第28卷第5期
2008年10月
河池学院学报
JOURNAL OF HECHI UNIVERSITY
Vol.28 No.5
Oct. 2008

对实分析的几点认识

韦玉程
(河池学院　数学系，广西　宜州　546300)

[摘　要]　主要对现行实分析教材的内容作简要概括，对其中重要的概念加以分析及拓展，并对 Lebesgue 积分与 Riemann 积分进行了比较。

[关键词]　Lebesgue 积分；Riemann 积分；可测集；可测函数；收敛

[中图分类号]　O174.1　　[文献标识码]　A　　[文章编号]　1672-9021(2008)05-0015-06

[作者简介]　韦玉程(1966-)，男(壮族)，广西凤山人，河池学院数学系副教授，主要研究方向为非线性泛函分析.

[基金项目]　广西教育科学“十五”规划研究资助项目(编号:2005B038)；河池学院科研资助项目(编号:2004B-E005).

0　引言

时下，网上流行“实变函数学十遍”的论点.也许有两层意思，一是实变函数很抽象，学习很费劲；另一层是要用实变函数知识的地方很多.事实上，实变函数是我国高等学校数学与应用数学专业的重要专业课程，该课程是数学分析的后继课程，它一方面是数学分析理论的深化和继续，另一方面也是学习泛函分析、概率论、拓扑学、偏微分方程和调和分析等现代数学的基础.因此具有承上启下的作用.但作为数学分析后继课程的实变函数，它在概念和方法上都比数学分析更加抽象和更加理论化，因此说“实变函数学十遍”也不奇怪了.本人从事这门课程的教学多年，从中也颇有感受，在此表达一下自己对实变函数的一些通俗理解，与读者进行交流.

1　关于 Lebesgue 积分的引入

经典微积分学由 Newton、Leibniz 等人17世纪开创以后，在19世纪经 Cauchy、Riemann、Weierstrass 等人改进，注入严密性，形成用无穷小或无穷大等极限过程处理计算问题的学问(也称无穷小分析)，成为普遍应用的数学工具.然而在应用中，经典微积分存在着一些重大缺陷.例如 Riemann 积分中：Riemann 积分基本上只适用于连续函数(后经 Lebesgue 积分理论得出 R 可积的条件为函数几乎处处连续)，另外 Riemann 积分与极限互换及累次积分互换均要求很强的条件.Lebesgue 积分就在这种背景下产生的.

Lebesgue 首先建立了测度论理论，然后以测度论为基础，引入了一种全新的积分——Lebesgue 积分.这种新的积分在数学的多个领域显示出强大的威力.它的应用导致了许多深刻的效果，并推动了某些方向的深入发展.以 Lebesgue 积分为中心的新的微积分理论称为实变函数.它是经典微积分的继续，其目的是想克服 Newton-Leibniz 所创立的微积分存在的缺点，使得微分与积分的运算更加完美.泛函分析的诞生，在一定程度上正是受实变函数的推动.现代概率论已经完全建立在测度论与 Lebesgue 积分论的基础上，概率论是“概率测度空间的实函数论”.

2　关于集合论

德国数学家 G. Cantor 被公认为是集合论的首创者.他的理论被 Hilbert 誉为“数学思想的最惊人的产物，在纯粹理论范畴中人类活动最优美的表现之一”.的确，集合论的诞生在某种程度上促进了数学许多领

域的深入发展.

Cantor 思想的精髓体现在他的无限集理论中.无限集与有限集有一个十分有趣的本质区别:无限集必可对等于它的某个真子集,有限集则无此性质.于是,给出无限集与有限集的严格定义:若一集对等于它的某个真子集,则称它为无限集;不是无限集的集称为有限集.

这个定义显然比朴素观点下对无限集与有限集的理解要严格,但是严格的同时也就抽象多了.从这个定义作为出发点将能够建立起一整套的关于无限集的理论.

