《幂函数》教案

叶卢庆[*]

2014 年 11 月 7 日

1 课程引入

通过正方形和立方体的三个例子引入幂函数. 这三个例子分别为

- 若正方形的边长为 x, 则其面积 S 和边长 x 的函数关系为 $S=x^2$. 边长 x 和面积 S 的函数关系为 $x=\sqrt{S}=S^{\frac{1}{2}}$.
- 若立方体的边长为 x, 则其体积 V 和棱长 x 的函数关系为 $V=x^3$. 棱长 x 和体积 V 的函数关系为 $x=\sqrt[3]{V}=V^{\frac{1}{3}}$.
- 若立方体的任意一个面的面积为 S, 则立方体体积 V 和 S 的函数关系为 $V=(\sqrt{S})^3=S^{\frac{3}{2}}$. 面积 S 和体积 V 的函数关系为 $S=V^{\frac{2}{3}}$.

注意到

- 在上面的三个例子中, 定义域和值域都是正实数, 因为正方形的边长, 面积和立方体的棱长, 面的面积, 体积都是正实数.
- 注意到, 上面三个例子里涉及到的所有函数都是在定义域里单调递增的. 因为几何意义告诉我们, 当正方形的边长增加时, 面积增加, 反之亦然; 当立方体的棱长增加时, 体积增加, 反之亦然; 当立方体的任意一个面的面积增加时, 体积增加, 反之亦然.

2 正式介绍幂函数

像 $S=x^2, x=S^{\frac{1}{2}}, V=x^3, x=V^{\frac{1}{3}}, V=S^{\frac{3}{2}}, S=V^{\frac{2}{3}}$ 这样的函数都是幂函数. 一般地,

定义. 函数 $f(x)=x^a$ 叫幂函数, 其中指数 a 是常数, 底数 x 是自变量, 且 x 的定义域是使得 x^a 有意义的所有实数形成的集合.

我们已经熟悉的幂函数是

- $f(x)=x=x^1$.
- $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}, x\neq 0$.
- $f(x)=x^2$.

另外还有一些幂函数的例子是

- $f(x)=x^3$.
- $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, x\geq 0$.
- $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$.
- $f(x)=x^{\frac{3}{2}}, x\geq 0$.
- $f(x)=x^{\pi}, x\geq 0$.

注意到在上面的例子里,$f(x)=x^{\pi}$ 中,π 是无理数. 这个函数的定义域是 $x\geq 0$, 因为在实数范围内, 负数的无理数次幂是没有定义的.

[*]叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com

3　幂函数和指数函数的对比

幂函数 $f(x)=x^a$ 和指数函数 $g(x)=a^x$ 的区别在于, 幂函数的底数是变量, 指数是常量, 而指数函数的底数是常量, 指数是变量. 这是它们表面的区别, 更重要的区别在于, 一个指数函数, 一旦是个递增函数, 那么它的增长速度**最终**将远远地大于任何幂函数. 一个幂函数, 虽然开始的时候, 可能会大于指数函数, 但是在后面, 必然将会被递增的指数函数所远远超越. 也就是说, 在 x 足够大的时候, 即便是指数函数 $f(x)=1.01^x$, 它的增长速度也将远远地大于幂函数 $f(x)=x^{100}$, 最后前者将远远地超越后者.(红色部分选讲) 为什么会出现这种情况呢？我们将我们的思考限制在正整数集合 $\mathbf{Z}^+$ 上, 让我们来比较当 n 足够大时,$f(n)=1.01^n$ 和 $g(n)=n^{100}$. 我们发现, 无论 n 多大

$$f(n+1)=1.01f(n),$$

也即 $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ 比值是个大于 1 的常量. 而当 n 越来越大时,

$$g(n+1)=\frac{(n+1)^{100}}{n^{100}}g(n)=(1+\frac{1}{n})^{100}g(n),$$

我们发现 $1+\frac{1}{n}$ 却越来越无限地趋于 1, 于是 $(1+\frac{1}{n})^{100}$ 也越来越无限地趋于 1. 这样就导致了幂函数 $g(n)$ 在 n 足够大的时候增长速度远远不如指数函数, 因为指数函数 $f(n)$ 的增长方式是不断地乘以一个大于 1 的常量, 而幂函数 $g(n)$ 的增长方式是不断地乘以一个无限地趋于 1 的变量.

4　$f(x)=\sqrt{x}$ 的图像

每个同学都很熟悉幂函数 $f(x)=x^2$ 的图像, 这是最简单的二次函数, 它在 $[0,+\infty)$ 上递增, 在 $(-\infty,0]$ 上递减. 因此我们就不多说了. 我们来着重讨论 $f(x)=\sqrt{x}$ 的图像. 它的定义域是 $[0,+\infty)$, 并且在定义域上单调, 这是要求同学们证明的. 取定义域中两个任意的数, 作一下商, 把商和 1 比较一下就可以了.

这样之后, 再请同学们注意一下 $f(x)=\sqrt{x}$ 和 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上是关于直线 $y=x$ 对称的.

5　类似地处理其它的函数