



大学物理先修课教材

电磁学

黄诗登 鲁志祥 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书系统地阐述了电磁现象的基本概念和基本规律,内容较为丰富.选材既照顾到优秀的高中生,又照顾到大学生.全书共分6章,内容涉及静电学的基本规律、静电场中的导体与电介质、恒定磁场、电磁感应、电磁场与电磁波、直流电与交流电等.

本书可作为重点高中奥林匹克竞赛的培训教材,也可作为高等学校本科物理类专业电磁学课程的教材,还可供中学物理教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理先修课教材.电磁学/黄诗登,鲁志祥编著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2018.2

ISBN 978-7-312-04330-7

I. 大… II. ①黄… ②鲁… III. 物理学—高等学校—教材 IV. O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 240707 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
<https://zgkxjsdxcs.tmall.com>
印刷 安徽国文彩印有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 23.5
字数 601 千
版次 2018 年 2 月第 1 版
印次 2018 年 2 月第 1 次印刷
定价 58.00 元

前 言

在中学开设大学物理先修课程,是一次创新性的教学改革试验,旨在为有扎实的数理基础、学有余力且希望进一步探索物理世界的优秀高中生提供具有挑战性的物理课程.

电磁学是最重要的、近代最有用的经典物理学内容,它已形成了严格的、易于初学者接受的体系.本书在结构体系上采用对称的两条主线,由浅入深地叙述基本概念、基本规律和基本方法.本书以优美对称的体系结构讨论电磁学的基本概念和基本规律,以便学生在理解基本概念和基本规律的前提下掌握电磁学各部分内容的内在联系,逐步培养分析问题和解决问题的能力.同时,在阐述的过程中,力图引导学生学会使用数学.在普通物理学中,数学主要用于概括和表述物理内容,以数学为工具的逻辑思维应该占有一定分量.因此,本书在数学上既采用了积分形式,又采用了微分形式,同时还涉及一些矢量分析的内容.

本书是在大学先修课程教学和高中奥林匹克竞赛培训的基础上,为培养物理人才而编写,并经过多年教学实践,不断修改,最终完成的.

黄光颖老师和王翠老师参与了本书校对,华中师范大学第一附属中学 2017 级物理组使用过本书讲稿,为本书的完善提供了帮助.

由于作者水平有限,书中错误和不妥之处在所难免,恳请各位读者指正.

作 者

2017 年 10 月

目 录

前言	(i)
第 1 章 真空中的静电场	(1)
1.1 库仑定律	(1)
1.2 静电场 电场强度	(4)
1.3 静电场的高斯定理	(12)
1.4 静电场的环路定理	(18)
1.5 综合例题	(27)
思考题	(43)
习题	(43)
习题解答	(45)
第 2 章 静电场中的导体与电介质	(49)
2.1 静电场中的导体	(49)
2.2 电容和电容器	(56)
2.3 静电场中的电介质	(61)
2.4 静电场的能量	(69)
2.5 综合例题	(72)
思考题	(100)
习题	(101)
习题解答	(103)
第 3 章 稳恒磁场	(112)
3.1 稳恒电流	(112)
3.2 毕奥-萨伐尔定律	(116)
3.3 磁场的高斯定理和安培环路定理	(126)
3.4 洛伦兹力和安培力	(133)
3.5 磁介质	(144)
3.6 综合例题	(153)
思考题	(190)
习题	(190)
习题解答	(196)

第4章 电磁感应	(208)
4.1 法拉第电磁感应定律	(208)
4.2 动生电动势	(213)
4.3 感生电动势	(217)
4.4 自感现象和互感现象	(224)
4.5 磁场的能量	(231)
4.6 综合例题	(234)
思考题	(258)
习题	(259)
习题解答	(264)
第5章 电磁场与电磁波	(274)
5.1 麦克斯韦电磁场理论的两个基本假说	(274)
5.2 麦克斯韦方程组	(279)
5.3 赫兹实验	(282)
5.4 平面电磁波及其性质	(286)
思考题	(289)
习题	(290)
习题解答	(292)
第6章 直流电与交流电	(298)
6.1 直流简单电路	(298)
6.2 基尔霍夫定律	(304)
6.3 交流电路概述	(306)
6.4 简谐交流电路的分析方法	(311)
6.5 交流电的功率	(317)
6.6 谐振电路	(321)
6.7 变压器原理简介	(324)
6.8 综合例题	(327)
思考题	(357)
习题	(358)
习题解答	(360)
参考文献	(369)

理想模型). 其场强的分布特点是: 在空间所产生的电场场强大小处处相等, 与场点到平面的距离无关, 方向垂直于平面. 故无限大均匀带电平面两侧的电场是均匀场. 若平面带正电, 则 E 从带电平面指向两侧; 若平面带负电, 则 E 从两侧指向带电平面.

(2) 当 $x \gg R$ 时 (P 点无限远离带电圆盘), 由场强公式可得

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{x^2}}} \right)$$

将 $\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 用二项定理展开

$$\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{R^2}{x^2}\right)^2 - \cdots \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2}$$

即可得到

$$E \approx \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

不难看出, 此时带电圆盘产生的电场近似等于点电荷的电场.

1.3 静电场的高斯定理

库仑定律给出的是力与电荷之间的关系, 而我们更关心的是场强与场源电荷之间的关系. 本节讨论的静电场的高斯定理正是通过“电通量”间接地给出了这一关系, 它反映了静电场的一个重要性质——有源性.

1.3.1 电场强度通量

为了避免矢量求和与积分, 而又能定量描述场强与场源电荷之间的关系, 这里引入电场强度通量 (简称电通量) 的概念.

通量是描述矢量场性质的重要物理量之一, 它总是和某个曲面联系在一起的. 如图 1.8 所示, 在任意的矢量场 $\mathbf{A}$ 中, 取任意形状的曲面 S . 将它分成许多小面积元 $d\mathbf{S}$, 则 $\mathbf{A}$ 通过 $d\mathbf{S}$ 的通量为

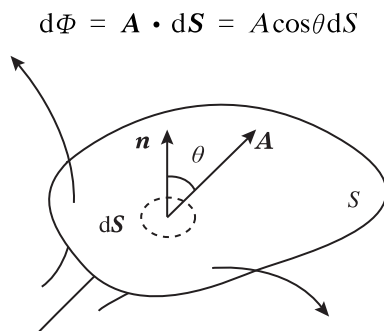


图 1.8 通量的定义

$\mathbf{A}$ 对整个曲面的通量为

$$\Phi_A = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S A \cos\theta dS$$

若曲面 S 是闭合曲面, 则 $\mathbf{A}$ 对整个曲面的通量为

$$\Phi_A = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S A \cos\theta dS$$

在静电场中, 描述场的矢量是电场强度矢量 $\mathbf{E}$. $\mathbf{E}$ 对某个曲面的通量即为电场强度通量, 简称电通量. 设场中有任意形状的给定曲面 S , $\mathbf{E}$ 对其中任意一个面积元 $d\mathbf{S}$ 的通量为 (参见图 1.8, 可以设想图中的任意矢量 $\mathbf{A}$ 为静电场的场强 $\mathbf{E}$)

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cos\theta dS \quad (1.11)$$

$\mathbf{E}$ 对整个曲面 S 的通量为

$$\Phi_E = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S E \cos\theta dS$$

若曲面是闭合曲面, 则电通量为

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E \cos\theta dS \quad (1.12)$$

利用前述“电场线”的概念与图像, 可以从几何上加深我们对电通量的理解 (形象化的理解). 一般而言, 可以这样定义电通量: 通过电场中某个曲面的电场线的总根数 (条数) 称为通过该曲面的电通量. 对于非闭合的曲面, 面上各处的法线正方向可以任意选取指向曲面的这一侧或那一侧, 而对闭合曲面来说, 通常规定自内向外的方向为面积元法线的正方向. 所以, 如果电场线从闭合曲面内向外穿出, 电通量为正; 如果电场线从外部穿入闭合曲面, 电通量则为负. 注意, 电通量是标量, 且是指场强对于某个给定面积的电通量.

例 1 如图 1.9(a) 所示, 在点电荷 q 的电场中, 取半径为 R 的圆形平面, 设 q 在垂直于平面并通过圆心 O 的轴线上的 A 点处, A 点与 O 点的距离为 d , 试计算通过此平面 (阴影部分) 的电通量 Φ_E .

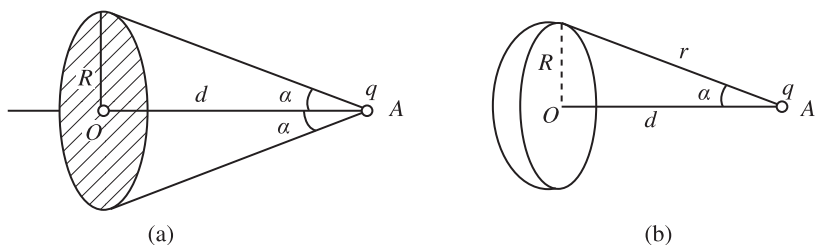


图 1.9

解 如图 1.9(b) 所示, 可以发现, 通过圆平面的电场线的总数与通过以 A 为球心, r 为半径, 以圆平面四周为周界的球冠曲面的电场线的总数相同, 即通过圆平面的 $\mathbf{E}$ 通量与通过球冠曲面的 $\mathbf{E}$ 通量相同. 平面的电通量不容易求解, 可直接求球冠曲面的电通量.

点电荷 q 在以它为球心的球面上产生的电通量是均匀分布的, 以 Φ_E 表示通过球冠曲面的电通量, Φ_{E_0} 表示通过整个球面的电通量. 整个球面的面积 $S_0 = 4\pi r^2$, 球冠面积 $S = 2\pi r(r-d)$, 且不难得到 $\Phi_{E_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$, 则

$$\Phi_E = \Phi_{E_0} \cdot \frac{S}{S_0} = \frac{\Phi_{E_0}}{4\pi r^2} \cdot 2\pi r(r-d) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi(\sqrt{R^2+d^2}-d)}{\sqrt{R^2+d^2}}$$

1.3.2 静电场的高斯定理

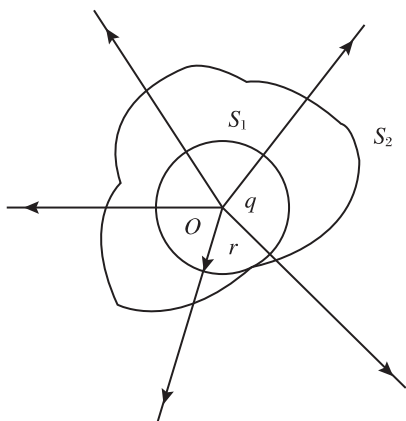


图 1.10 高斯定理的证明

1839 年,高斯从理论上证明了电通量和电荷之间的一个简单关系.这一反映电场与场源之间关系的基本规律可以利用库仑定律和场强的叠加原理导出.如图 1.10 所示,先看一种特殊的情况,包围点电荷的闭合曲面是以点电荷为球心的同心球面.若真空中有一正点电荷 q ,以 q 所在的点为球心,取任意长 r 为半径,作一球面 S_1 包围这个点电荷.点电荷 q 的电场具有球对称性,我们知道,球面 S_1 上任一点的场强 E 的大小都是 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, E 的方向都沿矢径方向,处处与球面正交.由式(1.12)可知,通过整个球面的电通

量为

$$\Phi_E = \oint_{S_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

然后,设想有另一任意形状的闭合曲面 S_2 , S_2 与球面 S_1 包围同一个点电荷 q ,由电场线的连续性,可知通过闭合面 S_2 的电场线条数和 S_1 是一样的,电通量不变,上式仍能成立.由此即可得到结论:通过任一闭合曲面的电通量等于闭合曲面内的电荷 q 除以真空介电常数 ϵ_0 ,与闭合曲面的形状无关.

