幂函数

叶卢庆

富阳市新登中学　高一 13 班

引入

- 若正方形的边长为 x, 则其面积 S 和边长 x 的函数关系为 (),

引入

- 若正方形的边长为 x, 则其面积 S 和边长 x 的函数关系为 (),$S = x^2$.

引入

- 若正方形的边长为 x, 则其面积 S 和边长 x 的函数关系为 (),$S = x^2$.边长 x 和面积 S 的函数关系为 $x = \sqrt{S} = S^{\frac{1}{2}}$.

引入

- 若正方形的边长为 x, 则其面积 S 和边长 x 的函数关系为 (),$S = x^2$.边长 x 和面积 S 的函数关系为 $x = \sqrt{S} = S^{\frac{1}{2}}$.
- 若立方体的边长为 x, 则其体积 V 和棱长 x 的函数关系为 (),

引入

- 若正方形的边长为 x, 则其面积 S 和边长 x 的函数关系为 (),$S = x^2$.边长 x 和面积 S 的函数关系为 $x = \sqrt{S} = S^{\frac{1}{2}}$.
- 若立方体的边长为 x, 则其体积 V 和棱长 x 的函数关系为 (),$V = x^3$.

引入

- 若正方形的边长为 x, 则其面积 S 和边长 x 的函数关系为 (),$S=x^2$.边长 x 和面积 S 的函数关系为 $x=\sqrt{S}=S^{\frac{1}{2}}$.
- 若立方体的边长为 x, 则其体积 V 和棱长 x 的函数关系为 (),$V=x^3$.棱长 x 和体积 V 的函数关系为 $x=\sqrt[3]{V}=V^{\frac{1}{3}}$.

引入

- 若正方形的边长为 x, 则其面积 S 和边长 x 的函数关系为 (), $S = x^2$. 边长 x 和面积 S 的函数关系为 $x = \sqrt{S} = S^{\frac{1}{2}}$.
- 若立方体的边长为 x, 则其体积 V 和棱长 x 的函数关系为 (), $V = x^3$. 棱长 x 和体积 V 的函数关系为 $x = \sqrt[3]{V} = V^{\frac{1}{3}}$.
- 若立方体的任意一个面的面积为 S, 则立方体体积 V 和 S 的函数关系为 ().

引入

- 若正方形的边长为 x, 则其面积 S 和边长 x 的函数关系为 $()$, $S = x^2$. 边长 x 和面积 S 的函数关系为 $x = \sqrt{S} = S^{\frac{1}{2}}$.
- 若立方体的边长为 x, 则其体积 V 和棱长 x 的函数关系为 $()$, $V = x^3$. 棱长 x 和体积 V 的函数关系为 $x = \sqrt[3]{V} = V^{\frac{1}{3}}$.
- 若立方体的任意一个面的面积为 S, 则立方体体积 V 和 S 的函数关系为 $()$. $V = (\sqrt{S})^3 = S^{\frac{3}{2}}$.

引入

- 若正方形的边长为 x, 则其面积 S 和边长 x 的函数关系为 $()$, $S=x^2$. 边长 x 和面积 S 的函数关系为 $x=\sqrt{S}=S^{\frac{1}{2}}$.
- 若立方体的边长为 x, 则其体积 V 和棱长 x 的函数关系为 $()$, $V=x^3$. 棱长 x 和体积 V 的函数关系为 $x=\sqrt[3]{V}=V^{\frac{1}{3}}$.
- 若立方体的任意一个面的面积为 S, 则立方体体积 V 和 S 的函数关系为 $()$. $V=(\sqrt{S})^3=S^{\frac{3}{2}}$. 面积 S 和体积 V 的函数关系为 $()$.

引入

- 若正方形的边长为 x, 则其面积 S 和边长 x 的函数关系为 (), $S = x^2$. 边长 x 和面积 S 的函数关系为 $x = \sqrt{S} = S^{\frac{1}{2}}$.
- 若立方体的边长为 x, 则其体积 V 和棱长 x 的函数关系为 (), $V = x^3$. 棱长 x 和体积 V 的函数关系为 $x = \sqrt[3]{V} = V^{\frac{1}{3}}$.
- 若立方体的任意一个面的面积为 S, 则立方体体积 V 和 S 的函数关系为 (). $V = (\sqrt{S})^3 = S^{\frac{3}{2}}$. 面积 S 和体积 V 的函数关系为 (). $S = V^{\frac{2}{3}}$.