对无限集而言,又可分为可数集与不可数集.这种简单的划分初步体现了基数理论.在实际应用中,可数性概念的重大价值在于:若 E 是不可数集,则从 E 中去除任意可数个可数集之后仍为不可数集且基数不变,也就是说就元素多少而言,不可数集中的任何可数子集都是无足轻重的,这为刻画"稀有"与"一般"这一对范畴提供了一种强有力的数学方法.这种类似的方法在泛函分析中的类比称为纲定理:可数个疏集之并称为第一纲集;非第一纲集称为第二纲集.在这里显然单点集总是疏集,于是可数集是第一纲集.第一纲集刻画了稀有情形,第二纲集刻画了一般情形.例如在实数中,代数数是"稀有的",而超越数则是"一般的".再如区间 $[a,b]$ 上的所有连续函数构成一个集合——不妨看作点集,将这个集合中的每一个具体函数看成一个点,则有结论:$[a,b]$ 上几乎所有函数处处不可微.即连续曲线很少是光滑的.而这个结论初看起来颇令人惊讶,因为在人们的印象中可微函数俯拾即是,而构造一个处处不可微的连续函数是一件极不容易的事情.

基数理论是集合论中最重要的内容之一,它极其深刻且形式优美.直观上可理解为集合所包含元素个数的多少问题.对于所有的集合可以按照下述原则进行划分:对于每个集合 A,凡与 A 对等的集合必然属于某一类.这样便得到许多不同的类,而且容易看出任何一个集合必然属于某一类.体现这种分类的标志便是基数,集合的基数反映了集合的对等关系,同时也表明集合元素的个数.基数理论中重要的几个结论为:可数集基数记为 a;与实数集 R 对等的集的基数记为 c;不存在集合 A,其基数介于 a 和 c 之间(Cantor 连续统假设);不存在最大的基数等等.在此基础上借助对等这个工具形成了一套判定集合基数的结论和方法.显然,基数大小的比较是通过集合元素多少的比较(对等)来完成的,而不存在最大基数这个结论的证明中与悖论有一定的相似之处.

点集理论的研究是经典分析的深入发展所驱动的.首先定义了一些基本概念:内点、孤立点、聚点(极限点)、内部、导集、闭包、边界等等,事实上,这些概念可以从多个不同的角度进行刻画.这一方面在点集拓扑中有更好的体现.利用内部、闭包等概念可以得两个重要的概念开集和闭集.从"E 是闭集 $\Leftrightarrow E^c$ 是开集",这一结论似乎揭示了开集与闭集之间的完全互斥关系,但从全集 E 和 $\emptyset$ 既是 E 中的开集又是 E 中闭集可知开集与闭集也并非完全互斥的两个概念.

值得注意的是开集的定义:E 是开集 $\Leftrightarrow E$ 中每个点均为内点.也就意味着 E 含 x 必含 x 邻近的点.因此,"微小的扰动"不会使 E 中的点"逸出"E 外,这反映了某种性质的"稳定性".例如在 n 阶实矩阵的空间 $R^{n\times n}$ 中,可逆矩阵之全体构成一开集,这即说明矩阵的"可逆性"是一个稳定的性质,不因微小扰动而被破坏.另外这种"稳定性"是微分方程的重要研究课题.

通过对开集和闭集进行运算,得到了 G_δ 和 F_σ 这两类新的有很大应用价值的集,如测度论中 G_δ 和 F_σ 可以用于可测集的构造.

3 关于测度论

测度概念的形成,是为拓广长度、面积与体积概念所进行的一系列扩展的结果.引进测度主要有两个目的:一是为定义新的积分做准备,这从积分的几何意义也可以看出;二是用来精确刻画函数的性质,前面已经提及一个现象:区间 $[a,b]$ 上的连续函数几乎是处处不可微的.而对一个具体函数 f 而言,其不可微点之全体构成集合 E,那么 E 的测度就在某种程度上反映了 f 的可微性.