以上讨论了在闭合曲面内仅含有一个点电荷时,通过闭合曲面的电通量.下面进一步讨论在闭合曲面内含有任意电荷系时,通过闭合曲面的电通量.由于任意电荷系(包括电荷连续分布的任意带电体)均可看成是点电荷的集合体,每一点电荷的电场线条数为 $\frac{q}{\epsilon_0}$,所以通过包围任意电荷系的闭合曲面的电通量 Φ 应等于组成该电荷系的各点电荷发出(或终止)的通过该闭合曲面的电场线条数,即等于电通量 $\Phi_{E_1}, \Phi_{E_2}, \dots, \Phi_{E_n}$ 的代数和.由于 $\Phi_{E_1} = \frac{q_1}{\epsilon_0}, \Phi_{E_2} = \frac{q_2}{\epsilon_0}, \dots, \Phi_{E_n} = \frac{q_n}{\epsilon_0}$, 所以有

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad (1.13)$$

最后,对于任意的闭合曲面而言,一些电荷在曲面的外面,即闭合曲面没有包围这些电荷,可以证明,这些电荷产生的电场对上述闭合曲面的电通量等于零.

综上所述,真空中静电场的高斯定理可以表述为:在真空中的任何静电场中,通过任一闭合曲面的电通量等于该曲面内所有电荷量的代数和除以 ϵ_0 ,而与该曲面外的电荷无关.

高斯定理中的任一闭合曲面一般称为“高斯面”,高斯定理的数学表达式就是公式(1.13).若电荷是连续分布的带电体,则高斯定理的数学表述为

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

式中, V 为 S 所包围的体积(高斯面内的体积), ρ 为电荷体密度. 根据具体的电荷分布情况, 上面的公式还可以是面积分或线积分的形式.

高斯定理并没有指明源电荷所产生的静电场的具体分布情况, 而是以数学形式描述了电场与场源电荷间的普遍关系. 对于高斯定理的物理意义, 可从以下几个方面来理解:

(1) 若闭合面内存在正(负)电荷, 则通过闭合面的电通量为正(负), 表明有电场线从面内(面外)穿出(穿入). 若闭合面内没有电荷, 则通过闭合面的电通量为零, 意味着有多少电场线穿入就有多少电场线穿出, 说明在没有电荷的区域内电场线不会中断. 此外, 若闭合面内只是电荷的代数和为零, 则有多少电场线进入面内终止于面内负电荷, 就会有相同数目的电场线从面内正电荷发出并穿出面外.

(2) 在闭合面内, 只要电荷的代数和保持不变, 其空间分布的变化只会改变闭合面上各点场强的大小和方向, 不会改变通过整个闭合面的电通量. 而在闭合面外, 有无电荷及电荷在空间如何分布, 虽然会影响闭合面上各处场强的大小和方向, 但对通过整个闭合面的电通量没有贡献. 即高斯定理左边积分号内的场强 E 是面内、面上与面外空间中所有电荷总的贡献, 而右边的电荷代数和只是闭合面内所包围的电荷.

可见, 高斯定理说明了正电荷是发出电场线的“源”, 负电荷是电场线终止并汇聚的“源”, 明确地将电场与激发电场的源联系起来, 从而表明静电场是有源场(有通量源), 这是静电场的最重要的两个基本性质之一.

高斯定理是以库仑定律为基础建立的, 是电场力的平方反比规律和叠加原理的直接结果, 因此它与库仑定律并不是互相独立的, 而是用不同形式表示的电场与场源电荷关系的同一客观规律, 但它的应用范围比库仑定律更加广泛. 库仑定律只适用于静电场, 而高斯定理不仅适用于静电场, 也适用于变化的电场, 它是电磁场理论的基本定理之一.

1.3.3 高斯定理的应用

高斯定理不仅在理论上具有重要性, 在解决静电场问题上也有其实用价值. 高斯定理的一个重要应用就是在场强分布具有某种对称性的条件下, 提供一种求解场强分布的简便方法. 与运用库仑定律求解静电场问题相比, 在具有某种对称性的电场中应用高斯定理, 可以经过更简单的计算求出场强的分布.

应用高斯定理计算场强的步骤一般如下:

(1) 分析给定问题中的场强分布是否具有某种对称性, 如球对称、面对称、轴对称等, 从而判断能否用高斯定理简便地求出场强分布. 这是运用定理的前提.

(2) 根据问题的对称性, 过场点作恰当的高斯面. 这是运用定理的关键. 要求高斯面形状尽量简单规则, 面上的场强最好大小处处相等, 面上场强的方向尽量处处与面平行或垂直, 以便在一部分面积分中场强可以从积分号中提出来, 而在另一部分面积分中为 0.

(3) 计算出通过高斯面的电通量及高斯面内的总电荷.

(4) 应用高斯定理求出场强.

应当明确, 在电场不具有对称性的情况下, 高斯定理仍然是成立的, 如有限长的带电直线、有限大的带电平面、不均匀带电体的电场等, 但在这些情况下, 由于计算太过复杂, 无法

用高斯定理直接求得场强的分布.

用高斯定理求场强分布,一般需要电场满足某些“高度”的对称性(比如球对称等).下面讨论几个应用高斯定理计算对称分布场强的典型例子.

例 2 求均匀带电球面的场强分布.

解 设球面半径为 R ,带电量为 q .如图 1.11 所示,分析问题的对称性.显然问题具有球对称性,因此不论场点 P 位于球面内还是球面外,带电球面在点 P 的场强都应沿径向方向(若 q 为正,则沿 OP 向外;若 q 为负,则沿 OP 向内),并且在半径 $r = OP$ 的球面上各点场强的大小都相等.一般地,一个电荷呈球对称分布的带电体产生的电场也具有球对称性.

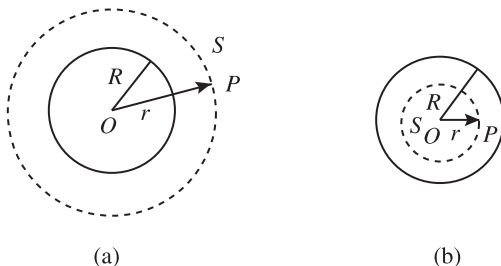


图 1.11 均匀带电球面

先计算球面外任意一个场点 P 处的场强,如图 1.11(a)所示.作半径 $r = OP$ 的球形高斯面,通过这个球面的电通量为

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S E \cos\theta dS = E \oiint_S dS = 4\pi r^2 E$$

由高斯定理有

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

所以

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

可见,均匀带电球面在球外产生的场强与位于球心、有相同电荷量的点电荷产生的场强相同.

对于球面内任一场点 P ,如图 1.11(b)所示,同样可过场点 P 作半径 $r = OP$ 的高斯面,但此时包围在高斯面内的电荷为零,故有

$$4\pi r^2 E = 0$$

$$E = 0$$

注意,计算结果显示,在带电球面的内外区域,场强发生了一个突变.这个结论对于任意的带电面而言都是成立的.

例 3 求无限长均匀带电直线的场强分布.

解 设电荷线密度为 λ .如图 1.12(a)所示,由于带电直线无限长,且电荷分布是均匀的,所以其产生的电场的场强沿垂直于该直线的矢径方向,而且在距直线等距离各点处的场

强 E 的大小相等,即电场是轴对称的,可以考虑用高斯定理解决此问题.

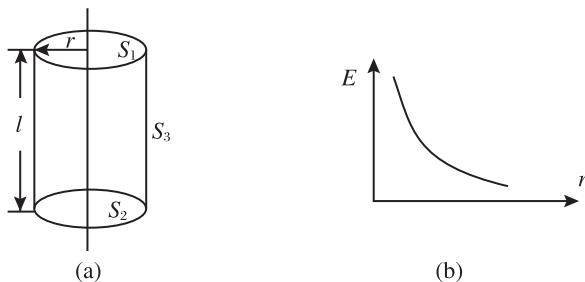


图 1.12 长直带电导线的电场

为了求解带电直线周围的场强分布,选距离带电直线为 r 的场点 P ,且过 P 点作一个以带电直线为轴的圆柱状闭合面 S ,作为高斯面,它由三个面组成:上底面 S_1 ,下底面 S_2 ,侧面 S_3 ,高度为 l .

由于场强 E 与圆柱上、下底面的法线垂直,所以通过两个底面的电通量为零,则有

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_3} E \cos\theta dS = E \iint_{S_3} dS = 2\pi r l \cdot E$$

由高斯定理,有

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

所以

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

得场强为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

可见,场强 E 与 r (场点到带电直线的垂直距离) 成反比,场强的分布图参见图 1.12(b).

例 4 求无限大均匀带电平面的场强分布.

解 设平面上的电荷面密度为 σ . 由于均匀带电平面是无限大的,带电平面两侧附近的电场具有面对称性,所以平面两侧的场强垂直于该平面,而且在距平面等距离处场强的大小相等(证明略). 取如图 1.13 所示的高斯面,此高斯面是个圆柱面,它穿过带电平面,且对带电平面而言是左右两边对称的,其侧面 S_3 的法线与 $\mathbf{E}$ 垂直,所以,通过侧面的电通量为零. 而两个底面 S_1 和 S_2 的法线与 $\mathbf{E}$ 平行,且底面上 $\mathbf{E}$ 的大小是相等的,设底面的面积为 S ,则通过高斯面的电通量为

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2 \iint_{\text{底面}} E \cos\theta dS = 2ES$$

由高斯定理可得

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

故有

$$2ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

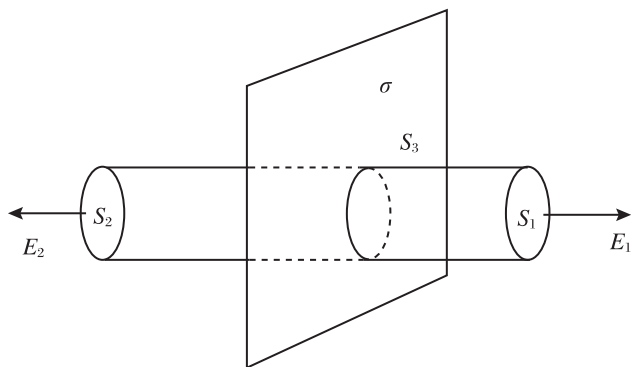


图 1.13 带电平面的电场

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

结果表明,场强与场点到带电面的距离无关,是一个常量,即无限大均匀带电平面周围的电场是匀强电场.