什么是幂函数

定义

函数 $f(x) = x^{\alpha}$ 叫幂函数，其中指数 α 是常数，底数 x 是自变量，且 x 的定义域是使得 x^{α} 有意义的所有实数形成的集合.

什么是幂函数

定义

函数 $f(x) = x^{a}$ 叫幂函数, 其中指数 a 是常数, 底数 x 是自变量, 且 x 的定义域是使得 x^{a} 有意义的所有实数形成的集合.

例

- $f(x) = x = x^1$.
- $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, x \neq 0$.
- $f(x) = x^2$.

什么是幂函数

定义

函数 $f(x) = x^a$ 叫幂函数，其中指数 a 是常数，底数 x 是自变量，且 x 的定义域是使得 x^a 有意义的所有实数形成的集合.

例

- $f(x) = x = x^1$.
- $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, x \neq 0$.
- $f(x) = x^2$.
- $f(x) = x^3$.
- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, x \geqslant 0$.
- $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.
- $f(x) = x^{\frac{3}{2}}, x \geqslant 0$.
- $f(x) = x^{\pi}, x \geqslant 0$.

幂函数 VS 指数函数

问题

幂函数 $f(x) = x^a$ 和指数函数 $g(x) = a^x$ 有什么区别?

幂函数 VS 指数函数

问题

幂函数 $f(x) = x^a$ 和指数函数 $g(x) = a^x$ 有什么区别?

答.

幂函数的底数是自变量, 指数是常量.
指数函数的底数是常量, 指数是自变量.

□

幂函数 VS 指数函数

问题

幂函数 $f(x) = x^a$ 和指数函数 $g(x) = a^x$ 有什么区别?

答.

幂函数的底数是自变量,指数是常量.
指数函数的底数是常量,指数是自变量.

□

下面哪个是幂函数,哪个是指数函数?

- $f(x) = 2^x, g(x) = x^2$.

幂函数 VS 指数函数

问题

幂函数 $f(x) = x^a$ 和指数函数 $g(x) = a^x$ 有什么区别?

答.

幂函数的底数是自变量, 指数是常量.
指数函数的底数是常量, 指数是自变量.

□

下面哪个是幂函数, 哪个是指数函数?

- $f(x) = 2^x$,$g(x) = x^2$.
- $f(x) = x^{0.6}$,$g(x) = 0.6^x$.

$f(x) = \sqrt{x}$ 的图像

画出 $f(x) = \sqrt{x}$ 在定义域上的图像.

$f(x)=\sqrt{x}$ 的图像

画出 $f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域上的图像.

问题

说说 $f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域上的单调性.

$f(x) = \sqrt{x}$ 的图像

画出 $f(x) = \sqrt{x}$ 在定义域上的图像.

问题

说说 $f(x) = \sqrt{x}$ 在定义域上的单调性.你能证明吗?

$f(x) = x^3$ 的图像

例

画出 $f(x) = x^3$ 在 $[0, +\infty)$ 上的图像.

$f(x) = x^3$ 的图像

问题

你能根据三次函数 $f(x) = x^3, x \in \mathbf{R}$ 的奇偶性，画出 $f(x)$ 在整个 $\mathbf{R}$ 上的图像吗？

$f(x)=x^3$ 的图像

问题

你能根据三次函数 $f(x)=x^3, x\in\mathbf{R}$ 的奇偶性，画出 $f(x)$ 在整个 $\mathbf{R}$ 上的图像吗？

问题

从 $f(x)=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像来看，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上应该是递增的还是递减的？

根据 $f(x)=x^3$ 的图像比较大小

问题

请比较 0.5^3 和 0.6^3 的大小.

根据 $f(x) = x^3$ 的图像比较大小

问题

请比较 0.5^3 和 0.6^3 的大小.

问题

除了使用图像之外, 你能使用代数方法证明 $0.5^3 < 0.6^3$ 吗?

