

试以尺规作图求两相离圆的外公切线
——线段比例作图问题的“参考线段法”

李轻舟

不妨设 $R_1 > R_2$ 。连结 O_1O_2 并延长，上述问题可转化为：试在 O_1O_2 延长线上确定一点 A ，即 A 为 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 外公切线与 O_1O_2 延长线之交点。现在，试确定 A 的位置。

(一) 求作线段 lR_2/t

- 1、作 $\angle \alpha$ ，不妨令 $\angle \alpha = 90^\circ$ ；
- 2、于 $\angle \alpha$ 一边截取 $|OM_1| = l$ ，另一边截取 $|OM_2| = R_2$ ；
- 3、于 OM_1 上截取 $|OM_3| = t$ ，不妨设 $R_2 < t < l$ ；
- 4、连结 M_2M_3 ；
- 5、过 M_1 作直线 $M_1M_4 \parallel M_2M_3$ 交 OM_2 于 M_4 。

则线段 $|OM_4| = lR_2/t$ 即是第一步所求， t 为参考线段长度。引入参考线段的思路源自笛卡尔《方法论》附篇《几何学》中的思想。

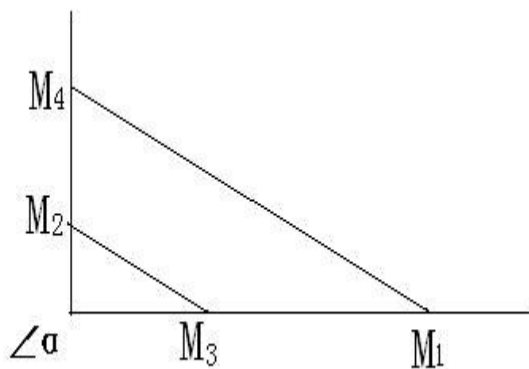


图 4

(I) 证明：由已知

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \angle M_2OM_3 = \angle M_4OM_1 = 90^\circ \\ M_2M_3 \parallel M_1M_4 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \angle M_2OM_3 = \angle M_4OM_1 \\ \angle M_2M_3O = \angle M_4M_1O \end{cases} \\
& \Rightarrow \triangle M_2OM_3 \sim \triangle M_4OM_1 \\
& \Rightarrow \frac{OM_2}{OM_4} = \frac{OM_3}{OM_1} \Rightarrow \frac{R_2}{|OM_4|} = \frac{t}{l} \\
& \Rightarrow |OM_4| = lR_2/t
\end{aligned}$$

(二) 求作线段 $\frac{lR_2}{R_1 - R_2}$

- 1、作 $\angle \beta$ ，不妨令 $\angle \beta = 90^\circ$ ；
- 2、于 $\angle \beta$ 一边截取 $|ON_1| = lR_2/t$ ，另一边截取 $|ON_2| = t$ ；
- 3、于 ON_1 上截取 $|ON_3| = R_1 - R_2$ ；
- 4、连结 N_2N_3 ；
- 5、过 N_1 作直线 $N_1N_4 \parallel N_2N_3$ 交 ON_2 于 N_4 。

则线段 $|ON_4| = \frac{lR_2}{R_1 - R_2}$ 即是第二步所求。

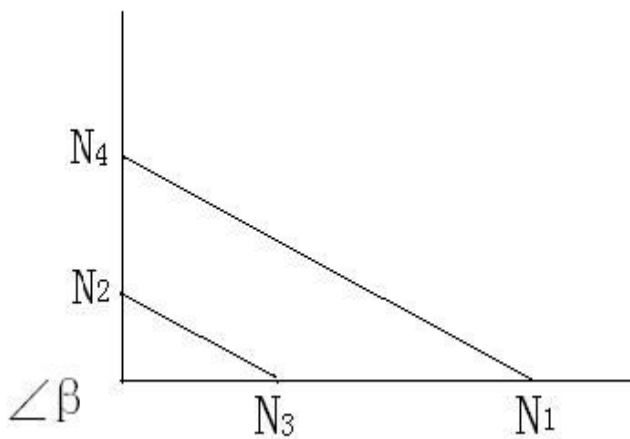


图 5

(II) 证明：由已知

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \angle N_2ON_3 = \angle N_4ON_1 = 90^\circ \\ N_2N_3 \parallel N_1N_4 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \angle N_2ON_3 = \angle N_4ON_1 \\ \angle N_2N_3O = \angle N_4N_1O \end{cases} \\
& \Rightarrow \triangle N_2ON_3 \sim \triangle N_4ON_1 \\
& \Rightarrow \frac{ON_2}{ON_4} = \frac{ON_3}{ON_1} \Rightarrow \frac{t}{|ON_4|} = \frac{R_1 - R_2}{lR_2/t} \\
& \Rightarrow |ON_4| = \frac{lR_2}{R_1 - R_2}
\end{aligned}$$