1.4 静电场的环路定理

静电场的环路定理是反映静电场性质的另一个定理.它与高斯定理结合起来,才能完整地描述静电场.

1.4.1 静电场的环路定理

1. 静电场力做功

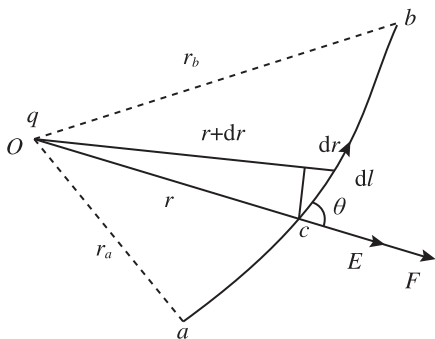


图 1.14 电场力做功

我们首先计算在点电荷的电场中静电场力所做的功.如图 1.14 所示,在静止的点电荷 q 产生的电场中,设有一检验电荷 q_0 由 a 点经某一路径 L 移到 b 点,在位移元上,电场力 F 对 q_0 做功

$$\begin{aligned} dA &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F dl \cos \theta \\ &= F dr = q_0 E dr \\ &= \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \end{aligned}$$

从 a 到 b , 总功的大小为

$$A = \int_a^b dA = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

结果表明,检验电荷 q_0 在点电荷的场中由 a 点经任意一条路径 L 移到 b 点时,电场力做的功只与检验电荷 q_0 的起点与终点位置有关,而与其经过的路径无关.

下面,再计算在点电荷系的电场中电场力所做的功.设在由 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 等点电荷所

1.5 综合例题

例1 本题讨论与场强叠加为零的两个佯谬相关的若干静电场问题.

(1) 如图 1.22(a) 所示, 直线段 AB 的电荷线密度与圆弧段 $A'B'$ 的电荷线密度为相同的常量 $\lambda, \lambda > 0$, O 为圆弧圆心, R 为半径, θ 为圆心角, 试证直线段电荷在 O 点的场强与圆弧段电荷在 O 点的场强相同, 记为 E_O , 进而导出 E_O .

(2) 如图 1.22(b) 所示, 带电圆弧形薄板的内外半径分别为 R_1, R_2 , 圆心角为 θ , 电荷面密度 σ 为常量, $\sigma > 0$, 试求圆心 O 处的场强 E_O .

(3) 如图 1.22(c) 所示, 半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_2 > R_1$) 的同心带电双扇形薄板, 电荷面密度 $\sigma > 0$, 为常量. 右侧取 $r_1 \sim r_1 + dr_1$ 圆弧带, 左侧取 $r_2 \sim r_2 + dr_2$ 圆弧带, 其关系为

$$\frac{dr_1}{dr_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

利用第(2)问的解答, 某学生首先证得这两个圆弧带的电荷在圆心 O 处的合场强为零, 进而“导得”此双扇形薄板电荷在 O 处合场强为零. 请你完成该学生的证明和“导得”的过程, 进而判断其最后结论之对错. 若错, 试分析出错的原因.

(4) 图 1.22(d) 所示的三角框架 ABC 的三条边上均匀带电. 除去无穷远外, 请找出所有场强为零的点.

(5) 根据第(4)问的解答, 另一学生“证得”图 1.22(e) 所示的均匀带电三角形薄板 ABC 除去无穷远外, 场强为零的点与第(4)问所得的场强为零的点一致. 请你完成该学生的“证得”过程, 进而判断其结论之对错. 若错, 试分析出错的原因.

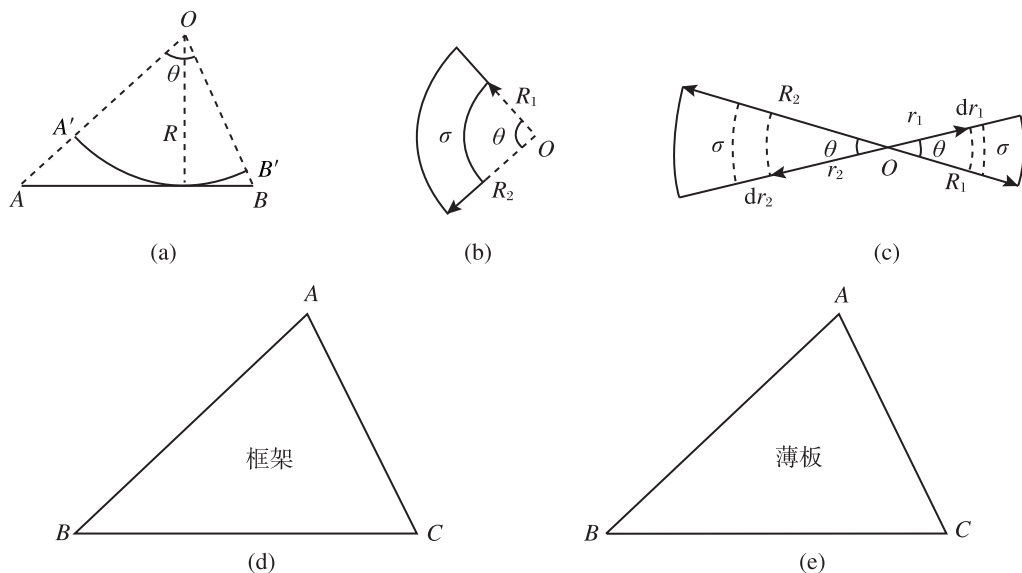


图 1.22

由功能关系可得

$$\begin{aligned} A &= (W_1 + W_2) - W = - \left(W_+ + W_- + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \right) \\ &= \frac{2e^2}{2\pi\epsilon_0 a} \ln 2 - \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a} (2\ln 2 - 1) \end{aligned}$$

思考题

1. 根据电场强度的定义式 $E = \frac{F}{q}$, 能否得出场强与电荷成反比的结论?
2. 点电荷的场强公式为 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, 从数学上看, r 趋于 0 时, E 趋于 ∞ , 应如何解释?
3. 库仑定律是否对任意形状的一对带电体都适用? 试说明之.
4. 在正方形的四个顶点上, 放置四个带相同电荷量的同号点电荷, 试定性画出其电场线的示意图.
5. 静电场强度沿一闭合回路积分 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 表明了电场线的什么性质?
6. 电场线是否会相交? 为什么?
7. 静电场中, 电场线是否一定与等势面正交?
8. 静电场中, 电场强度为零的地方, 电势是否一定为零? 电势为零的地方, 电场强度是否一定为零? 请举例说明.
9. 静电场中, 电场强度相等的地方, 电势是否一定相等? 电势相等的地方, 电场强度是否一定相等? 请举例说明.
10. 静电场中, 电场强度大的地方, 电势是否一定高? 电势高的地方, 电场强度是否一定大? 请举例说明.
11. 静电场和万有引力场都属于保守场, 能否写出万有引力场中的高斯定理?
12. 一个金属球带上正电荷后, 该球的质量是增大、减小还是不变?
13. 什么是电荷的量子化? 试列举出一些其他具有量子化性质的物理量.
14. 两个点电荷相距一定距离, 若其连线中点处场强为零, 则这两个点电荷的电荷量与符号有何关系?
15. 电势零点的选择有何原则?
16. 高斯面上的电场强度是否仅由高斯面内的电荷所激发?

习题

1. 将一块面积为 S 的金属平板放到一个场强为 E 的匀强电场中, 板平面与场强方向垂直, 试求在此金属平板的每个面上感应出多少电荷.

2. 一导体球壳内是球形空腔,空腔的中心有一电荷量为 q_2 的点电荷,球壳外离球心为 r 处有一电荷量为 q_1 的点电荷,如图 1.45 所示.已知导体球壳上所有电荷量的代数和为零,试求:(1) q_1 作用在 q_2 上的力;(2) q_2 所受的力.

3. 同轴传输线由很长的圆柱形长直导线和套在外面的同轴导体圆管构成,导线的半径为 R_1 ,电势为 U_1 ,圆管的内半径为 R_2 电势为 U_2 ,如图 1.46 所示.试求它们之间离轴线为 r 处($R_1 < r < R_2$)的电势.

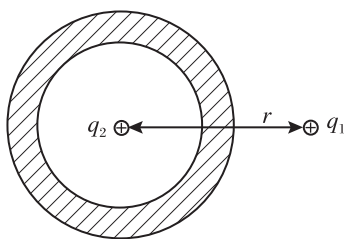


图 1.45

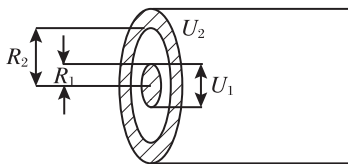


图 1.46

4. 空气的电介质强度 $E_m = 3000 \text{ kV/m}$,试问空气中半径分别为 1.0 cm 、 1.0 mm 和 0.10 mm 的长直导线上单位长度最多各能带多少电荷量?

5. 如图 1.47 所示,半径为 R 的导体球带有电荷 Q .先将其分为两部分,切口距球心为 h .求其相互作用力.

6. 如图 1.48 所示,在相对介电系数为 ϵ_r 的无限大均匀电介质中,有均匀外电场 E_0 ,在介质中挖出一个球形空腔,求在空腔中心(球心)处的电场强度 E 的大小.

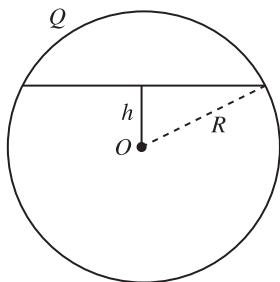


图 1.47

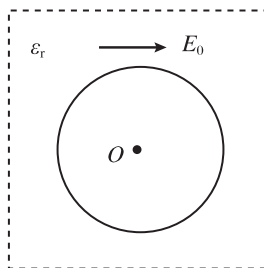


图 1.48

7. 求氢原子中原子核与电子云的相互作用能.原子核的带电量为 $+q$,电子云的电荷密度分布为 $\rho(r) = -\frac{q}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$ (a_0 是玻尔半径, q 是电子电量).

8. 有两个同心导体球壳,半径分别为 R_1 和 R_2 .外球壳厚度可略.今使内球壳带电量 Q ,求空间的能量密度 w 及整个电场的能量.又若用导线连接内外球壳,上述答案有何变化?