根据 $f(x) = x^3$ 的图像比较大小

问题

请比较 0.5^3 和 0.6^3 的大小.

问题

除了使用图像之外, 你能使用代数方法证明 $0.5^3 < 0.6^3$ 吗?

解.

由于 0.5^3 和 0.6^3 都大于 0, 因此将 0.5^3 和 0.6^3 除一下, 然后和 1 比较大小. 具体看黑板. □

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 的图像

问题

画出函数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的图像.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 的图像

问题

画出函数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的图像.

问题

请根据 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}, x \in \mathbf{R}$ 的奇偶性, 进一步画出 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像.

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 的图像

问题

画出函数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的图像.

问题

请根据 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}, x \in \mathbf{R}$ 的奇偶性, 进一步画出 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像.

问题

从 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图像来看, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上应该是递增的还是递减的?

根据 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 的图像比大小

问题

比较 $0.3^{\frac{1}{3}}$ 和 $0.4^{\frac{1}{3}}$ 的大小.

根据 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 的图像比大小

问题

比较 $0.3^{\frac{1}{3}}$ 和 $0.4^{\frac{1}{3}}$ 的大小.除了使用图像来判断外，你能用代数方法证明吗?

$f(x) = x^3$ 和 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 图像的关系

问题

观察 $f(x) = x^3, x \in \mathbf{R}$ 和 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}, x \in \mathbf{R}$ 的图像，你能发现什么规律吗？

$f(x) = x^3$ 和 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 图像的关系

问题

观察 $f(x) = x^3, x \in \mathbf{R}$ 和 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}, x \in \mathbf{R}$ 的图像，你能发现什么规律吗？让我们来形象地解释一下为什么这两个函数的图像关于直线 $y = x$ 轴对称.

一般地

我们已经知道，当 $\alpha=3,\frac{1}{3}$ 时，$f(x)=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 一般地，当 $\alpha>0$ 时，$f(x)=x^{\alpha}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

问题

当 $x>0$ 时，让我们来研究 $f(x)=x^3$ 与 $f(x)=x^2$ 的大小关系.

$f(x) = x^3$ 与 $f(x) = x^2$

问题

当 $x > 0$ 时，让我们来研究 $f(x) = x^3$ 与 $f(x) = x^2$ 的大小关系.

解.

先画图看看.

问题

当 $x > 0$ 时，让我们来研究 $f(x) = x^3$ 与 $f(x) = x^2$ 的大小关系.

解.

先画图看看.我们发现，

- 当 $0 < x < 1$ 时，$x^3 < x^2$.
- 当 $x = 1$ 时，$x^3 = x^2$.
- 当 $x > 1$ 时，$x^3 > x^2$.

$f(x) = x^3$ 与 $f(x) = x^2$

问题

当 $x > 0$ 时，让我们来研究 $f(x) = x^3$ 与 $f(x) = x^2$ 的大小关系.

解.

先画图看看.我们发现,

- 当 $0 < x < 1$ 时,$x^3 < x^2$.
- 当 $x = 1$ 时,$x^3 = x^2$.
- 当 $x > 1$ 时,$x^3 > x^2$.

你能证明吗?

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ 和 $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ 的图像

问题

首先，让我们通过作图软件画出 $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ 和 $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ 的图像.

$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ 和 $g(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ 的图像

问题

首先，让我们通过作图软件画出 $f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ 和 $g(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ 的图像.

问题

你能判断函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ 和 $g(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性吗？为什么？

$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ 和 $g(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ 的图像

问题

首先，让我们通过作图软件画出 $f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ 和 $g(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ 的图像.

问题

你能判断函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ 和 $g(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性吗？为什么？

问题

判断 $f(x)=x^{-2}$ 和 $g(x)=x^{-1}$ 在定义域上的奇偶性.

根据 $f(x) = x^{-1}$ 和 $g(x) = x^{-2}$ 的图像判断大小

问题

比较 0.3^{-1} 和 0.3^{-2} 的大小.

根据 $f(x) = x^{-1}$ 和 $g(x) = x^{-2}$ 的图像判断大小

问题

比较 0.3^{-1} 和 0.3^{-2} 的大小.

