

## 第四章 加权网络零模型的构造及应用

|                              |    |
|------------------------------|----|
| 第四章 加权网络零模型的构造及应用 .....      | 1  |
| 本章简介 .....                   | 2  |
| 4.1 引言 .....                 | 3  |
| 4.2 基于随机断边重连的加权无向网络零模型 ..... | 4  |
| 4.2.1 0 阶随机断边重连零模型 .....     | 6  |
| 4.2.2 1 阶随机断边重连零模型 .....     | 7  |
| 4.2.3 等权重随机断边重连零模型 .....     | 8  |
| 4.2.4 无需断边重连的权重随机置乱零模型 ..... | 9  |
| 4.3 有倾向性断边重连的加权无向网络零模型 ..... | 12 |
| 4.3.1 生成具有富人俱乐部效应的零模型 .....  | 12 |
| 4.3.2 生成具有一定匹配特性的零模型 .....   | 17 |
| 4.4 加权有向网络零模型 .....          | 20 |
| 4.4.1 1 阶随机断边重连零模型 .....     | 20 |
| 4.4.2 局域权重置乱零模型 .....        | 21 |
| 4.5 本章小结与展望 .....            | 24 |
| 参考文献 .....                   | 25 |

## 本章简介

本章将加权网络分成加权无向网络和加权有向网络两种形式，分别研究这两类网络的零模型构造及应用，其中重点是加权无向网络。在加权无向网络中基于断边重连的方式生成零模型的方式主要有随机断边重连和有倾向性断边重连两种方式，其中随机断边重连可生成拓扑结构同时置乱、仅置乱拓扑和仅置乱权重这三种零模型；而有倾向性断边重连可生成具有富人俱乐部效应和生成具有一定权匹配特性的两种零模型。此外，还可以不进行断边重连，仅随机化网络中的权重分布生成权重置乱零模型。在本章的最后，讨论了加权有向网络的 1 阶随机断边重连零模型及局域权重置乱零模型。

## 4.1 引言

在无权网络中,所有连边的强度都是相同的,连边仅仅用来表示节点之间是否存在连接。若存在连边,则表示两个节点之间存在连接;否则,不存在连接<sup>[1]</sup>。相对于无权网络,加权网络最突出的特点是就连边的权重值是异质的,即连边的权重是不同的,这反映到实际复杂系统中就是复杂系统中各元素之间相互作用的强度是不同的,而这种交互作用差异性也往往是实际复杂系统中出现某些非平凡特性的重要原因,比如复杂系统中的各种非线性和自组织行为等复杂统计特征<sup>[2, 3]</sup>。比如,在社会网络中的个体之间存在着强弱两种连接<sup>[4]</sup>,而且这两种连接的功能和作用是不同的<sup>[5]</sup>;在新陈代谢网络中各条路径中存在着不均匀的通量<sup>[6]</sup>;在食物链网络中不同物种之间相互作用强度往往也是不同的<sup>[7]</sup>。加权网络中的每条连边都带有一个度量连接强度的数值,为复杂网络中节点之间的关系和相互作用提供了更加细致的刻画手段,因此加权网络已经成为复杂网络研究的一个重要分支<sup>[8]</sup>。

在第二章主要研究了无权网络零模型的构造及在实际网络分析中的应用,在本章中将介绍加权无向网络和加权有向网络的各种零模型。加权无向网络是指网络中的连边有权重但无方向,如图4-1(a)所示。加权有向网络是指网络中的连边既有权重又有方向,如图4-1(b)所示。