Lebesgue 改进了 Jordan 和 Borel 的测度理论,系统地建立了测度论,并用来成功地建立起他的积分理论.Lebesgue 首先引入外测度 m^* 和内测度 m_*,然后通过条件 $m_*E=m^*E$ 定义可测集.这是直观上最容易被接受的方法,但同时循着这一路线的理论却是相当的繁琐.Caratheodory 则给出了判断点集 E 为可测集的充要条件:对于任何点集 T,点集 E 都有 $m^*(T\cap E)+m^*(T\cap CE)=m^*T$.这是到目前为止最简洁的可测集定义,但从"任何"这个词即可知在直观、自然方面显然不如 Lebesgue 可测集定义.

在 Lebesgue 可测集中,开集和闭集是最简单的情形. 开集经差运算和可数次并与交运算所得之集(称 Borel 集)也是可测集,特别地,G_δ 型集和 F_σ 型集皆为可测集. 一个非常有意义的结论是:可测集与 F_σ 型集或者 G_δ 型集仅相差一个零测度集. 这展现了可测集的概貌,也提供了一种分解可测集的方法.

在这里要注意以下几点:

(1)即使 E 不可测,其外测度和内测度也是存在的.

(2)一个点集的 Lebesgue 测度是否存在以及测度值(如果存在)与其所在的空间的维数有关. 例如,$[a,b]$在一维直线上可测测度值为 $b-a$,在二维平面空间中其测度存在为零.

(3)X 为测度空间. $\mu(X)=1$,则称 μ 为概率测度. 此时可将每个可测集 $E\subset X$ 理解为一个"事件",而 $\mu(E)$就是事件 E 发生的概率,将概率看作测度的观点为概率带来了革命性的进展.

(4)设$(X,\mathscr{R},\mu)$是一测度空间,$\mathscr{R}$ 表示由 X 的子集构成的集合,$\mu(X)>0$,因零测集的可数并仍为零测集,故从某一点集 E 中除去任意可数个零测集之后,余下的集具有不变的正测度. 也就是说,零测集在 X 中可以忽略不计,这是刻画"稀有性"的又一种方法. 与前面提到的"可数性"和"纲定理"两种方法相比较,这种方法更加"精确",因为测度是对集合的一种量度,具有更多的定量色彩. 事实上,这三种方法在本质上是统一的.

测度论的另一个重要组成部分是可测函数. 可测函数有一系列的等价刻画,这些刻画能够更加清晰地展示出可测函数的性质,然而,可测函数的直观形象与内在结构是通过下面的结论来体现的:E 上的实函数 f 为可测函数的充要条件是:f 是某个简单函数序列的极限函数. 这也为研究可测函数提供了一般思路:若要证明某个命题 P 对于可测函数类(或其一部分)成立,则不妨首先证明 P 对简单函数成立,然后通过一适当的极限过程过渡到一般的可测函数.

此外可测函数有一系列基本性质,表现为:

(1)可测函数列$\{f_n\}$,则 $\sup\limits_n f_n(x)$、$\inf\limits_n f_n(x)$、$\underline{\lim} f_n(x)$、$\overline{\lim} f_n(x)$、$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (如果存在)皆为可测函数.

(2)$f(x)$、$g(x)$可测,则$f(x)g(x)$、$f(x)\pm g(x)$、$f(x)/g(x)$、$|f(x)|$在有意义时均可测.

(3)$f(x)$在 E 上可测,则在 E 的任何可测子集上可测. 特别地,零测集上的任何函数均可测.

(4)在一个零集上任意改变函数值不影响函数的可测性,由此导出了"几乎处处"的概念.

可测函数的收敛性. 主要有两个问题:①是在什么意义下的收敛? ②各种收敛之间有什么关系?