习 题 解 答

1. 依题意,设金属平板在与外电场垂直的两个面上感应出的电荷的面密度为 $\pm\sigma'$,它们在金属板内部产生的场强为

$$E' = \frac{\sigma'}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma'}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

由静电平衡条件可知,在金属板内部的合场强为零,即有

$$E_{\text{合}} = E - E' = E - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = 0$$

可得

$$\sigma' = \epsilon_0 E$$

故金属板每个面上感应出的电荷量为

$$q' = \sigma' S = \epsilon_0 ES$$

2. (1) 因为电荷之间的相互作用力(库仑力)与其他物质或电荷是否存在无关,所以 q_1 作用在 q_2 上的力为

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_{12}$$

式中, $\mathbf{e}_{12}$ 是从 q_1 到 q_2 方向上的单位矢量.

(2) q_2 所受的力包括三个部分: q_1 作用在 q_2 上的力 $\mathbf{F}_{21}$;球壳内表面上的电荷量 q_3 作用在 q_2 上的力 $\mathbf{F}_{23}$;球壳外表面上的电荷量 q_4 作用在 q_2 上的力 $\mathbf{F}_{24}$.根据对称性和高斯定理可知, $q_3 = -q_2$,它均匀分布在空腔的内表面上.由于均匀分布的球面电荷在球内产生的电场强度为零,故 q_3 作用在 q_2 上的力为

$$\mathbf{F}_{23} = \mathbf{0}$$

q_4 有两部分, $q_4 = q'_4 + q''_4$,其中 q'_4 是由于空腔内表面上有 $-q_2$,而球壳上所有电荷量的代数和为零,故在外表面上出现电荷 $q'_4 = q_2$ 均匀分布在外表面上,且 q'_4 作用在 q_2 上的力为零. q''_4 是壳外的 q_1 在外表面上引起的感应电荷,虽然 $q''_4 = 0$,但由于它不是均匀分布在外表面上的,故它对 q_2 的作用力不为零.这个力可以从如下的考虑得出:导体外表面上的感应电荷在导体内产生的电场强度正好与引起它的电荷(此处即为 q_1)在导体内产生的电场强度互相抵消,使得导体内的电场强度处处为零.因此, q''_4 作用在 q_2 上的力等于 q_1 作用在 q_2 上的力的负值,即

$$\mathbf{F}_{24} = -\mathbf{F}_{21}$$

最后得到 q_2 所受的力为 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{24} = \mathbf{F}_{21} - \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}$.

3. 以同轴传输线的轴线为轴线, r 为半径,作长为 l 的圆柱形高斯面 S ,由对称性和高斯定理得

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l$$

式中 λ 是导线上单位长度的电荷量.于是得导线与圆管间的电场强度为

2.4 静电场的能量

2.4.1 点电荷系统的静电能(相互作用能)

设有两个点电荷 q_1 和 q_2 相距无穷远, 然后使它们相互靠近, 它们相距为 r_{12} 时外力所做的功就应是此时它们的相互作用能; 或使两个点电荷从相距为 r_{12} 到相距无穷远, 电场力所做的功就等于它们的相互作用能. 静电场是保守力场, 做功与路径无关. 令 q_1 不动, q_2 处于 q_1 的电场中, 使 q_2 从图 2.16 中点 2 移至无限远(此时设不存在 q_3), 电场力所做的功为

$$W_{12} = q_2 U_{12}$$

式中, U_{12} 是电荷 q_1 产生的电场在点 2 (即 q_2 处) 的电势.

同理, 若令 q_2 不动, q_1 处于 q_2 的电场中, q_1 从点 1 移至无限远时, 电场力所做的功为

$$W_{21} = q_1 U_{21}$$

式中, U_{21} 为 q_2 产生的电场在点 1 (即 q_1 处) 的电势. 显然有

$$W_{12} = W_{21}$$

所以两点电荷 q_1 、 q_2 组成的体系的相互作用能为

$$W = \frac{1}{2}(q_1 U_{21} + q_2 U_{12})$$

同理, 若有三个静止点电荷 q_1 、 q_2 、 q_3 组成的体系, 如图 2.16 所示, 它们的相互作用能应为

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{31}$$

式中,

$$W_{12} = \frac{1}{2}(q_1 U_{21} + q_2 U_{12})$$

$$W_{23} = \frac{1}{2}(q_2 U_{32} + q_3 U_{23})$$

$$W_{13} = \frac{1}{2}(q_1 U_{31} + q_3 U_{13})$$

式中, U_{23} 表示 q_3 产生的电场在 q_2 处的电势, 其余以此类推, 不再赘述.

这里, 我们不加证明地将上述结论推广到由 n 个点电荷组成的一般带电系统, 其相互作用能为

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i U_i \quad (2.17)$$

注意, 式中 U_i 是除第 i 个电荷 q_i 之外的其他所有电荷在 q_i 处的电势.

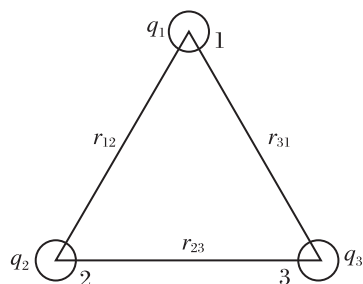


图 2.16 电荷体势能

2.4.2 电容器中的储能

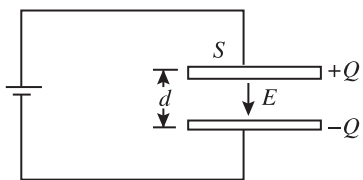


图 2.17

电容器是积蓄电荷的元器件,实际上就是储存电能的装置.下面以平板电容器为例,简要分析电容器的储能问题.设想电容器的带电过程(从不带电到最终带电为 $+Q$ 和 $-Q$)是不断地从原来电中性的 B 板上取正电荷移到 A 板上.如图 2.17 所示,设电容器的电容为 C ,当两极板上已分别带有电荷 $+q$ 和 $-q$ 时,两极板间电势差为

U_{AB} ,若再将 $+dq$ 的电荷从 B 板移到 A 板上,外力克服电场力所做的功为

$$dA = U_{AB} dq = \frac{q}{C} dq$$

则在全部过程中,外力所做的总功为

$$A = \int dA = \int U_{AB} dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

这个功应等于带电电容器的能量,即

$$W = A = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

注意到 $Q = CU_{AB}$,得电容器的储能公式为

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU_{AB}^2 = \frac{1}{2} U_{AB} Q \quad (2.19)$$

需要说明的是,上述式(2.19)虽然是以平板电容器为例推出的,但对任意形状的电容器都成立,即电容器的储能公式是普遍成立的.

2.4.3 静电场的能量

一个带电体或一个带电系统的带电过程实际上也是带电体或带电系统电场的建立过程.从电场的观点来看,带电体或带电系统的能量也就是电场的能量.我们仍然以平行板电容器为例,将带电电容器的电势差 $U_{AB} = Ed$ 及电容 $C = \frac{\epsilon S}{d}$ 代入电容器的能量公式 $W = \frac{1}{2} CU_{AB}^2$ 之中,即可得

$$W_e = \frac{1}{2} CU_{AB}^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V$$

式中, V 表示电容器内电场空间所占的体积.

结果表明,平行板电容器所储存的电能与电容器内的电场强度、电介质的介电系数以及电场空间体积有关.由于电容器中的电场是均匀分布的,所以其储存的电场能量也应该是均匀分布的.所以单位体积内所储存的电场能量(即电场的能量密度)为

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

注意到 $D = \epsilon E$,有

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (2.20)$$

上述结果虽然是从匀强电场的特例中导出的,但可以证明,这是一个普遍适用的公式.

知道了单位体积电场中的能量,则任一带电系统的整个电场中所储存的总能量为

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \iiint_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) dV = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 \cdot dV \quad (2.21)$$

式中的积分区域遍及电场整个空间 V .

在物理学的发展过程中,人们曾经争论过电场和电荷谁是能量负载(携带)者,一种观点认为电荷是能量的负载者,另一种观点则认为电场是能量的负载者.

在静电场中,电荷和电场都不发生变化,而场总是随着电荷而存在的,因此无法用实验来证明电能究竟是以哪种方式储存的.但是在交变电磁场的实验中,已经证实了能量是能够以电磁波的形式脱离电荷而传播的,这一事实支持了能量储存在场中的观点.因此,现在已经知道:场是能量的携带者,电能定域在电场中.前面我们曾经提到过,电场是一种特殊的物质,而电场具有能量正是电场物质性的表现之一.

例1 如图2.18所示,设有一个球形电容器(内外半径分别为 R_1 和 R_2),两极板充电至带电荷 $\pm Q$,两极板间充满介电常数为 ϵ 的电介质.试计算此球形电容器的电场中所储存的能量.

解 两极板之间的电场具有球对称性,由高斯定理不难求得极板间电场强度的大小为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

由于在半径为 r 的球面上,场强是等值的,故可以取球壳形的体积元 $dV = 4\pi r^2 dr$,其中电场能量为

$$dW_e = w_e dV = \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon E^2 4\pi r^2 dr = 2\pi\epsilon E^2 r^2 dr$$

则全部电场中储有的能量为

$$\begin{aligned} W_e &= \iiint_V dW_e = \int_{R_A}^{R_B} 2\pi\epsilon \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon)^2 r^4} r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \int_{R_A}^{R_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon \frac{R_A R_B}{R_B - R_A}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \end{aligned}$$

注意,此结论为前面我们所说的“电容器的储能公式是普遍成立的”提供了一个例证.同时也提示我们,在求电容时,若问题条件允许,可以先求出电容器电场的能量,再求电容.

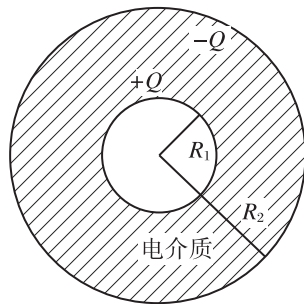


图 2.18

2.5 综合例题

例 1 有 2013 个静止导体球, 互相分离, 均带正电荷, 静电平衡后, 试证至少有一个导体球的表面处处没有负电荷.

证明 静电平衡后各球有确定的电势, 将其中电势最小者或最小者之一记为 L 球, 将其中电势最大者或最大者之一记为 H 球.

L 球表面的正电荷发出的电场线不能到达 L 球表面上可能有的负电荷, 否则 L 球将不是等势体; 这些电场线也不能到达其他某个球表面上可能有的负电荷, 否则 L 球的电势将高于那个球的电势. 那么, 这些电场线便只能伸向无穷远, 故 L 球的电势必高于无穷远电势, 即有

$$U_L > U_\infty \quad (1)$$

假设 H 球表面某处有负电荷, 这些负电荷必定要吸收电场线. 首先, 这些电场线不能来自 H 球表面的正电荷, 否则 H 球将不是等势体; 其次, 这些电场线也不能来自其他某个球面上的正电荷, 否则 H 球的电势将低于那个球的电势, 因此, 这些电场线只能来自无穷远, 故 H 球的电势必低于无穷远的电势, 即有

$$U_\infty > U_H \quad (2)$$

与①式联立, 得

$$U_L > U_H \quad (3)$$

然而由 L 球、 H 球的命名依据, 可知应有

$$U_L \leq U_H \quad (4)$$

与③式矛盾, ④式一定不能成立, 即 H 球的表面不可能有负电荷.