问题

比较 4.5^{-1} 和 4.5^{-2} 的大小.

总结

- 当 a 是偶数或者偶数的相反数时,$f(x)=x^{a}$ 在定义域上是 (偶) 函数.

总结

- 当 a 是偶数或者偶数的相反数时,$f(x) = x^a$ 在定义域上是 (偶) 函数.
- 当 a 是奇数或者奇数的相反数时,$f(x) = x^a$ 在定义域上是 (奇) 函数.

总结

- 当 a 是偶数或者偶数的相反数时,$f(x)=x^a$ 在定义域上是 (偶) 函数.
- 当 a 是奇数或者奇数的相反数时,$f(x)=x^a$ 在定义域上是 (奇) 函数.
- 当 $a>b$, 且 $x>1$ 时,$x^a()x^b$.
- 当 $a>b$, 且 $0<x<1$ 时,$x^a()x^b$.

题目

比较 $2^{\frac{1}{2}}$ 和 $1.8^{\frac{1}{3}}$ 的大小.

综合题

题目

比较 $2^{\frac{1}{2}}$ 和 $1.8^{\frac{1}{3}}$ 的大小.

解.

$$2^{\frac{1}{2}} > 2^{\frac{1}{3}} > 1.8^{\frac{1}{3}}.$$

□

综合题

给定函数 $y = x^a$. 设 $a \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$,

- $a =?$ 时, 图像过原点, 在定义域上递增;

综合题

给定函数 $y = x^a$. 设 $a \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$,

- $a = ?$ 时, 图像过原点, 在定义域上递增;
- $a = ?$ 时, 图像不过原点, 不与坐标轴相交, 在定义域上递减;

综合题

给定函数 $y = x^a$. 设 $a \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$,

- $a = ?$ 时, 图像过原点, 在定义域上递增;
- $a = ?$ 时, 图像不过原点, 不与坐标轴相交, 在定义域上递减;
- $a = ?$ 时, 图像关于 y 轴对称, 并与坐标轴相交;

综合题

给定函数 $y = x^a$. 设 $a \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$,

- $a = ?$ 时，图像过原点，在定义域上递增;
- $a = ?$ 时，图像不过原点，不与坐标轴相交，在定义域上递减;
- $a = ?$ 时，图像关于 y 轴对称，并与坐标轴相交;
- $a = ?$ 时，图像关于 y 轴对称，不与坐标轴相交;

综合题

给定函数 $y = x^a$. 设 $a \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$,

- $a =?$ 时, 图像过原点, 在定义域上递增;
- $a =?$ 时, 图像不过原点, 不与坐标轴相交, 在定义域上递减;
- $a =?$ 时, 图像关于 y 轴对称, 并与坐标轴相交;
- $a =?$ 时, 图像关于 y 轴对称, 不与坐标轴相交;
- $a =?$ 时, 图像过原点, 且关于原点中心对称;

综合题

给定函数 $y = x^{\alpha}$. 设 $\alpha \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$,

- $\alpha =?$ 时, 图像过原点, 在定义域上递增;
- $\alpha =?$ 时, 图像不过原点, 不与坐标轴相交, 在定义域上递减;
- $\alpha =?$ 时, 图像关于 y 轴对称, 并与坐标轴相交;
- $\alpha =?$ 时, 图像关于 y 轴对称, 不与坐标轴相交;
- $\alpha =?$ 时, 图像过原点, 且关于原点中心对称;
- $\alpha =?$ 时, 图像关于原点中心对称, 但不过原点.

综合题

给定函数 $y = x^a$. 设 $a \in \{-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$,

- $a = ?$ 时, 图像过原点, 在定义域上递增;
- $a = ?$ 时, 图像不过原点, 不与坐标轴相交, 在定义域上递减;
- $a = ?$ 时, 图像关于 y 轴对称, 并与坐标轴相交;
- $a = ?$ 时, 图像关于 y 轴对称, 不与坐标轴相交;
- $a = ?$ 时, 图像过原点, 且关于原点中心对称;
- $a = ?$ 时, 图像关于原点中心对称, 但不过原点.
- $a = ?$ 时, 函数的定义域为 $\mathbf{R}$ 且为奇函数.