幂函数

叶卢庆

富阳市新登中学 高一 13 班

什么是幂函数

定义

函数 $f(x) = x^a$ 叫幂函数，其中 a 是常数,x 是自变量，且 x 的定义域是使得 x^a 有意义的所有实数形成的集合.

什么是幂函数

定义

函数 $f(x)=x^{a}$ 叫幂函数，其中 a 是常数,x 是自变量，且 x 的定义域是使得 x^{a} 有意义的所有实数形成的集合.

例

- $f(x)=x=x^{1}$.
- $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}, x\neq 0$.
- $f(x)=x^{2}$.

什么是幂函数

定义

函数 $f(x)=x^{a}$ 叫幂函数，其中 a 是常数,x 是自变量，且 x 的定义域是使得 x^{a} 有意义的所有实数形成的集合.

例

- $f(x)=x=x^{1}$.
- $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}, x\neq 0$.
- $f(x)=x^{2}$.
- $f(x)=x^{3}$.
- $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, x\geqslant 0$.
- $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$.
- $f(x)=x^{\frac{3}{2}}, x\geqslant 0$.

幂函数在 $(0, +\infty)$ 上的单调性

定理

若 a 是正有理数，则 $f(x) = x^a$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的单调性

定理

若 a 是正有理数，则 $f(x)=x^a$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

证明.

由于 a 是正有理数，因此 $a=\frac{p}{q}$，其中 p, q 都是正整数. 对于任意的 $0\leqslant x_1<x_2$，

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{x_1^a}{x_2^a}=(\frac{x_1}{x_2})^a=(\frac{x_1}{x_2})^{\frac{p}{q}}=((\frac{x_1}{x_2})^{\frac{1}{q}})^p,$$

由于 $0\leqslant\frac{x_1}{x_2}<1$，因此 $0\leqslant(\frac{x_1}{x_2})^{\frac{1}{q}}<1$，于是 $0\leqslant((\frac{x_1}{x_2})^{\frac{1}{q}})^p<1$. 因此 $0\leqslant\frac{f(x_1)}{f(x_2)}<1$. 由于 $f(x_2)=x_2^{\frac{p}{q}}>0$，因此不等式两边同时乘以 $f(x_2)$，不等号不改变方向，可得 $0\leqslant f(x_1)<f(x_2)$. 因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. □

推论

若 a 是负有理数，则 $f(x)=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的单调性

推论

若 a 是负有理数，则 $f(x)=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

证明.

$f(x)=x^a=\frac{1}{x^{-a}}$. 根据前述定理，$x^{-a}$ 随着定义域中 x 的增大而增大，且 $x^{-a}>0$，因此 $\frac{1}{x^{-a}}$ 随着定义域中 x 的增大而减小. 因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. $\square$

不同幂函数在 $(0, +\infty)$ 上的大小

问题

设 a, b 都为有理数，且 $a > b$. 比较 $f(x) = x^a$ 和 $g(x) = x^b$ 的大小，其中 $x > 0$.

不同幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的大小

问题

设 a, b 都为有理数，且 $a > b$. 比较 $f(x) = x^a$ 和 $g(x) = x^b$ 的大小，其中 $x > 0$.

答.

- 当 $0 < x < 1$ 时,$0 < \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} < 1$, 即 $0 < f(x) < g(x)$.

不同幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的大小

问题

设 a,b 都为有理数，且 $a>b$. 比较 $f(x)=x^a$ 和 $g(x)=x^b$ 的大小，其中 $x>0$.

答.

- 当 $0<x<1$ 时,$0<\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^a}{x^b}=x^{a-b}<1$, 即 $0<f(x)<g(x)$.
- 当 $x=1$ 时,$f(x)=g(x)=1$.

不同幂函数在 $(0,+\infty)$ 上的大小

问题

设 a,b 都为有理数，且 $a>b$. 比较 $f(x)=x^a$ 和 $g(x)=x^b$ 的大小，其中 $x>0$.

答.

- 当 $0<x<1$ 时, $0<\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^a}{x^b}=x^{a-b}<1$, 即 $0<f(x)<g(x)$.
- 当 $x=1$ 时, $f(x)=g(x)=1$.
- 当 $x>1$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)}=x^{a-b}>1$, 即 $f(x)>g(x)$.

□

幂函数 $f(x)=x^a$ 和 $g(x)=x^{\frac{1}{a}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图像

问题

设函数 $f(x)=x^a$,$g(x)=x^{\frac{1}{a}}$, 其中 $a\neq 0$. 现在我们来研究 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图像有什么关系.

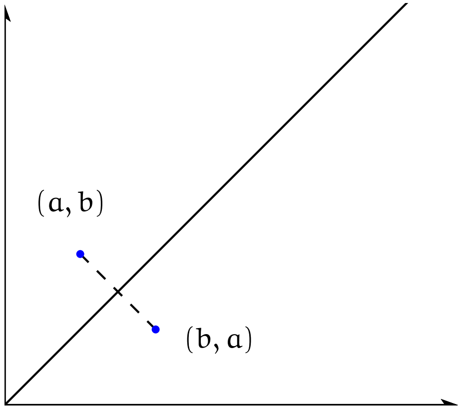
幂函数 $f(x)=x^a$ 和 $g(x)=x^{\frac{1}{a}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图像

问题

设函数 $f(x)=x^a, g(x)=x^{\frac{1}{a}}$, 其中 $a\neq 0$. 现在我们来研究 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图像有什么关系.

答.

$y=x^a$ 图像上的任意一点 (x_0,x_0^a) 都对应着 $y=x^{\frac{1}{a}}$ 图像上的点 (x_0^a,x_0). 而点 (x_0,x_0^a) 和点 (x_0^a,x_0) 是关于直线 $y=x$ 轴对称的. 因此 $y=x^3$ 的图像和 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称. □


(a, b)
(b, a)