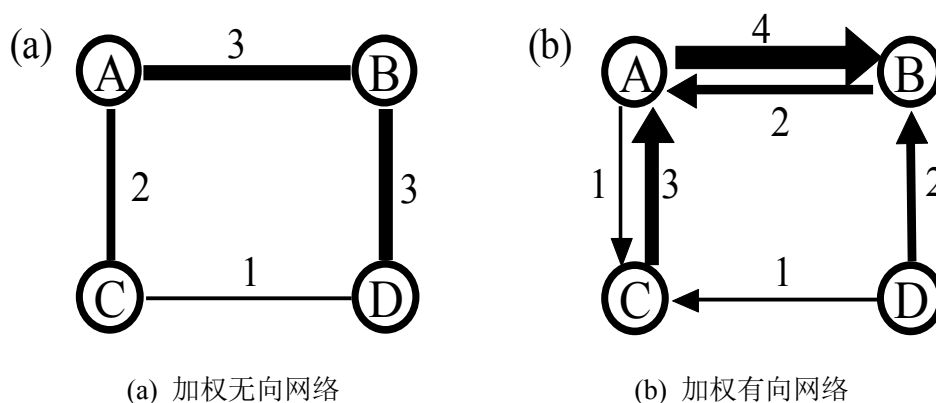


图 4-1 加权网络的两种形式

无向加权网络零模型的构造方式有两种:一种是将原始网络连边进行断边重连,另一种是将原始网络中的权重进行随机置乱,如图 4-2 所示。原始网络断边重连是一种随机化网络拓扑结构的零模型生成方式,既可以将网络中所有连边进行随机断边重连,也可以仅将网络中的部分连边进行有倾向性的断边重连。随机断边重连可以生成比较经典的 0k 和 1k 零模型。有倾向性断边重连可以生成等权重断边重连零模型,或用来检测网络中是否具有富人俱乐部

特性，或者用来检测网络中的匹配特性。权重置乱是在保持原始网络中拓扑结构不变的情况下将网络中的权重进行随机重排，从而产生权重置乱零模型，用来分析原始网络权重分布（而非拓扑结构）的非平凡特性。根据介绍的无向加权网络零模型，读者很容易将其拓展到有向加权网络零模型的生成过程中，因此对于有向加权网络，本章仅介绍、将原始网络随机断边重连和局域权重置乱两种典型零模型。

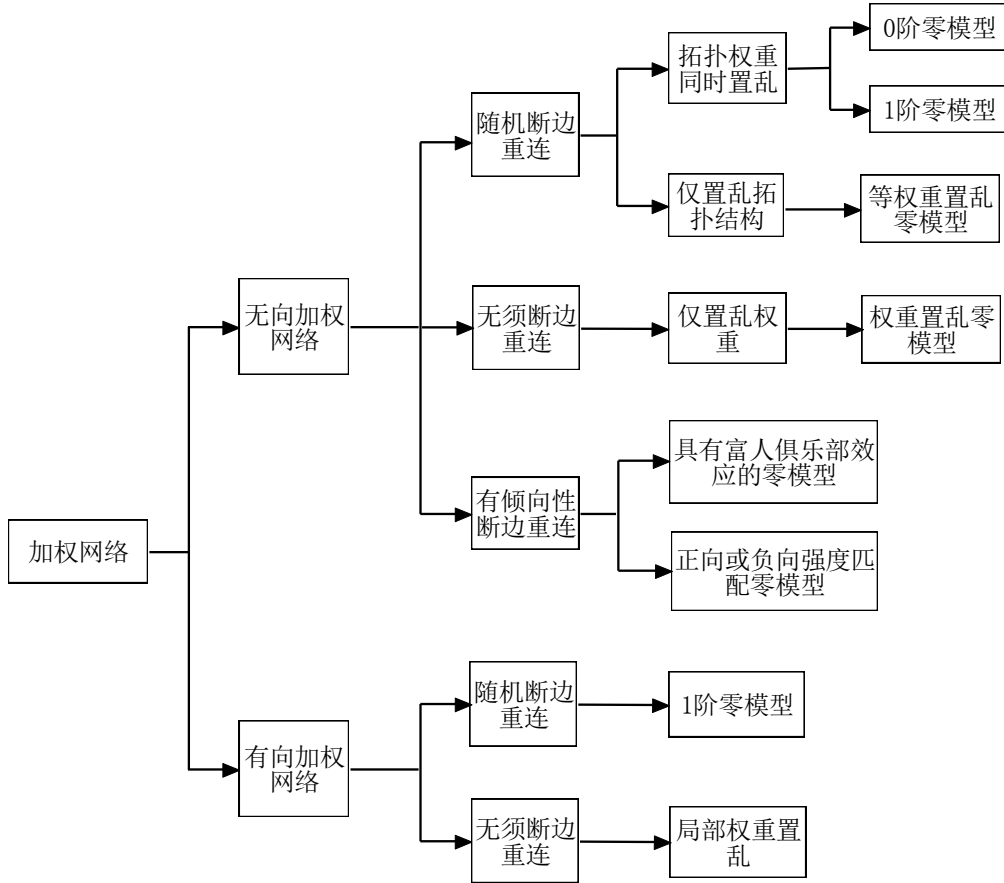


图 4-2 加权网络的分类及其零模型的分类

## 4.2 基于随机断边重连的加权无向网络零模型

相对于无权网络，加权网络增加了权重这个重要属性，其中节点  $i$  的强度  $s_i$  可以很自然地由节点  $i$  的度  $k_i$  推广得到，节点  $i$  的强度  $s_i$  定义为节点  $i$  所有连边的权重值之和：

