华 中 师 范 大 学

二〇〇九年研究生入学考试试题

院系、招生专业：数学与统计学学院　　　考试时间：元月 11 日上午

考试科目代码及名称：616 数学分析

一、(30 分) 计算题

1、$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin(x^\alpha)\cos[\sin(\frac{1}{\ln x})]}{(1+x)^\beta-1}$，其中 $\alpha>1$，$\beta>0$ 均为常数；

2、计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x$，$y=1$ 和 $x=0$ 所围成的区域；

3、求曲线积分 $\oint_C \dfrac{(x-1)\mathrm{d}y-(y-2)\mathrm{d}x}{4(x-1)^2+(y-2)^2}$ 其中 C 为平面内任意一条不过点 $(1,2)$ 的正向光滑封闭简单曲线.

二、(12 分) 设函数 $f(x)$ 定义在开区间 (a,b) 内，若对任意 $c\in(a,b)$，都有 $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 也存在，则 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有界.

三、(12 分) 证明含参量反常积分

$$\int_0^{+\infty} xe^{-xy}\mathrm{d}y$$

在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛（其中 $\delta>0$），但在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

四、(20 分)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且存在 $M>0$，使得 $\forall x\in(0,1)$，

五、（20分）证明下面的结论:

1、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$；

2、若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1)$.

六、（18分）设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处

[redacted]