由此可见, 2013 个导体球中至少有个 H 球, 它的表面处处没有负电荷.

例 2 如图 2.19 所示, N ($N \geq 2$) 块相同的导体平板相互空一定间隔地平行放置, 各自的带电量分别为 $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$. 静电平衡后, 试求:

(1) 第 1 块平板左侧面的电荷 $Q_{1左}$ 和第 N 块平板右侧面的电荷 $Q_{N右}$;

(2) 各块平板两侧面的电荷 $Q_{1左}, Q_{1右}, Q_{2左}, Q_{2右}, \dots, Q_{N左}, Q_{N右}$.

解 (1) 静电平衡后, 各板内部场强均为零. 取图 2.20 中用虚线所示的高斯面, 可证得 (过程略) 第 1 块板的右侧面电量 $Q_{1右}$ 与第 2 块板的左侧面电量 $Q_{2左}$ 等量异号, 即有

$$Q_{1右} + Q_{2左} = 0$$

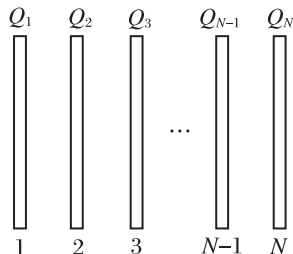


图 2.19

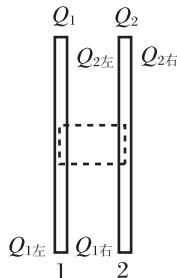


图 2.20

(2) 由以上分析可知,第 N 块板与第 $N-1$ 块板间的电势差为 $U/(N-1)$,第 $N-1$ 块板与第 $N-2$ 块板间的电势差为 $U/(N-2)$,依次类推,故第 k 块板的电势为

$$U_k = U \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

思 考 题

1. 无限大均匀带电平面两侧的场强为 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$,而在静电平衡时,导体表面的场强为 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$,后者比前者大一倍,为什么?
2. 一孤立带电导体球,其表面附近的场强沿什么方向? 当把另一个带电体移近这个导体球时,球表面附近的场强将沿什么方向?
3. 一大一小两个彼此远离的金属球,所带电荷等量同号,则两个球的电势是否相等? 电容是否相等? 若用一细导线把两球连接起来,是否会有电荷流动?
4. 将一带正电荷的导体先后靠近接地导体和绝缘导体,则接地导体和绝缘导体的电势将如何变化?
5. 如何描述导体表面曲率与表面电荷密度的关系? 能否说表面曲率与表面电荷面密度成正比?
6. 一带电导体放在封闭的金属壳内部,若将另一带电导体从外面移近金属壳,壳内的电场是否会改变? 金属壳及壳内带电体的电势是否会改变? 金属壳和壳内带电体间的电势差是否会改变?
7. 金属壳内部有两个带异号等值电荷的带电体,则壳外的电场如何?
8. 一个封闭的导体壳能够屏蔽静电场,那么一个封闭的物质壳能够屏蔽万有引力场吗? 说明两者的不同.
9. 判断下面说法是否正确:两个带电导体球之间的库仑力等于将每个球的电量集中于球心所得到的两个点电荷之间的库仑力.
10. 一对相同的电容器,先后串联、并联后连接到相同的电源上,试问哪种情况下用手触及极板较为危险? 说明原因.
11. 为什么点电荷系统相互作用能的公式 $W = \frac{1}{2} \sum q_i U_i$ 中有因子 $\frac{1}{2}$,而点电荷在外电场中的电势能公式 $W = qU$ 中没有这个因子? 请简要分析.
12. 为什么高压电气设备周围通常会围上一接地金属栅栏网? 试简述其原理.
13. 电介质的极化现象和导体静电感应现象有什么区别?
14. 自由电荷与极化电荷的主要区别是什么?
15. 试指出下列公式的成立条件:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$$

习 题

1. 两块大小相同的平行金属板所带的电量 Q_1 和 Q_2 不相等, $Q_1 > Q_2$, 略去边缘效应. 证明: (1) 相向两面上电荷的面密度大小相等而符号相反, 相背两面上电荷的面密度大小相等且符号相同; (2) 相向两面上的电量分别为 $(Q_1 - Q_2)/2$ 和 $(Q_2 - Q_1)/2$, 相背两面上的电量均为 $(Q_1 + Q_2)/2$.

2. 一金属球有电量 Q , 其半径为 a , 球外有一内半径为 b 的同心金属球壳, 球壳接地, 球与壳间充满介质, 其相对介电常数 ϵ_r 与到球心的距离 r 的关系是 $\epsilon_r = \frac{k+r}{r}$, 式中 k 是常数. 证明: 在介质中, 离球心为 r 处的电势 $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 k} \ln \frac{b(r+k)}{r(k+b)}$.

3. 有一个带电小球, 外有一同心的接地导体球壳(球壳的外半径为 R), 在球壳外距离球心为 d 处有一电荷量为 q 的点电荷. 试求导体球壳外表面上的总电荷量.

4. 金属球 A 的半径为 R_1 , 外面套有一个同心的金属球壳 B , B 的内外半径分别为 R_2 和 R_3 ($R_3 > R_2 > R_1$). 现在给 A 带上电量.

(1) 求离球心为 r 处的电场强度 E 和电势 U ;

(2) 求球与壳的电势差.

5. 三个不带电的同心导体薄球壳, 壳厚度都可忽略不计, 半径分别为 $2r, 4r, 6r$. 现在球心放一点电荷 Q , 如图 2.55 所示, A, B, C 三点到球心的距离分别为 $r, 3r, 5r$. 试问在三个导体球壳上分别放上多少电荷量, 才能使 A, B, C 三点的电场强度大小都相等?

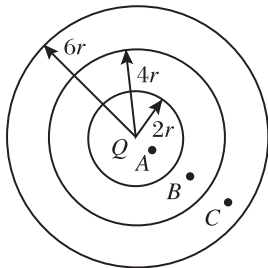


图 2.55

6. 若球形电容器的两个球壳的半径近似相等 ($R_2 > R_1$ 且 $R_2 \approx R_1$), 试证明: 在此条件下, 球形电容器可以看成是一个平板电容器, 其电容 C 可以近似使用平板电容器的公式计算(可令 $R_2 - R_1 = d$).

7. 一平行板电容器两极板的面积都是 S , 相距为 d , 分别维持电势 $U_A = U$ 和 $U_B = 0$ 不变. 现将一块带有电荷量 q 的导体薄片(其厚度可略去不计)放在两极板的正中间, 薄片的面积也是 S , 如图 2.56 所示. 略去边缘效应, 试求薄片的电势.

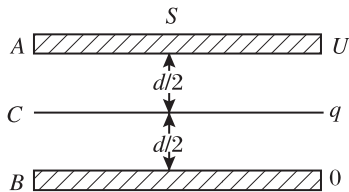


图 2.56

16. 有两根平行长直导线(半径都为 a)相距为 d , 且满足条件 $d \gg a$, 求单位长度的电容.

17. 半径为 R 的金属球带有电荷量 Q , 处在介电常数为 ϵ 的无限大均匀介质中. 试求介质内离球心为 r 处的电场强度 E 、电位移 D 、极化强度 P 和极化电荷面密度 σ' .

18. 一个圆柱形电容器是由一长直导线(半径为 R_1)和套在其外面且与之共轴的导体圆筒(内半径为 R_2)构成的. 试证: 电容器所储存的能量有一半是在半径为 $r = \sqrt{R_1 R_2}$ 的圆柱体内.

19. 平行板电容器的极板面积为 S , 间距为 d , 其中夹了一厚度为 d 的玻璃介质板, 相对介电系数为 ϵ_r . 现在下述情况下将玻璃板移开, 问: 电容器的能量如何变化? 移开玻璃板所需做的机械功是多少? (1) 电容器始终与电动势为 U 的电源相接; (2) 将电容器充电至电势差为 U 后, 断开电源, 再抽出玻璃板.

习题解答

1. (1) 设两块导体板各面如图 2.61 所示, 则

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q_1$$

$$\sigma_3 S + \sigma_4 S = Q_2$$

对于带电量为 Q_1 的板内任一点 A , $E_A = 0$, 则有

$$-\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0$$

$$-\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = 0$$

同理, 对于带电量为 Q_2 的板内任一点 B , $E_B = 0$, 则有

$$+\sigma_4 - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 0 \quad (4)$$

由③+④得

$$\sigma_4 - \sigma_1 = 0 \quad (5)$$

$$\sigma_4 = \sigma_1 \quad (6)$$

代入式④得

$$\sigma_2 = -\sigma_3 \quad (7)$$

(2) 由①+②得

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S + \sigma_3 S + \sigma_4 S = Q_1 + Q_2 \quad (8)$$

将式⑥、式⑦代入式⑧, 得

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2S}, \quad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{2S}$$

即相向两面上的带电量分别为 $\frac{Q_1 - Q_2}{2}$ 和 $\frac{Q_2 - Q_1}{2}$, 相背两面上的带电量均为 $\frac{Q_1 + Q_2}{2}$.

2. 在介质中作一与球共心的高斯面, 如图 2.62 所示 ($a < r < b$), 根据介质中的高斯定理

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q, \text{ 解得}$$

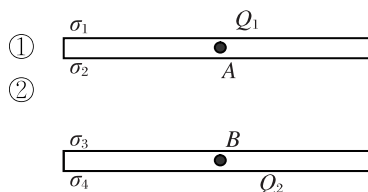


图 2.61

$$\epsilon = \int_{-}^{+} \boldsymbol{E}_k \cdot d\boldsymbol{l} \quad (3.7)$$

即电源电动势是将单位正电荷从电源负极经由电源内部移到正极的过程中非静电力所做的功.

在实际应用中,不同电源中非静电力的本质不同.例如在干电池中非静电力起源于化学作用;在发电机中非静电力起源于电磁感应.

要注意,电动势和电流强度一样,是标量.通常规定非静电力做正功时电流的流向(即 $\boldsymbol{E}_k$ 的方向,也即由负极经电源内部指向正极的方向)作为电动势的方向.在国际单位制中,电动势的单位和电势相同,为伏特.

3.2 毕奥-萨伐尔定律

3.2.1 磁感应强度

1. 基本磁现象

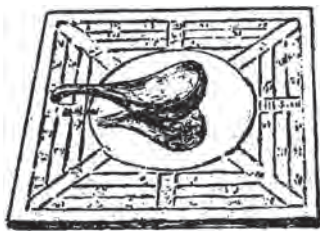


图 3.5 司南勺

在物理史上,磁现象的发现比电现象要早得多.我国是最早发现和应用磁现象的国家之一.早在春秋战国时期(公元前 770 年~公元前 221 年)就发现了天然磁石,并有了“司南勺”(见图 3.5)的记载;西汉时期(公元前 206 年~公元 8 年)发现磁力,即磁石能够吸引铁;东汉时期(公元 25 年~公元 220 年)发现了磁极,王充在《论衡》中有相关描述.到了 11 世纪的北宋初期,我国科学家创制了航海用的指南针,并发现了地磁偏角,沈括在《梦溪笔谈》中对此有详细的总结.直到 13 世纪,西方对磁现象的研究才逐步开始,并有了指南针的记载.