设f_n、f 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 主要的收敛有以下四种:

(1)一致收敛:若$\forall\varepsilon>0,\exists N\in Z_+,\forall n\geqslant N,\forall x\in E$,有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,则说$\{f_n\}$在 E 上一致收敛于$f$,记做$f_n\Rightarrow f$.

(2)几乎一致收敛:若$\forall\delta<0,\exists E_\delta\subset E$,使得$\mu(E\backslash E_\delta)<\delta$,在 E_δ 上$f_n\Rightarrow f$,则说$\{f_n\}$在 E 上几乎一致收敛于f,记做$f_n\to f\ a.u.$.

(3)几乎处处收敛:若$\forall\delta<0,\exists E_\delta\subset E$,使得$\mu(E\backslash E_\delta)=0$,在 E_δ 上 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$,则说$\{f_n\}$在 E 上几乎处处收敛于$f$,记做$f_n\to f\ a.e.$.

(4)依测度收敛:若$\forall\varepsilon>0$,有$\mu E(|f_n-f|)\geqslant\varepsilon\to 0(n\to\infty)$,则说$\{f_n\}$在 E 上依测度μ 收敛于f,记做 $f_f\xrightarrow{\mu}f$.

这些收敛之间的内在联系主要表现为以下结论:

(1)若$f_n\to f\ a.u.$,则$f_n\to f\ a.e.$;反之若$\mu E<\infty$,$f_n\to f\ a.e.$,则$f_n\to f\ a.u.$(后者称为 Egorov 定理).

(2)若$f_n\to f\ a.u.$,则$f_n\xrightarrow{\mu}f$;反之若$f_n\xrightarrow{\mu}f$,则$\{f_n\}$有一子列几乎一致收敛于f(后者称为 Riesz 定理).

(3)若$f_n\xrightarrow{\mu}f$则$\{f_n\}$有子列几乎处处收敛于f,若$\mu E<\infty$,$f_n\to f\ a.e.$,则$f_n\xrightarrow{\mu}f$.

这三点结论深刻揭示了各种收敛性之间的关系. 例如当$\mu E<\infty$时我们能够看出:"几乎一致收敛"与"几乎处处收敛"是等价的;当$\mu E<\infty$时尽管"依测度收敛"一般要弱于"几乎处处收敛",但仍可推出$\{f_n\}$有子列依测度收敛$\Leftrightarrow\{f_n\}$有子列几乎处处收敛.

依测度收敛是由 Riesz 引入的. 这种收敛更看重的是"整体收敛性",与传统的"逐点收敛"有很大的区别. 类似地,在泛函分析中的按范数收敛强调的也是整体收敛性.

可测函数与连续函数之间的关系主要表现为 Lusin 定理. Lusin 定理及其逆定理具有重要的理论价值和应用价值. 首先它给出了函数是几乎处处有限的可测函数的一个充要条件,这样就可以用连续函数刻画可测函数(几乎处处有限的),显示了可测函数的构造;其次通过它可将有关一般可测函数的问题化成有关连续函数的问题,从而简化问题. 数学分析中所说的连续函数都是区域上的连续函数,实变函数中的连续性是定义在点集上的,是对数学分析中的连续性的推广. 表现在如果点集 E 是函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 的子集,则 $f(x)$ 在 E 上连续是指 $f(x)$ 限制在 E 上所成的函数 $f(x)\,|_E$ 是 E 上的连续函数,而不是指 $f(x)$ 作为 D_f 上的函数在属于 E 的每个点上连续. 这是一个有趣的概念. 例如 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数显然在 $[0,1]$ 上处处间断,但限制在有理点集和无理点集上则均连续.

4 关于 Lebesgue 积分

Lebesgue 积分是在 Lebesgue 测度理论基础上建立起来的. 这一理论可以统一处理有界与无界函数的情况,而且函数还可以定义在一般的点集上. 除此之外,它还提供了比 Riemann 积分更加广泛而有效的收敛定理.

