幂函数

叶卢庆

富阳市新登中学 高一 13 班

什么是幂函数

定义

函数 $f(x) = x^a$ 叫幂函数，其中 a 是常数,x 是自变量，且 x 的定义域是使得 x^a 有意义的所有实数形成的集合.

什么是幂函数

定义

函数 $f(x) = x^a$ 叫幂函数，其中 a 是常数,x 是自变量，且 x 的定义域是使得 x^a 有意义的所有实数形成的集合.

例

- $f(x) = x = x^1$.
- $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, x \neq 0$.
- $f(x) = x^2$.

什么是幂函数

定义

函数 $f(x) = x^a$ 叫幂函数，其中 a 是常数,x 是自变量，且 x 的定义域是使得 x^a 有意义的所有实数形成的集合.

例

- $f(x) = x = x^1$.
- $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}, x \neq 0$.
- $f(x) = x^2$.
- $f(x) = x^3$.
- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, x \geq 0$.
- $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.
- $f(x) = x^{\frac{3}{2}}, x \geq 0$.

幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的单调性

定理

若 a 是正有理数，则 $f(x)=x^{a}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的单调性

定理

若 a 是正有理数, 则 $f(x)=x^a$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

证明.

由于 a 是正有理数, 因此 $a=\frac{p}{q}$, 其中 p,q 都是正整数. 对于任意的 $0\le x_1<x_2$,

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{x_1^a}{x_2^a}=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^a=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{p}{q}},$$

由于 $0\le\frac{x_1}{x_2}<1$, 因此 $0\le\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{q}}<1$, 于是 $0\le\left(\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p<1$. 因此 $0\le\frac{f(x_1)}{f(x_2)}<1$. 由于 $f(x_2)=x_2^{\frac{p}{q}}>0$, 因此不等式两边同时乘以 $f(x_2)$, 不等号不改变方向, 可得 $0\le f(x_1)<f(x_2)$. 因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. □

幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的单调性

问题

在上面的证明红字部分, 我们实质上使用了下面的两个结论. 请证明:

$$\text{当 } 0 \le r < 1, q \text{ 为正整数时}, 0 \le r^{\frac{1}{q}} < 1.$$

$$\text{当 } 0 \le r < 1, p \text{ 为正整数时}, 0 \le r^{p} < 1.$$

幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的单调性

推论

若 a 是负有理数, 则 $f(x)=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

证明.

$f(x)=x^a=\frac{1}{x^{-a}}$. 根据前述定理,$x^{-a}$ 随着定义域中 x 的增大而增大, 因此 $\frac{1}{x^{-a}}$ 随着定义域中 x 的增大而减小. 因此 $f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上单调递减. $\square$

不同幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的大小

问题

设 a, b 都为有理数，且 $a > b$. 比较 $f(x) = x^a$ 和 $g(x) = x^b$ 的大小，其中 $x > 0$.

不同幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的大小

问题

设 a, b 都为有理数，且 $a > b$. 比较 $f(x) = x^a$ 和 $g(x) = x^b$ 的大小，其中 $x > 0$.

答.

- 当 $0 < x < 1$ 时,$0 < \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} < 1$，即 $0 < f(x) < g(x)$.

不同幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的大小

问题

设 a,b 都为有理数，且 $a>b$. 比较 $f(x)=x^a$ 和 $g(x)=x^b$ 的大小，其中 $x>0$.

答.

- 当 $0<x<1$ 时，$0<\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^a}{x^b}=x^{a-b}<1$，即 $0<f(x)<g(x)$.
- 当 $x=1$ 时，$f(x)=g(x)=1$.

不同幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的大小

问题

设 a,b 都为有理数，且 $a>b$. 比较 $f(x)=x^a$ 和 $g(x)=x^b$ 的大小，其中 $x>0$.

答.

- 当 $0<x<1$ 时，$0<\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^a}{x^b}=x^{a-b}<1$，即 $0<f(x)<g(x)$.
- 当 $x=1$ 时，$f(x)=g(x)=1$.
- 当 $x>1$ 时，$\frac{f(x)}{g(x)}=x^{a-b}>1$，即 $f(x)>g(x)$.

□

不同幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的增长速度

问题

设 a, b 都为有理数，且 $a > b > 0$. 当 x 趋于正无穷大时，比较 $f(x) = x^a$ 和 $g(x) = x^b$ 的增长速度.

答.

$$f(x) - g(x) = x^a - x^b = x^b(x^{a-b} - 1),$$

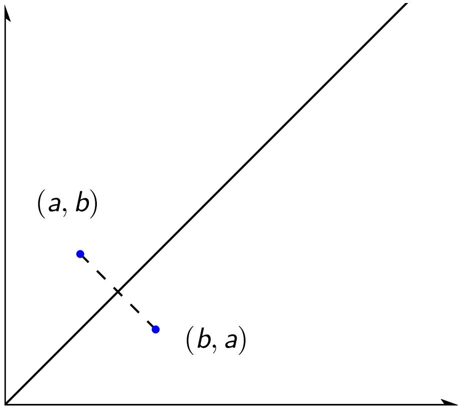
当 x 趋于正无穷时,x^b 趋于正无穷，且 $x^{a-b} - 1$ 也按照幂函数的方式趋于正无穷，可见，随着 x 的增大,$f(x)$ 会比 $g(x)$ 越来越大. □

问题

设函数 $f(x)=x^a, g(x)=x^{\frac{1}{a}}$，其中 $a\neq 0$. 现在我们来研究 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图像有什么关系.

答.

$y=x^a$ 图像上的任意一点 (x_0, x_0^a) 都对应着 $y=x^{\frac{1}{a}}$ 图像上的点 (x_0^a, x_0). 而点 (x_0, x_0^a) 和点 (x_0^a, x_0) 是关于直线 $y=x$ 轴对称的. 因此 $y=x^3$ 的图像和 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. □


(a, b)
(b, a)

题目

证明函数 $f(x)=x^3, x\in\mathbf{R}$ 和函数 $g(x)=x^{\frac{1}{3}}, x\in\mathbf{R}$ 都是奇函数.

题目

证明: 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 是奇函数, 且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是单调递增函数.

题目

证明: 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义域上的奇函数, 且当 $x_0>0$ 时, $f(x_0)>g(x_0)$, 则 $f(-x_0)<g(-x_0)$.

偶性

题目

证明函数 $f(x)=x^{-4}$ 和 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 在定义域上是偶函数.$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ 在定义域上是不是偶函数?

题目

证明:若定义域上的函数 $f(x)$ 是偶函数,且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递减函数,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调递增函数.

题目

证明:若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义域上的偶函数,且当 $x_0>0$ 时,$f(x_0)>g(x_0)$,则 $f(-x_0)>g(-x_0)$.