$$s_i = \sum_{j \in N_i} w_{ij} \quad (4.1)$$

在上式中， $N_i$  是  $i$  的所有邻居节点的集合， $w_{ij}$  为节点  $i$  与邻居节点  $j$  连边的权重。

和无权网络一样，加权网络也可以使用一些模型对其进行刻画和拟合。在现有的配置模型中，一般没有涉及到对权重分布的研究，因此很难作为加权网络的零模型使用。尽管加权网络的建模研究中有几种比较经典的模型，如 Barrat 等建立的 BBV 模型<sup>[9]</sup>和王文旭等提出的交通流驱动模型<sup>[10]</sup>，但是使用这几种模型不容易分析出加权网络的拓扑结构和权重分布这两个因素的相关性，更难分析出这两个因素对网络性质的影响。权重拓扑相关性是指网络上不同层次的拓扑结构和网络结构中节点之间的权重分布存在着一定的相关性，这种相关性有可能存在于局域结构上、也可能存在于全局拓扑结构上，该特性对于复杂系统中的资源优化配置往往具有非常重要的作用<sup>[11]</sup>。基于原始网络的各种零模型方法可以精确控制影响权重拓扑相关性的几个重要因素，因此本章主要阐述如何使用各种置乱算法来构造加权网络的零模型。

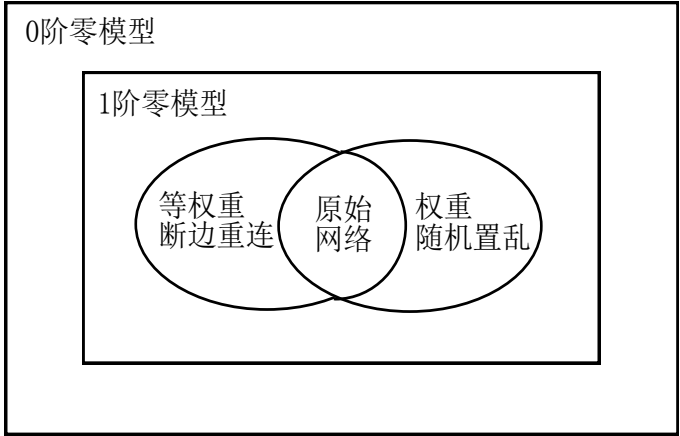


图 4-3 加权无向网络零模型之间的关系图

考虑到原始无向加权网络中存在拓扑结构和权重分布两方面的作用，本节中我们总结了几种常见的加权网络零模型之间的关系并按照其逻辑关系进行阐述，如图 4-3 所示。0 阶和 1 阶零模型从权重和拓扑结构两个层面上随机化了原始网络，因此它们的随机性最强。由于 0 阶零模型仅保证网络的平均强度不变，而 1 阶模型还需要保证节点的度分布不变，因此 0 阶零模型的随机性高于 1 阶零模型。在加权网络上最简单的置乱算法就是进行随机断边重连，但是这样同时随机化了网络的拓扑和连边的权重，无法弄清网络的重要性质是由于网络的拓扑还是连边的权重导致的。为了更精细地分析加权网络，本节还将介绍等权重随机断边重连和权重随机置乱两种零模型。等权重随机断边重连是在保证网络的度分布和强度分布不变的前提下，仅仅将网络的结构进行了随机化；权重随机置乱是在保证网络拓扑结构不变的前提下，仅仅将网络中的权重分布进行了随机化。因为上述两种零模型都仅仅随机化了网络的一方面特征：随机化节点间权重相关性或网络的结构拓扑结构，所以它们的随机性较低。