Lebesgue 积分定义的引入,通常都是从给定的测度出发,直接定义关于该测度的积分,并按照非负简单函数、非负可测函数、一般可测函数的路线来进行的. 而 Lebesgue 的原始积分定义则是借鉴了 R 积分的导入方法,所不同的是他采取了对值域进行划分的方式. 设 $f_{(x)}$ 是 E 的有界可测函数, $A\leqslant f(x)<B$, 对 $[A,B]$ 进行分划: $A=y_0<y_1<\cdots\cdots<y_n=B$, 令 $e_i=E(y_{i-1}\leqslant f<y_i)$, 则 e_i 是互不相交的可测集,定义积分和 $S=\Sigma y_i\mu e_i$, 则易得 $\int_E f\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}S$(其中 λ 是分划的最大长度). 在形式上这与 Riemann 积分十分相似,但应用范围却广的多. 因 Lebesgue 可积函数不一定几乎处处连续,例如区间 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数,处处不连续从而不是 R 可积的,但显然是 Lebesgue 可积的.

Lebesgue 积分的初等性质主要有线性性、σ - 可加性、单调性等. 由这些基本性质可以得到一些有趣有用的推论. 例如 f 可积等价于 $|f|$ 可积. 这说明对 L 积分而言,可积与绝对可积是等价的. 这从 L 积分的导入定义也可以看出来. R 积分存在可积和绝对可积,是因为 R 可积可能依赖于被积函数的正负值相抵消,但对于 L 积分 f^+、f^- 是分别积分的,从而与正负值相抵消无关. 因此函数 f 为 L 可积是依赖于 f 的绝对值受到一可积函数的控制,也即 $|f|(x)\leqslant g(x)$($g(x)$ 为可积函数).

再如若 $f=g$ a. e. , $\int f\mathrm{d}u$ 存在,则 $\int g\mathrm{d}x$ 亦存在,且 $\int f\mathrm{d}x=\int g\mathrm{d}x$. 这表明被积函数在某个零测集上的值,对于可积性及积分值都无影响. 因此,在处理 L 积分问题时,可依需要改变被积函数在某个零测集上的值. 从而上面 f 为 L 可积的条件可以改为有一个可积函数 g 使得 $|f|\leqslant g$, a. e. .

L 积分还有其他重要的性质推论,如:

(1) $f\in L^1$, 则 $\left|\int f\mathrm{d}x\right|\leqslant\int|f|\mathrm{d}x$;

(2) $\int|f|\mathrm{d}x=0$, 则 $f=0$ a. e;

(3) 若 $f\in L^1$, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 对任何可测集 $e\subset E$, 只要 $\mu e<\delta$ 就有 $\left|\int_e f\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$ 等等.

这些结果都具有很大的一般性,条件要求非常弱,这正是 L 积分的优点之一.

积分收敛定理.

Levi 定理:若 $\{f_n\}$ 可测,且 $0\leqslant f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$, 则

$$\int_E \lim_n f_n\mathrm{d}x=\lim_n\int_E f_n\mathrm{d}x.$$

Fatou 引理:若 $\{f_n\}$ 是 E 上非负可测函数,则

$$\int_E \underline{\lim_n} f_n\,\mathrm{d}x\leqslant\underline{\lim_n}\int_E f_n\,\mathrm{d}x.$$

控制收敛定理:设$f_n \to f$ a. e. 或$f_n \xrightarrow{\mu} f(n\to\infty)$,若存在$g\in L^1$使得$|f_n|\leqslant g(n=1,2,\cdots)$,则$f\in L^1$,$\lim\limits_n \int_E |f_n-f|\mathrm{d}x=0$且

$$\lim_n \int_E f_n \mathrm{d}x=\int_E f\mathrm{d}x.$$

以上三个定理是解决在何种条件下能够实现"积分与极限互换"的问题. 应该注意到定理所给出的条件均为充分条件. 这三大积分收敛定理通常被认为是L积分论的中心结果. 此外在控制收敛定理中得到一个结果$\lim\limits_n \int_E |f_n-f|\mathrm{d}x=0$,此式即表明$f_n$在$E$上依测度收敛于$f$,但并不意味着$\lim\limits_n f_n(x)=f(x)$,a. e.. 由前面提到的各收敛之间关系定理可知$\{f_n\}$中有子列几乎处处收敛到f.

