线性空间 $P^{2 \times 2}$ 线性函数;

(2) $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 $P^{2 \times 2}$ 的一组基

求 $P^{2 \times 2}$ 上的线性函数 g , 使得 $g(E_{11}) = 2, g(E_{12}) = 3, g(E_{21}) = 4, g(E_{22}) = -1$.

7、(30) 设 V 是数域 P 上的线性变换, A 的最小多项式是

$m(x) = x^2 - 2x - 3, Ker A$ 表示 A 的核, $Im A$ 表示 A 的值域, 证明:

(1) V 中存在一组基, 使 A 在这基下的矩阵是对角矩阵;

(2) $Ker(A - 3E) = Im(A + E)$, 其中 E 是 V 的恒等变换;

(3) $V = Ker(A - 3E) \oplus Ker(A + E)$