

康托定理与理发师悖论

文 兰

(北京大学数学科学学院 100871)

编者按 本文作者文兰是我国著名的数学家,中国科学院院士,第三世界科学院院士。在微分动力系统领域的若干基本问题上做出了重要贡献。文兰 1970 年毕业于北京大学数学力学系,1981 年在北京大学获得硕士学位,导师为廖山涛先生。1986 年在美国西北大学获得博士学位,导师为 R. Williams 教授。1988—1990 年在北京大学从事博士后研究,后留校任教。

在中国数学会今年 11 月召开的第十一次全国代表大会上,文兰院士获得华罗庚数学奖,这个奖项是为表彰中国数学家的终身成就设立的,每次奖励两位数学家。

在大会期间有 10 位院士分别到附近的大专院校和中学做了公众报告,这篇文章就是文兰院士根据他在双流棠湖中学所做公众报告整理成文的。文兰院士曾任中国数学会理事长,对我国的中小学数学教育十分关注。

1 什么是悖论

我们给悖论下一个“进行式”的定义:悖论就是导致矛盾但原因不明的推理。

根据这一定义,一旦矛盾的原因找到了,悖论也就不再是悖论了。另外,矛盾的原因应该比较难于察觉。

这一定义可能与许多文献中对悖论的定义不同。笔者主张这一定义。

2 理发师悖论

某村有一理发师,恰给本村那些不给自己理发的人理发。请问他给不给自己理发?

若他给自己理发,则他是一个给自己理发的人。按照他的原则,他应该不给自己理发。矛盾。

若他不给自己理发,则他是一个不给自己理发的人。按照他的原则,他应该给自己理发。也矛盾。

这是一段有名的、非常有趣的推理。由于找不出矛盾的原因,这段推理就被称为“理发师悖论”。

但真的找不出矛盾的原因吗?

本文的目的就是说明,其实这一矛盾的原因并不难察觉,故理发师悖论不足以称为悖论。

3 理发师悖论的解决

让我们把理发师悖论再叙述一遍:

某村存在一理发师,恰给本村那些不给自己理发的人理发。请问他给不给自己理发?

若他给自己理发,则他是一个给自己理发的人。按照他的原则,他应该不给自己理发。矛盾。

若他不给自己理发,则他是一个不给自己理发的人。按照他的原则,他应该给自己理发。也矛盾。

如果这一次还不容易看出矛盾的原因,请注意,第二次陈述时,把第一次陈述里的第三个字“有”换成了“存在”。其他没动。

这样一换,是不是比较容易看出矛盾的原因了呢?

是的,应该说,这样一换,就比较容易看出,矛盾的原因是假设了这样一个理发师的存在。因此,这一矛盾无非说明,具有这种性质的理发师(即恰

给本村那些不给自己理发的人理发)在本村不存在罢了.

矛盾的原因找到了,悖论也就不成其悖论了,问题也就解决了.

4 文字游戏?

但矛盾的原因是怎样找到的呢?我们把“有”换成了“存在”.这是不是文字游戏,是不是偷换概念,是不是改变了问题呢?

当然不是.“有”就是“存在”.把“有”换成“存在”,没有改变问题,只是用语更科学、更醒目,使人注意到,原来这里隐藏着一个“存在”的假设.

假设,或者说前提,对推理是至关重要的.知道有假设,推出矛盾就不会大惊小怪,无非说明假设不正确罢了.但若不知道有假设,推出矛盾就会无法解释,就要惊呼为悖论了.因此,千万不要丢失、模糊任何假设.

5 引经据典

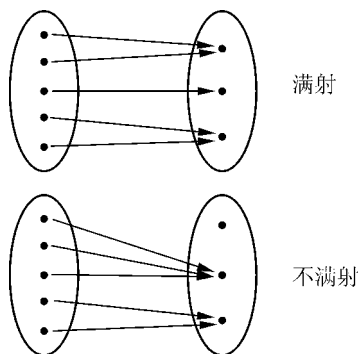
按说理发师悖论这样就解决了.不过人们可能不太放心.问题破解得太容易了:只换了一个词“存在”,就启发、导致了答案.这个答案太平淡无奇了.

为了让人彻底相信,这个答案一点也不平淡,问题确实出在存在性上,让我们引经据典,回顾集合论创始人康托的一个定理.为此先要回顾一下集合论的几个概念:映射、满射、子集的集.

设 X 和 Y 为两个集.所谓一个从 X 到 Y 的映射 $f: X \rightarrow Y$ 是指一个法则,它对 X 中的每一 x , 指定 Y 中唯一一个元素.这个为 x 指定的唯一元素称作 x 在 f 下的像,记为 $f(x)$.

称 X 为映射的定义域, Y 为映射的值域.