对于常义R积分,与L积分之间的关系表达为下面的定理:

定理:设f是有界区间$E=[a,b]$上的有界函数,则f在E上R可积当且仅当f在E上几乎处处连续;当f在E上R可积时亦必L可积,且两种积分值相等.

这个定理彻底解决了R积分的可积性问题,它指出函数f为R可积的充要条件是f在$[a,b]$的不连续点集是零测集,也即R可积性不由函数在不连续点处的性态决定,而取决于不连续点集的测度. 这个判别法及其简单而又深刻. 直观而言,R可积函数应具有"较好"的连续性. 这个结果是Lebesgue积分理论的精彩运用.

对于无界函数的瑕积分及无穷区间上的反常积分,情况有所不同. 这种不同产生的原因是此时R积分是一种在Cauchy极限意义下的积分思想$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$(设$a$为瑕点),而L积分则是指绝对收敛的积分(即$f^+$、$f^-$均积分有限). 这本质上的不同说明$\mathrm{R}^1$上的反常积分与L积分无直接的蕴涵关系.

L积分在重积分方面的理论. 主要结果表现为Fubini定理. 这个定理的证明过程是采取由特殊到一般的递进步骤. Fubini定理有直观的几何解释,这一解释与R积分的几何意义恰相对应. 设$E\subset R^n$可测,$f:E\to[0,+\infty]$,则f可测的充要条件是f的下方图形在R^n中可测. 当f可测时有

$$mG(E,f)=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

Fubini定理在应用时是很方便的. 首先在具体问题中f的可测性通常是不成问题. 其次在被积函数变号且不知其是否可积时,可以先将绝对值形式代入判断f是否可积,然后再讨论. 当然需注意即使$f(x,y)$的两个累次积分存在且相等,$f(x,y)$在R^n上也可能不可积.

5 关于微分论

在R积分理论中,N-L公式是非常精彩的结果,但却不是完美的. Riemann引进他的积分的推广的时候,提出了这样一个问题:对连续函数成立的定积分和原函数方面的对应,在更为一般的情形下是否还成立. Volterra在1881年证明:存在函数$F(x)$,它在一个区间I内有界但Riemann不可积的导数. Lebesgue通过曲折的分析证明了如果f在$[a,b]$上在他的意义下可积,则$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$就几乎处处有导数并等于$f(x)$,反之若函数$g$在$[a,b]$上可微且它的导数$g'=f$是有界的,那么$f$是Lebesgue可积的,并成立着公式$g(x)-g(a)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 然而,若$g'$无界,则情况要复杂得多,这时,$g'$不一定可积,因而首要的问题是刻划那种函数$g$,使$g'$几乎处处存在并且可积,Lebesgue首先考虑限制在g的一个导函数处处有限的情形,他证明了这时g必定是一个有界变差函数。1904年Lebesgue还建立了反过来的结果:一个有界变差函数g一定几乎处处有导数g',且g'可积. 但是并不一定就有$g(x)-g(a)=\int_a^x g'(t)\mathrm{d}t$. 事实上,这个方程左右两边之差是一个有界变差函数,其导数几乎处处为零,但函数本身可以不是常数,至于使该等式成立的有界变差函数g,则具有性质:g在一个开集U上的变全差,随U的测度趋于0而趋于0. Vitali把这种函数称为绝对连续的函数.