(三) 求公切线 l'

- 1、在 O_1O_2 延长线上截取线段 $|O_2A| = \frac{lR_2}{R_1 - R_2}$;
 - 2、作 O_2A 中点 B ;
 - 3、以 B 为圆心, $|BO_2| = |BA|$ 为半径作 $\odot B$ 交 $\odot O_2$ 于 C ;
 - 4、连结 AC ;
 - 5、作 O_1A 中点 E ;
 - 6、以 E 为圆心, $|EO_1| = |EA|$ 为半径作 $\odot E$ 交 $\odot O_1$ 于 D ;
 - 7、连结 AD ;
- 则 A 、 C 、 D 共线, 且 CD 即为所求 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的外公切线 l' 。

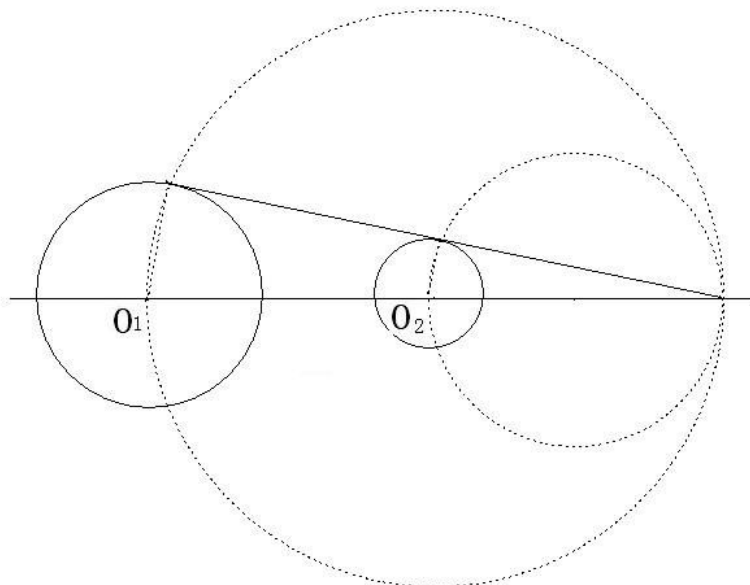


图 6

(III) 证明: 连结 O_2C 、 O_1D

则在 $\odot B$ 中, $\angle O_2CA$ 为直径 O_2A 所对的圆周角

故 $\angle O_2CA = 90^\circ \Rightarrow AC \perp O_2C \Rightarrow AC$ 切 $\odot O_2$ 于 C

同理可得: AD 切 $\odot O_1$ 于 D , 即 $\angle O_1DA = 90^\circ$

又由

$$\begin{aligned} |AO_2| &= \frac{IR_2}{R_1 - R_2} = \frac{|O_1O_2| \cdot |O_2C|}{|O_1D| - |O_2C|} \\ \Rightarrow |AO_2| \cdot |O_1D| - |AO_2| \cdot |O_2C| &= |O_1O_2| \cdot |O_2C| \\ \Rightarrow |AO_2| \cdot |O_1D| &= |O_1O_2| \cdot |O_2C| + |AO_2| \cdot |O_2C| \\ \Rightarrow |AO_2| \cdot |O_1D| &= |O_2C| (|O_1O_2| + |AO_2|) \\ \Rightarrow |AO_2| \cdot |O_1D| &= |O_2C| \cdot |AO_1| \\ \therefore \begin{cases} \angle O_1DA = \angle O_2CA = 90^\circ \\ \frac{|AO_2|}{|AO_1|} = \frac{|O_2C|}{|O_1D|} \end{cases} \\ \Rightarrow \triangle ACO_2 \sim \triangle ADO_1 &\Rightarrow \angle CAO_2 = \angle DAO_1 \end{aligned}$$

$\therefore A$ 、 C 、 D 三点共线

又 $\because AC$ 切 $\odot O_2$ 于 C 且 AD 切 $\odot O_1$ 于 D

$\therefore CD$ 为 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的一条外公切线即所求 l' 。

上述方法还可用于以尺规作图确定两外切圆的外公切线、两相交圆的外公切线以及两相离圆的内公切线。