通过比较上述两类零模型和原始网络的性质差异,可以得知拓扑结构和权重分布两个因素对原始网络性质的影响大小。

4.2.1 0 阶随机断边重连零模型

随机断边重连不但可以构造无权网络的 0 阶零模型,也可以用来产生加权无向网络的 0 阶零模型。由于加权网络中的连边带有权重,因此断边重连过程中要保证删除的连边和新增的连边权重一致。每次断边重连的具体过程如图 4-4 所示:先随机从原始网络中删除一条带有权重的连边,如图 4-4 (a)所示中的 AC 边,再随机从网络中选择两个不相连的节点,如 A、D 节点,在 A 与 D 之间添加一条连边,新添加的连边权重要与原始网络 AC 边的权重相同,重连后的结果如图 4-4(b)所示。为了使网络充分随机化,一般应根据网络的规模将上述断边重连过程重复多次,直到原始网络足够随机化后才认为生成了对应的零模型。

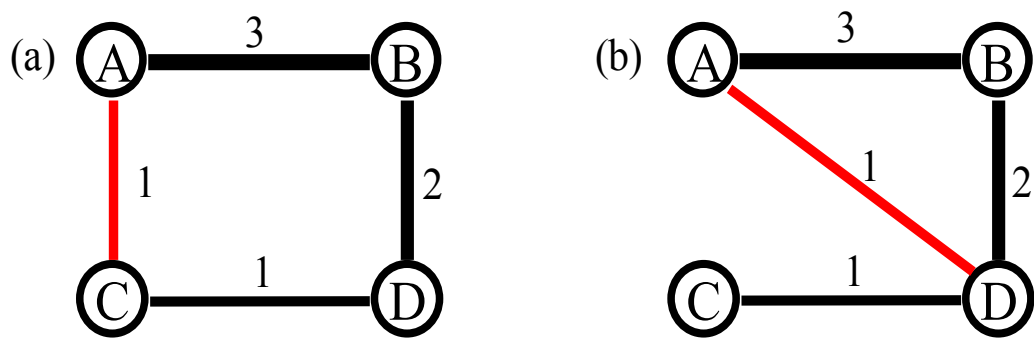
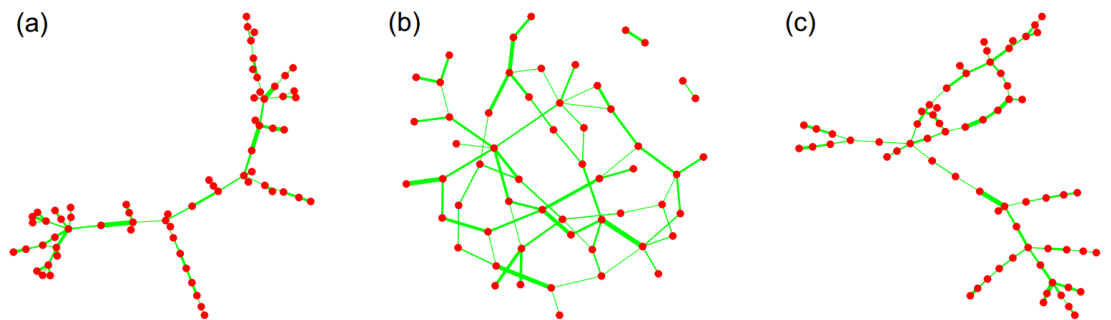


图 4-4 原始网络和使用随机断边重连算法构造的 0 阶零模型网络

加权无向网络的随机断边重连 0 阶零模型程序实现见附录程序,输入参数为原始网络 G0,交换次数为 nswap,最大尝试次数为 max\_tries,输出为基于随机断边重连 0 阶零模型 G1。根据图 4-4 的原理生成的网络零模型并没有要求一定要保证零模型网络的连通性,如果原始网络是一个全联通网络,可以采用程序约束生成的零模型网络也是全联通的。图 4-5 为短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下使用断边重连构造的 0 阶零模型。