6 关于函数空间L^p

20世纪初,Hilbert以有限线性方程组的解去逼近无限线性方程组的解,研究了具有性质$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<+\infty$的数

列$\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$,后来 Schmidt 和 Frechet 将 Hilbert 理论与 Euclid 空间相比较,并称 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$ 为空间中的点. 而对两个点 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$ 与 $y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots)$. 定义它们的距离为 $d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 就产生了 l^2 空间的的概念. 也许受 Fredholm 理论的影响,F. Riesz 和 Frechet 同时提出把 l^2 中的点改为区间[0,1]上的函数 $f(x)$,原加于序列的条件 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<+\infty$ 改为 $(L)\int_0^1|f(t)|^2\mathrm{d}t$,而得到函数空间 L^2,后来人们又进一步推广这一思想而考虑 $|f(t)|^p$,可积的函数 $f(t)$,引出 L^p 空间. 大多的实分析教材主要研究的是 $L^p(p\geq 1)$ 空间上多种可积函数类的整体性质与相互关系,以及具体的 L^2 空间的性质. 在 L^p 空间中,F. Riesz 主要使用的工具是 Holder 不等式以及 Minkowski 不等式,这些不等式最初是在高等代数中以数列的形式给出,F. Riesz 将它们推广到积分形式. 在几乎处处的意义下,L^p 空间是完备的. 这个结论不仅在应用中占重要地位,而且还为分析数学开辟了新路. 把空间中的函数看成点,考虑点列的收敛性等,这是泛函分析的基本内容之一. 作为较 L^p 空间具体的 L^2 空间具有良好的性质,不仅仅具有 L^p 的完备性,而且在 L^2 空间中可以赋予内积运算,使之成为内积空间,并且内积导出的距离与原来 L^2 中所定义的距离是相容的. 因此 L^2 空间成为一个 Hilbert 空间,而 Hilbert 空间具有良好的几何性质,自然地在 L^2 中可引入了夹角、正交、正交系、规范正交系等一系列概念,从而也就有了 Fourier 展开的说法了.

参考文献:

[1]程其襄,张奠宙,等. 实变函数与泛函分析基础[M]. 北京:高等教育出版社,1983.

[2]胡适耕. 实变函数[M]. 北京:高等教育出版社,1999.

[3]周民强. 实变函数论[M]. 北京:北京大学出版社,2001.

[4]郭大钧,黄春潮,梁方豪. 实变函数与泛函分析[M]. 济南:山东大学出版社,1986.

[5]Kline M. 古今数学思想(第四册)[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译. 上海:上海科学技术出版社,1981.

[6]胡适耕,刘金山. 实变函数与泛函分析 定理・方法・问题[M]. 北京:高等教育出版社,2003.

Some Views on the Real Analysis

WEI Yu-cheng

(Department of Mathematics, Hechi Unversity, Yizhou, Guangxi 546300, China)

[Abstract] In this paper, the main textbooks of real analysis are summed up and stated, among which some important concepts and theories are analyzed. And lebesgue integral are compared with Riemann integral.

[Key words] Lebesgue integral; Riemann integral; measurable set; measurable function; convergence

收稿日期 2008-06-28

[责任编辑 刘景平]

对实分析的几点认识

作者： 韦玉程， WEI Yu-cheng
作者单位： 河池学院,数学系,广西,宜州,546300
刊名： 河池学院学报
英文刊名： JOURNAL OF HECHI UNIVERSITY
年，卷(期)： 2008，28(5)

参考文献(6条)

1. 程其襄.张奠宙 实变函数与泛函分析基础 1983

2. 胡适耕 实变函数 1999

3. 周民强 实变函数论 2001

4. 郭大钧.黄春潮.梁方豪 实变函数与泛函分析 1986

5. Kline M.北京大学数学系数学史翻译组 古今数学思想 1981

6. 胡适耕.刘金山 实变函数与泛函分析定理@方法@问题 2003

相似文献(10条)