

华中师范大学

二〇〇七年研究生入学考试试题

院系、招生专业：数学与统计学学院各专业 考试时间：元月 21 日下午
考试科目代码及名称：436, 高等代数

1. (20 分) 设 $f(x)$ 是非零复多项式；用 $f'(x)$ 记 $f(x)$ 的微分(导数)多项式；设 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的最大公因式；设整数 $m > 1$. 证明：复数 c 为 $f(x)$ 的 m 重根的必要充分条件是 c 为 $d(x)$ 的 $m-1$ 重根. 请说明这里为什么需要假设 $m > 1$?

2. (30 分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵；设 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 是线性方程组 $AX = 0$ 的非零解. 证明：

- (1) 如果 A 的任何列向量非零，则 $a_1, \dots, a_n$ 中至少两个非零.
- (2) 如果 A 的任何两个列向量线性无关，则 $a_1, \dots, a_n$ 中至少三个非零.
- (3) 推广 (1), (2), 你得到什么结论？请证明你的结论.

3. (30 分) 对 $m \times n$ 矩阵 A , 记 A' 是 A 的转置矩阵.

- (1) 设 A 是实矩阵；证明：实线性方程组 $AX = 0$ 与实线性方程组 $(A'A)X = 0$ 同解.
- (2) 证明：实矩阵 A 的秩与矩阵 $A'A$ 的秩相等.
- (3) 在复数域，上述结论成立吗？为什么？
- (4) 对复数域，你认为应如何修改断言 (2) 得到一个正确断言？为什么？

4. (20 分) 设 A 是实方阵. 证明：如果下面三条中的任意两条成立则另一条也成立：

- (a) A 是正交矩阵. (b) A 是对称矩阵. (c) $A^2 = E$, 其中 E 表示单位矩阵.

5. (20 分) 已知 $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ 的特征根为 1, 2, 3, 其中 a, b 是实数. 求 a, b , 并求正交矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 是对角矩阵其对角线元素依次为 1, 2, 3.

6. (30 分) 用 $\mathbb{C}$ 表示复数域. 设 A 是 $n \times n$ 复矩阵, 设 A 的特征多项式 $\Delta_A(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$, 其中 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互素. 在 n 维向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中, 设 $\mathcal{F}$ 是齐次线性方程组 $f(A) \cdot X = 0$ 的解子空间, $\mathcal{G}$ 是齐次线性方程组 $g(A) \cdot X = 0$ 的解子空间. 证明:

- (1) $\mathcal{F} = \left\{ g(A) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \right\}$, $\mathcal{G} = \left\{ f(A) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \right\}$.
- (2) $\mathbb{C}^n = \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$.

考生答题请一律写在答题纸上, 在试卷上作答无效.