最初,人们是从天然磁铁矿(Fe_3O_4)上观察到磁现象的.天然或人造磁铁吸引铁、钴、镍等物质的性质称为磁性.具有磁性的物体称为磁体.一块磁铁两端磁性最强的区域称为磁极.将一个条形磁铁悬挂起来,磁铁将自动地转向南北方向,指北的磁极称北极(N 极),指南的磁极称南极(S 极).两块磁铁的磁极之间存在相互作用力,称为磁力.同号磁极相斥,异号磁极相吸.磁铁不可能分割成独立存在的 N 极或 S 极.目前为止,在自然界中没有发现独立存在的 N 极或 S 极.

在很长的时期内,磁学与电学是各自独立发展的.直到 1820 年,奥斯特通过实验(见图 3.6)发现了电流的磁效应(电流对小磁针的作用)之后,才揭开了磁现象与电现象的内在联系,人们才逐渐认识到磁性起源于电荷的运动.

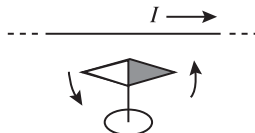


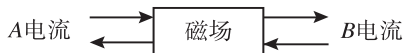
图 3.6 奥斯特实验

1822 年,安培提出了分子电流假说(有关物质磁性起源与本质的假说),认为一切磁现象的根源是电流.磁性物质的分子中存在着小环形等效电流,称为分子电流.分子电流相当于小的基元磁铁,物质的磁性决定于物质中的分子电流.近代物理已

经证实,分子电流相当于分子中电子绕原子核的轨道运动和电子本身“自旋”运动的合成结果,可以说,磁现象来源于电荷的运动.

2. 磁场

磁的相互作用是如何传递的? 这个问题在历史上有过很长时间的讨论与研究. 现在实验已经证实,磁力是通过磁场来传递的. 运动电荷(包括传导电流和永久磁铁)在其周围空间激发磁场,磁场再作用于运动电荷(或传导电流和永久磁铁). 这实际上可归结为电流之间通过磁场来传递相互作用.



磁场可以脱离产生它的“源”而独立存在于空间中,所以磁场是一种场物质.

磁场对外的重要表现是:

- (1) 磁场对运动电荷或载流导体有磁力的作用;
- (2) 载流导体在磁场内移动时,磁场的作用力对它做功.

注意,电荷无论是运动的还是静止的,它们之间都有库仑相互作用,但只有运动电荷才有磁场相互作用.

3. 磁感应强度矢量

实验表明,和电场力一样,磁场力既有强弱,也有方向. 在电场中我们引入电场强度来描述场的客观施力本领等性质,这里我们引入“磁感应强度”这一矢量(用字母 $\mathbf{B}$ 表示)来描述磁场的客观施力本领等性质.

常用的引入 $\mathbf{B}$ 定义的等价方法有三种,它们分别是:

- (1) 根据运动电荷在磁场中的受力;
- (2) 根据电流元在磁场中的受力;
- (3) 根据载流元线圈在磁场中所受力矩.

此处我们采用上述第一种方法引入磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$.

前面讨论静电场时,我们用电场强度矢量来描述电场,它是通过电场对静止的“检验电荷”的作用而引入的. 与此相似,我们引入“磁感应强度矢量”这一物理量来定量描述磁场,它可以通过磁场对“运动检验电荷”的作用引入. 所谓“运动检验电荷”,是指一个在研究的问题中电荷量可以忽略不计的、相对于磁场运动的正点电荷.

实验表明,磁场作用在运动电荷上的力不仅与运动电荷所带的电荷量有关,而且还与运动电荷的速度(包括大小和方向)以及磁场的强弱和方向有关. 显然,磁场力的情况比电场力要复杂一些,因此定义磁感应强度同样比定义电场强度要复杂一些.

通过实验考察,发现磁场对运动检验电荷的磁力与运动电荷的电荷量及速率成正比,并随电荷的运动方向与磁场方向之间夹角的改变而变化. 具体存在以下规律:

- (1) 运动电荷在磁场中以同一速率沿不同方向通过磁场中任意点 P 时,所受磁场力的大小不同;
- (2) 运动电荷在磁场中任意点 P 所受的磁场力的方向总是与运动电荷的速度方向垂直;
- (3) 磁场中每一点 P 都存在一个特殊的方向,当运动电荷沿此方向通过点 P 时,无论速率为多大,都不受磁场力的作用(此方向可以称为“零力线”方向);
- (4) 当运动电荷沿与“零力线”垂直的方向通过点 P 时,受到的磁场力最大.

显然,“零力线”可以反映磁场中各场点的某种固有性质,且与运动检验电荷无关.

由此,我们定义磁感应强度 $\mathbf{B}$ 满足关系式

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.8)$$

写成标量式则是

$$F = qvB\sin\theta$$

即

$$B = \frac{F}{qv\sin\theta}$$

若 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin\theta = 1$, 此时运动电荷所受的磁场力最大(用 $F_{\max}$ 表示), 有

$$B = \frac{F_{\max}}{qv} \quad (3.9)$$

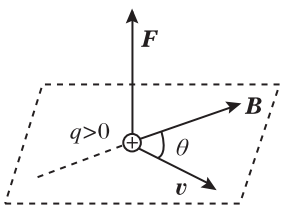


图 3.7 磁感应强度的定义

由上述表达式(3.8)和(3.9), 并参见图 3.7 可知, 磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的方向沿着“零力线”.

通过以上讨论, 可以归纳并定义磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的方向和大小:

(1) 在磁场中某点, 若运动电荷沿着“零力线”方向(其方向与放在该点的小磁针 N 极的指向相同)运动, 其所受磁力为零, 这个方向规定为该点的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的方向.

(2) 运动电荷沿着与磁场方向垂直的方向运动时, 所受的最大磁力 $F_{\max}$ 与其电荷量 q 和速率 v 的乘积成正比. 对磁场中某一确定点而言, 比值 $\frac{F_{\max}}{qv}$ 是一定的; 对磁场中不同的点而言, 这个比值则有不同的确定值. 显然, 比值 $\frac{F_{\max}}{qv}$ 的大小反映了各点处磁场的强弱. 我们把这个比值定义为磁场中某点处磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的大小. (在静电场中, 我们是用 $E = \frac{F}{q_0}$ 来定义电场强度 $\mathbf{E}$ 的大小的.)

磁感应强度 $\mathbf{B}$ 是描述磁场中各点磁场的强弱和方向的物理量, 它与电场中的电场强度 $\mathbf{E}$ 地位相当, 同样是矢量点函数. 若磁场中各点的 $\mathbf{B}$ 均相同, 则称为匀强磁场.

在国际单位制中, 磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的单位是特斯拉(T), $1 \text{ T} = 1 \text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m})$ (注意, $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$). 特斯拉这个单位非常大, 因此 $\mathbf{B}$ 的常用单位还有高斯(G), 它与特斯拉的关系为 $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$.

4. 磁感应线

在讨论静电场时, 我们曾用电场线($\mathbf{E}$ 线)来形象地描绘静电场, 这里, 同样也可以引入磁感应线($\mathbf{B}$ 线)来形象地描绘磁场. 它同样是为了研究问题的方便, 为了形象化地考察磁场而引入的假想的曲线.

磁感应线的画法一般有如下规定:

(1) 在磁场中画出一些有向曲线, 使这些曲线上任一点的切线方向和该点的磁感应强度的方向一致;

(2) 在磁场中任意一点处磁感应线的数密度等于该点的磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的大小.

如图 3.8 所示是几种不同形状的电流所产生的磁场的磁感应线.

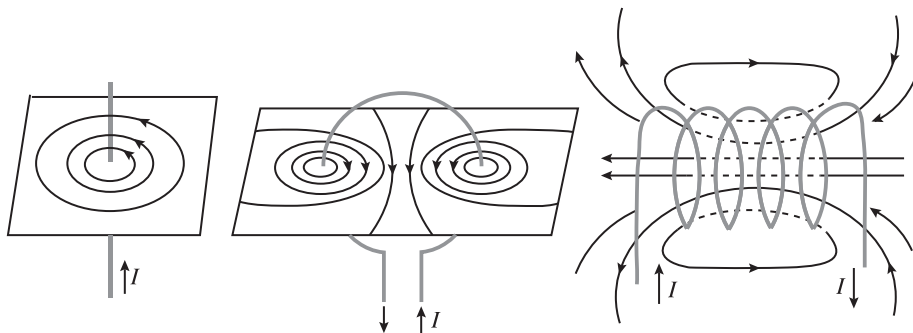


图 3.8 几种不同形状的磁感应线

若磁感应线是按照上述规定画出的,则一般具有如下特征:

- (1) 由于磁场中某点的磁感应强度的方向是确定的,磁场中任意两条磁感应线不会相交,磁感应线的这一特性与电场线是一样的.
- (2) 每一条磁感应线都是环绕电流的无头无尾的闭合曲线,与闭合电路互相套合.磁感线的这一特性与电场线完全不同,这表明磁场是一种涡旋场.
- (3) 磁感应线与电流互相连环(相互套链),且它们的方向满足右手螺旋定则.
- (4) 磁感应线的疏密表示了磁感应强度的大小(强弱分布).磁感应线稠密的地方表示磁感应强度大,磁感应线稀疏的地方表示磁感应强度小.

3.2.2 毕奥-萨伐尔定律

磁场是由电流激发的,稳恒磁场则由稳恒电流激发.稳恒电流产生磁场的规律可以由毕奥-萨伐尔定律这一实验定律来定量描述,它给出了稳恒电流周围磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的分布.

1. 毕奥-萨伐尔定律

回顾前面有关静电场的部分,我们在计算任意连续带电体在空间某点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 时,是将带电体分成无限多个小电荷元 dq ,每个电荷元在该点的电场强度 $d\boldsymbol{E}$ 可以用点电荷的场强公式计算,整个带电体在该点的 $\boldsymbol{E}$ 则是所有电荷元在该点的 $d\boldsymbol{E}$ 的叠加(积分),由此得到任意带电体在空间中电场强度的分布.

同理,为了得到稳恒磁场分布,在计算任意载流导线(线状稳恒电流)在空间某点产生的磁感应强度时,我们可以采用类似的方法.

我们先引入电流元的概念.如图 3.9(a)所示,若在载流导线上取长度为 $d\boldsymbol{l}$ (视为无限短)的有向小线段,将它规定为矢量,方向与电流方向相同,则称载有电流的矢量线元 $I d\boldsymbol{l}$ 为电流元.