(a) 短信交互原始社交网络 (b) 0 阶零模型 (c) 保证连通性情况下构造的 0 阶零模型

图 4-5 短信交互社交网络和在无连通及有连通性情况下使用断边重连构造的 0 阶零模型

#### 4.2.2 1 阶随机断边重连零模型

加权网络中 0 阶零模型改变了原始网络的度分布和权重分布,是随机性最强的一种零模型。为了降低零模型的随机性,本节中介绍随机化程度低一些的保持网络度分布不变的 1 阶零模型。加权网络 1 阶零模型也可以使用随机断边重连的方式产生,具体构造过程如图 4-6 所示:先随机选择四个不同节点,如图 4-6(a)中的 A、B、C 和 D 四个节点,保证这四个节点之间至少存在两条连边如 AC 和 BD,然后将这两条连边断开后在 AD 和 BC 之间生成新的连边,新添加的连边 AD(BC)的权重分别与原始网络 AC(BD)边的权重相同,重连后的结果如图 4-6(b)所示。为了使网络充分随机化,一般应根据网络的规模将上述断边重连过程重复多次,直到原始网络足够随机化后才认为生成了对应的零模型。1 阶随机断边重连零模型、等权重置乱零模型和权重置乱零模型这三种模型同时使用,对原始网络进行综合分析,可以精确了解原始网络中结构和权重两个方面的随机性和非平凡性。

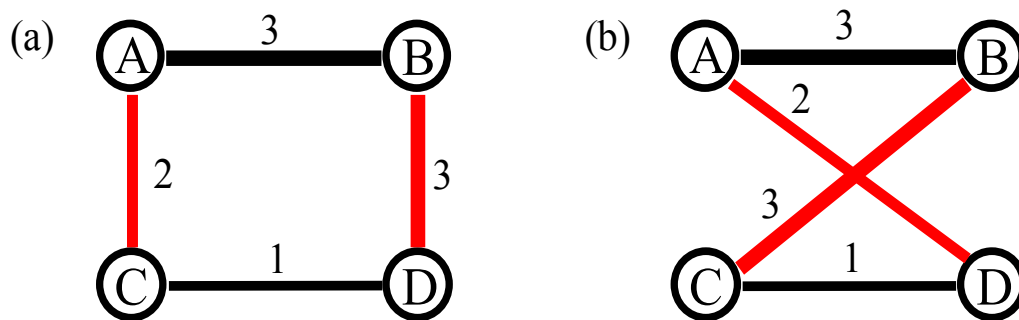
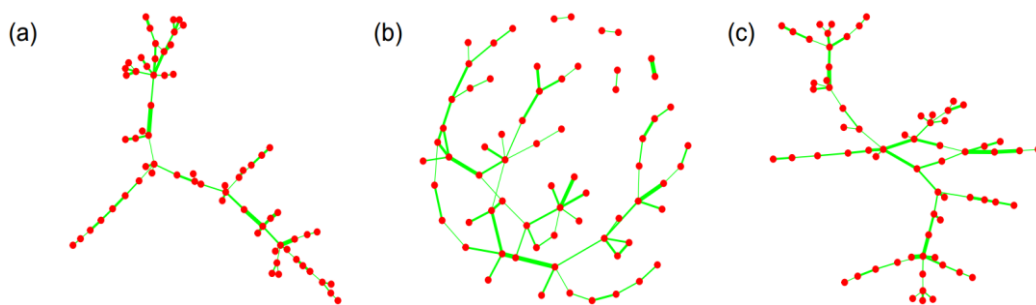


图 4-6 原始网络和使用随机断边重连算法构造的 1 阶零模型网络

根据图 4-6 介绍的加权无向网络 1 阶零模型的构造原理,我们定义了如下的程序实现该零模型的构造:

```
G1 = wnm.random_1k(G0, nswap, max_tries)
```

上述生成的网络零模型没有保证网络的连通性,如果原始网络是一个全联通网络,我们可以采用程序约束生成的零模型网络也是全联通的。如果有需要保持网络的联通行,可以使用 `wnm.random_1kc()` 函数,该函数能够保证如果在随机断边重连后零模型网络不保持连通性,则撤销该操作。图 4-7 为原始短信社交网络和基于该网络在无连通性及有连通性情况下使用断边重连构造的 1 阶零模型。



(a) 短信交互社交网络 (b) 1 阶零模型 (c) 保证连通性情况下构造的 1 阶零模型

图 4-7 短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下使用断边重连构造的 1 阶零模型

#### 4.2.3 等权重随机断边重连零模型

上述加权网络的零阶模型与 1 阶模型同时置乱了网络的拓扑和权重,无法分辨出原始网络中权重相关性还是拓扑结构是该网络非平凡特性的内在因素。本节中介绍的等权重断边重连算法保证了连边权重没有发生改变,改变的仅仅是网络的拓扑结构,可以用来衡量原始网络中拓扑结构对于网络非平凡特性的影响。