如果值域 Y 中的每一个元素都是定义域 X 中某个元素的像,就称 f 是一个满射.如图所示:



我们还需要一个概念:子集所成的集.设 X 为一个集.用 $P(X)$ 表示集 X 的所有子集所成的集.例如,若 $X = \{1, 2, 3\}$, 则

$$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

6 康托定理

康托定理 对任何集 X , 不存在从 X 到 $P(X)$ 的满射.

证明 任取一个映射 $f: X \rightarrow P(X)$. 要证 f 不是满射. 为此令

$$C = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

我们来证明,

$$\text{不存在 } z \in X, \text{ 使得 } f(z) = C.$$

为此用反证法. 假设存在 $z \in X$ 使得 $f(z) = C$. 那么,

若 $z \notin C$, 则 $z \in f(z)$. 但 $f(z) = C$, 故 $z \in C$. 矛盾.

若 $z \in C$, 则 $z \notin f(z)$. 但 $f(z) = C$, 故 $z \notin C$. 也矛盾.

这说明不存在 $z \in X$ 使得 $f(z) = C$. 故 f 不是满射. 康托定理得证.

康托定理是集合论最早,也最重要的定理之一.这个定理之优美,大概可以代表人类的智慧.这个定理一般放在大学数学系的三年级课程《实变函数论》中讲,但它几乎不用什么基础知识,是中学生可以理解、欣赏的.康托定理的陈述一般为“不存在从 X 到 $P(X)$ 的一一对应”,但实际上不存在满射.不存在满射当然就更不存在一一对应.

7 康托定理与理发师悖论的比较

康托定理与理发师悖论有什么关系呢?

我们来给康托定理一个“理发”的解释. 用 X 表示该村的人的集. 对每一村民 x , 用 $f(x)$ 表示村里被 x 理发的那些人的集, 即 x 的“顾客集”. 那么康托所考虑的集合

$$C = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

就表示村里那些不给自己理发的人所成的集. 康托的要点是证明了

不存在 $z \in X$, 使得 $f(z) = C$.

翻译成理发的语言就是:

村里不存在这样的理发师, 恰给本村那些不给自己理发的人理发. 这是康托证明的一个深刻的事实.

让我们把康托推理的过程也翻译成理发的语言看看:

若 $z \notin C$, 则 $z \in f(z)$. 但 $f(z) = C$, 故 $z \in C$. 矛盾.

(若他给自己理发, 则他是一个给自己理发的人. 按照他的原则, 他应该不给自己理发. 矛盾.)

若 $z \in C$, 则 $z \notin f(z)$. 但 $f(z) = C$, 故 $z \notin C$. 也矛盾.

(若他不给自己理发, 则他是一个不给自己理发的人. 按照他的原则, 他应该给自己理发. 也矛盾.)

可见, 理发师推理就是康托推理.

8 评述

那么, 为什么康托定理与理发师悖论一个是定理, 一个是悖论呢?

康托明确写道, 这样一个 z 的存在只是假设. 所以推出矛盾毫不惊讶, 而是立即做出结论: 不存在这样一个 z .

理发师悖论却用日常语言的“有”模糊了科学语言的“存在”. “存在”换成“有”以后, 就不知不

觉从假设变成了天经地义. 于是矛盾无法解释, 成了“悖论”.

可见, 我们在前面把“有”换回成“存在”, 确实不是文字游戏. 理发师悖论的问题确实出在存在性上.

但说“换回”对吗? 谁先谁后呢?

康托定理(1895), 理发师悖论(1907), 康托在先. 因此, 说“换回”是对的.

康托深刻地证明了, 不存在这样一个古怪的理发师. 12年后, 理发师悖论全盘照收了康托的推理过程, 却模糊了康托的存在性假设, 致使矛盾无法解释, 造成“悖论”.

这不像个恶作剧吗?

9 关于罗素悖论

读者可能知道罗素悖论, 听说过“理发师悖论是罗素悖论的通俗版”的说法.

如上所述, 理发师悖论几乎是对康托定理的一个恶作剧. 那么罗素悖论呢?

这个问题留给读者追踪、思考最好. 但急于知道答案是人类的优良天性, 所以也简单说明一下: 罗素悖论(1902)显然受到了康托定理的启发, 但它与理发师悖论有很大的不同. 它的假设隐蔽得多, 以致当时的集合论无法察觉. 当然该假设最终还是被后来的集合论彻底破解了, 所以罗素悖论早已不再是悖论了. 但罗素悖论极大地刺激了当时的集合论, 对集合论的进步有重大的意义.

【后记】其实, 像理发师悖论这样易于破解的“悖论”可以要多少有多少, 都是对康托定理的恶作剧. 比如“恰爱那些不爱自己的人”, “恰恨那些不恨自己的人”, “恰表扬那些不表扬自己的人”, “恰批评那些不批评自己的人”, “恰修理那些不修理自己的机器人”, “恰引用那些不引用自己的书”, 等等等等. 理发作为这些“反身及物动词”中的一个只是特别生动形象罢了.