与静电场中的处理方法类似,可以将任意一载流导线无限细分为许多个电流元 $I d\boldsymbol{l}$,若先找到了电流元产生磁场的规律,即计算出了 $I d\boldsymbol{l}$ 在场中某点产生的磁感应强度 $d\boldsymbol{B}$ 的定量关系,则根据磁场的叠加原理,就可以求出整个载流导线在场中任意点产生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的分布情况.以上方法是计算稳恒磁场磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 基本的、普遍的方法.

毕奥-萨伐尔定律是法国科学家毕奥和萨伐尔对前人大量的实验进行了研究和推理,并

经拉普拉斯进一步从数学上归纳,得到的关于电流元 $I d\mathbf{l}$ 产生磁场的规律,此实验定律可以表述如下:

载流导线上任一电流元 $I d\mathbf{l}$ (见图 3.9(b)) 在真空中任意一个给定场点 P 所产生的磁感应强度 $d\mathbf{B}$ 的大小与电流元 $I d\mathbf{l}$ 的大小成正比,与电流元和电流元到 P 点的矢径 $\mathbf{r}$ 之间夹角的正弦成正比,并与电流元到 P 点距离的平方成反比. $d\mathbf{B}$ 的方向垂直于 $d\mathbf{l}$ 和 $\mathbf{r}$ 所组成的平面,并沿矢量积 $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$ 的方向(用右手螺旋定则判定),即 $d\mathbf{B}$ 的大小为

$$dB = k \frac{I d\mathbf{l} \sin\theta}{r^2}$$

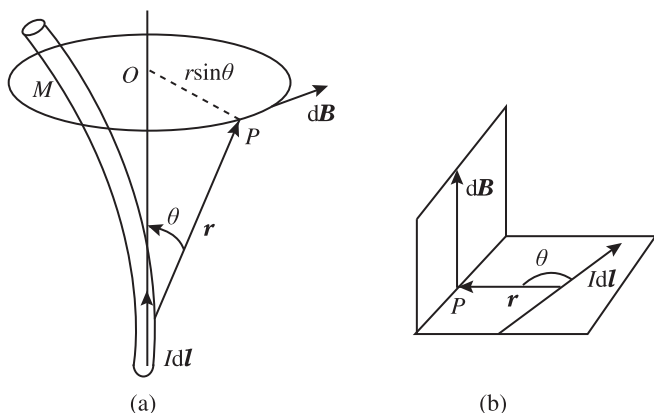


图 3.9 毕奥-萨伐尔定律

在国际单位制中,比例系数 k 规定为 $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$, μ_0 称为真空磁导率,且有 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$.

于是,上述表达式可写成

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \sin\theta}{r^2}$$

写成矢量式,得到毕奥-萨伐尔定律的表达式为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0}{r^2} \quad (3.10)$$

式中 $\mathbf{r}^0$ 是矢径 $\mathbf{r}$ 方向上的单位矢量.

2. 磁感应强度的叠加原理

磁场与电场一样是矢量场,都具有可叠加的性质,因此磁感应强度矢量 $\mathbf{B}$ 同样遵循叠加原理.

毕奥-萨伐尔定律给出了电流元 $I d\mathbf{l}$ 在场中任意场点 P 产生磁场的规律.进一步利用磁场的叠加原理,不难求得任意载流导线在 P 点的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0}{r^2} \quad (3.11)$$

应当指出,由于稳恒电流的孤立电流元原则上无法单独获得,因此毕奥-萨伐尔定律无法由实验直接验证.由于通过定律计算出的磁感应强度和通过实际测量得到的磁感应强度结果总是相符合的,所以毕奥-萨伐尔定律的正确性才得到了间接的证明.

3.2.3 毕奥-萨伐尔定律的应用

毕奥-萨伐尔定律提供了计算稳恒磁场的最普遍方法. 下面通过几种典型的电流分布, 讨论如何用毕奥-萨伐尔定律计算其磁场分布.

1. 载流直导线的磁场分布

设在真空中有一条长为 L 的载流直导线, 导线中通有稳恒电流 I , 求此直导线旁任意一点 P 的磁感应强度 B .

在直导线上任取一电流元 Idl , 根据右手螺旋定则可以判断出, 直导线上所有电流元在场点 P 产生的 dB 的方向相同, 都垂直于电流元 Idl 与矢径 r 所决定的平面, 即垂直纸面向里, 如图 3.10 所示.

由毕奥-萨伐尔定律可得, 电流元 Idl 在任意给定场点 P 所产生的磁感应强度的大小为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\theta}{r^2}$$

对所有电流元求和, 可得整段载流直导线在 P 点产生的磁感应强度大小为

$$B = \int_C^D dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C^D \frac{Idl \sin\theta}{r^2}$$

进行积分运算时, 首先统一变量. 将变量 l 、 r 用 θ 表示, 有

$$l = x \cot(\pi - \theta) = -x \cot\theta$$

$$dl = \frac{x d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$r = \frac{x}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{x}{\sin\theta}$$

代入得磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{I \sin\theta d\theta}{x} = \frac{\mu_0}{4\pi x} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (3.12)$$

式中 x 是场点到载流直导线的垂直距离, 而 θ 是 Idl 的方向与矢径 r (电流元指向场点) 之间的夹角.

最后简要讨论一下极限情形:

(1) 当载流直导线无限长 ($L \rightarrow \infty$) 时, 有

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \pi$$

则

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

无限长载流直导线周围各点的磁感应强度的大小与各点到导线的垂直距离 x 成反比, 以长直导线上的点为圆心, 作垂直长直导线的同心圆系, 则长直导线在各点的 B 的方向沿圆的切线方向, 其指向与电流方向满足右手螺旋定则.

(2) 当场点非常靠近有限长载流直导线附近 (即 $x \ll L$) 时, 有 $\theta_1 \approx 0, \theta_2 \approx \pi$, 则得

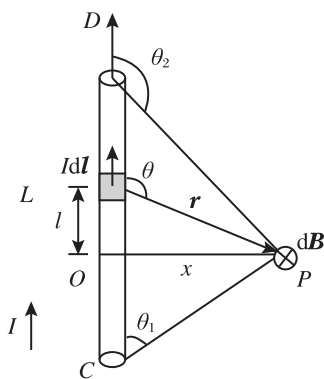


图 3.10 载流直导线

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (3.13)$$

上式说明,当场点十分靠近有限长直导线(除两端头外)时,导线可以视为无限长直导线.实际上,“无限长载流直导线”模型正是这样抽象出来的.

2. 圆形电流轴线上的磁场分布

设在真空中有一半径为 R 的载流圆线圈,通有稳恒电流 I . 求载流圆线圈轴线上任意 P 点的磁感应强度 B .

如图 3.11 所示,取线圈的轴线为 Ox 轴,原点 O 在载流圆线圈的圆心,在圆线圈上任取一电流元 $I dl$,在其直径的另一端取对称的另一个电流元 $I dl'$, $dl = dl'$,则它们在轴上的任意场点 P 产生的磁感应强度 B 大小相等:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin 90^\circ}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

$$dB' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl' \sin 90^\circ}{r'^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2}$$

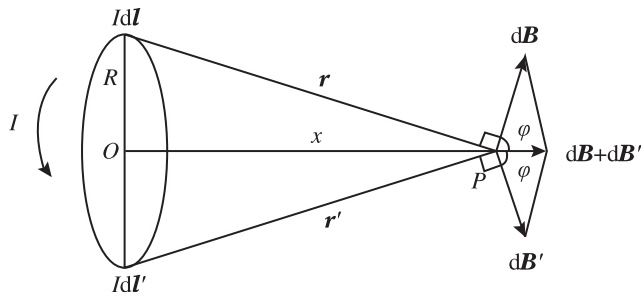


图 3.11 载流圆线圈

dB 与 dB' 大小相等,它们对轴线而言是对称的,合成以后,其垂直轴线的分量相互抵消,而平行轴线的分量则相互叠加,故整个载流圆线圈在 P 点产生的总磁感应强度的大小为

$$B = \oint_L dB_{//} = \oint_L dB \cos \varphi = \oint_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \cos \varphi$$

由于有几何关系

$$\cos \varphi = \frac{R}{r}, \quad r = \sqrt{R^2 + x^2}$$

故可得

$$B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{2} \frac{R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 SI}{2\pi(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (3.14)$$

下面讨论两种特殊情况:

(1) 在载流圆线圈的圆心处,由于 $x = 0$,则有

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (3.15)$$

由于载流圆线圈上每一电流元在圆心处所产生的磁感应强度方向均相同,所以求长为 l 的一段圆弧在圆心处所产生的磁感应强度可通过下式计算:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{l}{2\pi R}$$

(2) 在载流圆线圈的轴线上离圆心很远处, 由于 $x \gg R$, 则有

$$B = \frac{\mu_0 \pi R^2 I}{2\pi x^3} = \frac{\mu_0 SI}{2\pi x^3}$$

即有

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{p}_m}{x^3}$$

式中 $\mathbf{p}_m = ISn$, 称为载流线圈的磁矩.

3. 载流直螺线管内部轴线上的磁场分布

设在真空中有一半径为 R 的载流密绕螺线管, 管中载有稳恒电流 I , 其单位长度上的匝数为 n , 求管内轴线上任意一点的磁感应强度.

因为螺线管上的载流线圈是密绕的, 所以每匝线圈可近似当作是闭合的圆形电流, 载流直螺线管在其内部轴线上某点 P 处所产生的磁感应强度应等于各匝圆线圈在该点所产生的磁感应强度的总和.

如图 3.12 所示, 在螺线管上取长为 dl 的一小段, dl 上有 $n dl$ 匝线圈, 利用式 (3.14), 这一小段 dl 上的线圈 (圆环电流) 在轴线上某点 P 处所产生的磁感应强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0 IR^2 n dl}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

由右手螺旋定则可以判断其方向沿轴线向右.

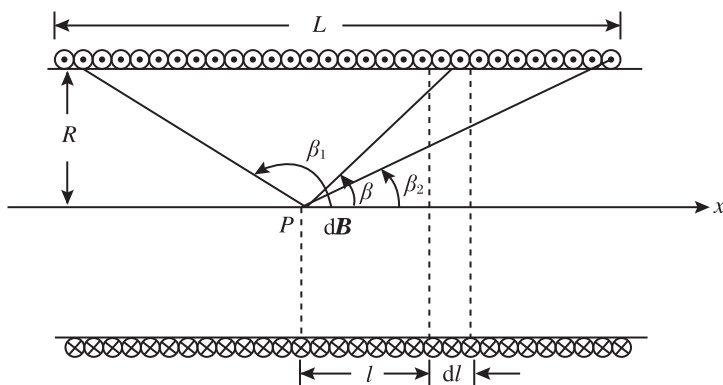


图 3.12 密绕螺线管

因为螺线管的各小段 dl 在 P 点所产生的磁感应强度的方向都相同, 所以由叠加原理可得, 整个螺线管在 P 点的磁感应强度大小为

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 IR^2 n dl}{2(R^2 + l^2)^{3/2}}$$

进行运算时, 为了方便积分, 将变量 l 用角变量 β 表示 (β 为螺线管的轴线与从 P 点到 dl 处小段线圈上任一点矢径之间的夹角). 根据几何关系, 有

$$l = R \cot \beta, \quad dl = -R \csc^2 \beta d\beta$$

$$R^2 + l^2 = R^2 \csc^2 \beta$$

所以

$$B = \int dB = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\mu_0}{2} n I (-\sin \beta) d\beta = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (3.16)$$

式中 β_2 和 β_1 分别表示场点 P 到螺线管两端的连线和轴线之间的夹角.