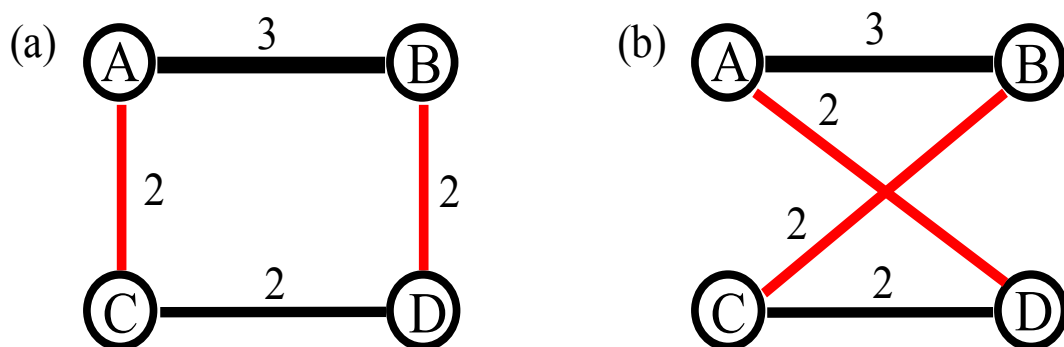


图 4-8 原始网络和使用等权重断边重连算法构造的零模型网络

等权重断边重连算法的具体产生过程如图 4-8 所示。首先随机选取一对权重相等的连边,如图 4-8(a)中的边 AC 和 BD,如果此时节点 A 与 D 不相连, B 与 C 不相连,那么可将连边 AC 和 BD 切断,再使节点 A 与 D 相连, B 与 C 相连,连边上的权重均和以前的连边 AC(BD)权重相同。等权重置乱算法破坏了网络的拓扑结构,但每个节点的强度并没有发生变化,每个节点连边之间的权重相关性也没有发生变化,因此可以用来研究拓扑结构对网络性质的影响。在有些网络中,寻找权重相同的连边比较困难,此时为了保证尽可能交换比较多的连边,可以在要求不严格的情况下,认为权重近似的边为权重相同的边进行交换。

根据图 4-8 介绍的加权无向网络等权重随机断边重连零模型的构造原理,我们定义了如下函数实现该功能:

`G1 = wnm.random_sw(G0,nswap,max_tries)`



上述程序生成的网络零模型没有保证网络的连通性，如果原始网络是一个全连通网络，可以采用程序 `G1 = wnm.random_swg()` 约束生成的零模型网络也是全连通的。图 4-9 为短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下使用断边重连构造的等权重随机断边重连零模型。

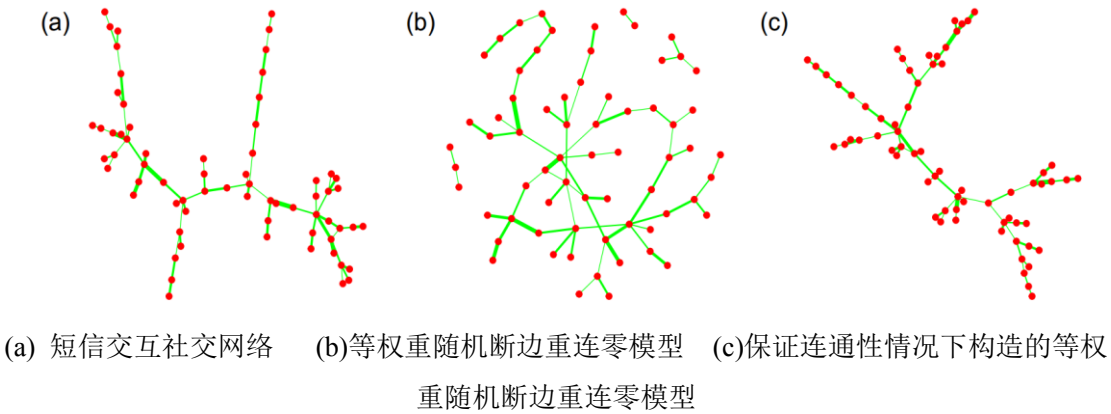


图 4-9 短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下的等权重随机断边重连零模型

#### 4.2.4 无需断边重连的权重随机置乱零模型

除了原始网络的拓扑结构，节点之间的权重相关性是影响网络不平凡特性的另一个重要因素。为了单独研究权重的影响，北师大狄增如研究小组在对经济物理学家交流网络的研究中提出了权重置乱算法<sup>[12]</sup>。典型权重置乱算法的具体过程如图4-10所示，首先在网络中随机选取两个权重不相等的连边，如连边AB的权重为3，CD的权重为2；然后将两个连边的权重置乱(交换)，置乱后连边AB的权重为2，CD的权重为3。根据网络的规模重复上述两个步骤足够多次，就可以达到置乱连边权重的目的。