下面讨论两种特殊的极限情况:

如果螺线管为无限长(即 $L \gg R$), 有 $\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0$, 则管内轴线上的磁感应强度为

$$B = \mu_0 n I \quad (3.17)$$

可见, 无限长密绕螺线管轴线上的磁场为匀强磁场.

如果 P 点处于半无限长载流螺线管的一端(比如左端), 有 $\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_2 = 0$, 则管内轴线上有限端 P 点的磁感应强度为

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

可见, 该处磁感应强度是其内部磁感应强度的一半.

图 3.13 显示出了均匀密绕载流螺线管轴线上的磁场分布情况, 从图中可看出, 密绕长直载流螺线管内中部轴线附近的磁场可近似当作匀强磁场.

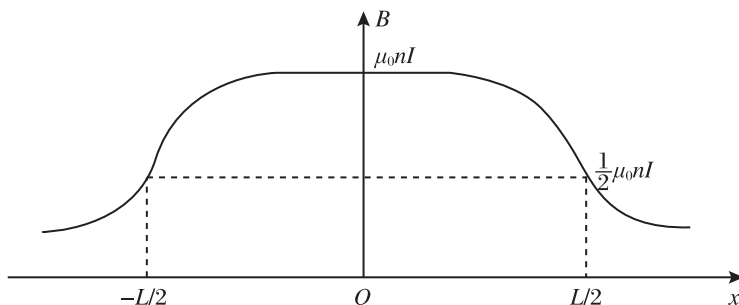


图 3.13 螺线管轴线上的磁场分布

3.2.4 运动电荷的磁场

通电导线中的电流是导线中大量自由电子做定向运动形成的. 因此, 电流所产生的磁场可以看作是大量运动电荷所产生的磁场的总和. 实验与理论都表明, 运动电荷所产生的磁场与电流所产生的磁场是等效的. 电流产生磁场的本质就是带电粒子的运动.

运动电荷所产生的磁感应强度可以很方便地利用毕奥-萨伐尔定律导出(这实际上是在理论上研究毕奥-萨伐尔定律的微观意义).

设有一个横截面积为 S 的电流元 $I d\mathbf{l}$, 若设导体内单位体积内的带电粒子(载流子)数为 n , 每个带电粒子的电荷量为 q , 且速度都为 $\mathbf{v}$. 根据前面已有的讨论, 电流密度的表达式为

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v}$$

通过电流元 $I d\mathbf{l}$ 截面 S 的电流强度由(3.3)式给出:

$$I = \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}$$

即可以得到

$$I = qn\mathbf{v}S$$

由毕奥-萨伐尔定律, 可得

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qn v S d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0}{r^2}$$

注意到在电流元 $I d\mathbf{l}$ 中, 做定向运动的带电粒子数目为

$$dN = n S d\mathbf{l}$$

从微观意义上讲, 电流元 $I d\mathbf{l}$ 所产生的磁感应强度就是这 dN 个运动电荷产生的. 于是, 可得每一个以速度 v 运动的电荷 q 所产生的磁感应强度大小为

$$B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \sin(\mathbf{v}, \mathbf{r}^0)}{r^2}$$

用矢量式表示即是

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{r}^0}{r^2} \quad (3.18)$$

如图 3.14 所示, $\mathbf{B}$ 的方向垂直于 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{r}$ 所构成的平面. 当 q 为正电荷时, $\mathbf{B}$ 的方向为矢量积 $\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0$ 的方向; 当 q 为负电荷时, $\mathbf{B}$ 的方向则与矢量积 $\mathbf{v} \times \mathbf{r}^0$ 的方向相反.

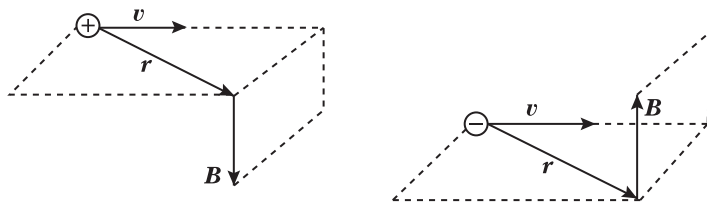


图 3.14 运动电荷的磁场

例 1 有一长直导线 aa' 与一半径为 R 的导体圆环相切于 a 点, 另一长直导线 bb' 沿半径方向与圆环相交于 b 点, 如图 3.15 所示, 有稳恒电流 I 从 a 端流入, 而从 b 端流出, 求圆环中心 O 点的磁感应强度 B_O .

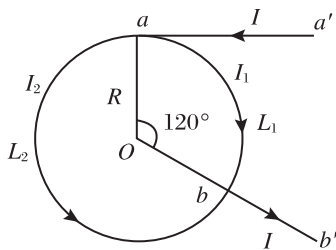


图 3.15 圆环中心点的磁场

解 此题可用毕奥-萨伐尔定律求解. 分析知 O 点的 B_O 由四部分组成:

$$\mathbf{B}_O = \mathbf{B}_{aa'} + \mathbf{B}_{bb'} + \mathbf{B}_{L_1} + \mathbf{B}_{L_2}$$

半无限长直载流导线 aa' 与 bb' 在 O 点产生的场分别为

$$B_{aa'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left(\cos 0 - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad (\text{方向垂直纸面向外})$$

$$B_{bb'} = 0 \quad (\text{因为场点在 } bb' \text{ 的延长线上})$$

另外, 电流流入 a 点, 分成两路 L_1 、 L_2 , 再从 b 点流出, 设圆环周长为 L , 有

$$L_1 = \frac{1}{3}L, \quad L_2 = \frac{2}{3}L$$

因载流导线是均匀的,由欧姆定律 $U = IR$,可得 L_1 、 L_2 两分路的电流分别为 $\frac{2}{3}I$ 和 $\frac{1}{3}I$,得在 O 点产生的场分别为

$$B_{L_1} = \frac{\mu_0 \times \frac{2}{3}I}{2R} \times \frac{1}{3} = \frac{\mu_0 I}{9R} \quad (\text{方向垂直纸面向内})$$

$$B_{L_2} = \frac{\mu_0 \times \frac{1}{3}I}{2R} \times \frac{2}{3} = \frac{\mu_0 I}{9R} \quad (\text{方向垂直纸面向外})$$

以矢量式表达即有

$$\mathbf{B}_{L_1} = -\mathbf{B}_{L_2}$$

所以

$$\mathbf{B}_O = \mathbf{B}_{aa'} + \mathbf{B}_{bb'} + \mathbf{B}_{L_1} + \mathbf{B}_{L_2} = \mathbf{B}_{aa'}$$

$$B_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad (\text{方向垂直纸面向外})$$

3.3 磁场的高斯定理和安培环路定理

在研究静电场时,根据库仑定律和场的叠加原理,导出了高斯定理和环路定理.在稳恒磁场中,我们根据毕奥-萨伐尔定律和场的叠加原理也可以导出磁场的高斯定理和安培环路定理,从而了解场的性质.

3.3.1 稳恒磁场的高斯定理

1. 磁通量

在静电场中我们引入了电通量的概念,其直观解释是穿过某一面积的电场线的条数.这里,与电通量类似,我们引入磁通量(即磁感应强度通量)的概念.其直观意义是通过某曲面的磁通量等于穿过该曲面的磁感应线的条数.磁通量用符号 Φ_B 表示.

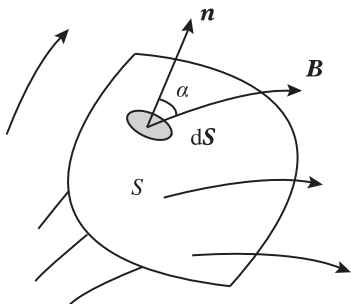


图 3.16 磁通量

下面计算任意一磁场中通过任一曲面 S 的 Φ_B (方法类似电通量的计算).

一般地,磁场是非均匀磁场,曲面 S 也是任意的.因此,我们在 S 面上取小面积元 dS ,在 dS 上 $\mathbf{B}$ 可以视为均匀的, dS 的法线方向与该点磁场 $\mathbf{B}$ 方向之间的夹角设为 α ,如图 3.16 所示.

于是,通过面积元 dS 的磁通量为

$$d\Phi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \cos \alpha dS$$

中国科学技术大学出版社中学物理可用书目

高中物理学(1—4)/沈克琦

高中物理学习题详解/黄鹏志 李 弘 蔡子星

加拿大物理奥林匹克/黄 晶 矫 健 孙佳琪

美国物理奥林匹克/黄 晶 孙佳琪 矫 健

中学奥林匹克竞赛物理教程·力学篇(第2版)/程稼夫

中学奥林匹克竞赛物理教程·电磁学篇(第2版)/程稼夫

中学奥林匹克竞赛物理讲座(第2版)/程稼夫

高中物理奥林匹克竞赛标准教材/郑永令

中学物理奥赛辅导:热学·光学·近代物理学/崔宏滨

物理竞赛真题解析:热学·光学·近代物理学/崔宏滨

物理竞赛专题精编/江四喜

物理竞赛解题方法漫谈/江四喜

中学奥林匹克竞赛物理实验讲座/江兴方 郭小建

物理学难题集萃(上、下册)舒幼生 胡望雨 陈秉乾

大学物理先修课教材·力学/鲁志祥 黄诗登

大学物理先修课教材·电磁学/黄诗登 鲁志祥

名牌大学学科营与自主招生考试绿卡·物理真题篇(第2版)

/王文涛 黄 晶

重点大学自主招生物理培训讲义/江四喜

高中物理母题与衍生·力学篇/董马云

高中物理母题与衍生·电磁学篇/董马云

高中物理解题方法与技巧/尹雄杰 王文涛

中学物理数学方法讲座/王溢然

中学生物理思维方法丛书(13册)/王溢然 束炳如

天猫 Tmall.com

中国科大出版社旗舰店



搜索

编辑部联系方式

电话：(0551) 63606196；15055113738；18130468313

传真：(0551) 63602897 邮箱：edit@ustc.edu.cn

QQ：2102687242；731827650 QQ 群：283907286

出版社天猫店：<https://zgkxjsdxcbs.tmall.com>

编辑部直营微店：<http://weidian.com/s/327373220?wfr=qfriend>

（店内图书按用途分类展示，方便查找）

微信号：15055113738（专加教师）或 18130468313（专加家长）



编辑部微店二维码



购买本书的二维码



购买《大学物理先修课教材·力学》