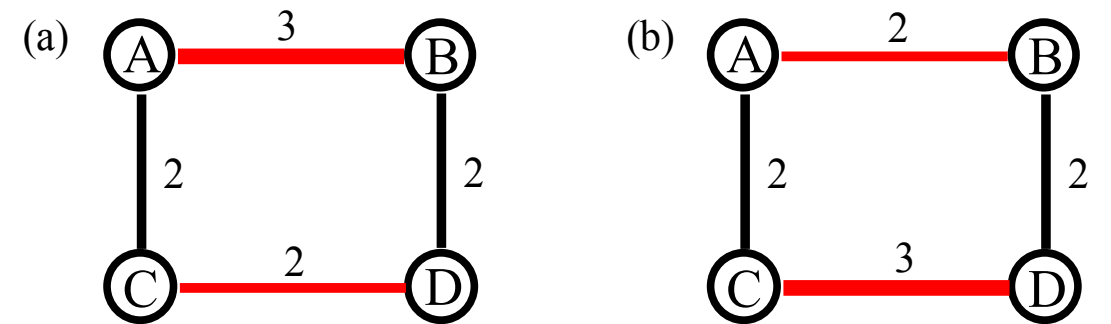


图 4-10 原始网络和使用权重置乱算法构造的零模型网络

根据图 4-10 介绍的加权无向网络权重随机断边重连零模型的构造原理，定义了如下函数实现该功能：

`G1 = wnm.random_w(G0,nswap,max_tries)`

在使用权重置乱算法的过程中，我们仅仅将原始网络中的权重进行置乱，并没有改变网络的拓扑结构，因此并不会改变原始网络的连通性。图 4-11 为短信社交网络和基于该网络构造的等权重随机断边重连零模型。

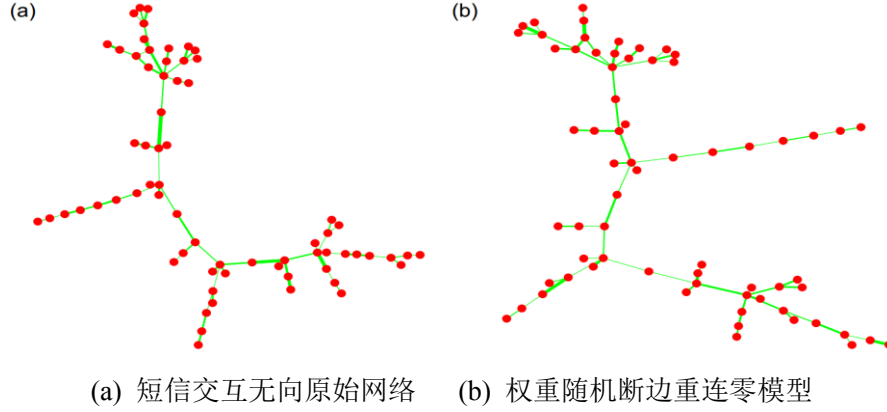


图 4-11 短信交互无向原始网络模型和使用断边重连构造的权重随机断边重连零模型

权重置乱算法在不改变网络拓扑的情况下，随机化了连边上的权重，可以用来研究权重对网络的影响。Ramasco 就利用了权重置乱零模型，检测了多个实际网络中的权重相关性<sup>[13]</sup>。首先，他们利用公式(4.2)检测了网络中每个节点的权重相关性分布。

$$r_i = \frac{w_{\max}(i) - w_{\min}(i)}{w_{\max}(i) + w_{\min}(i)} \quad (4.2)$$

上式中， $w_{\max}(i)$ 表示网络中节点*i*所连的连边上的最大权重值， $w_{\min}(i)$ 表示节点*i*所连的连边上的最小权重值。 $r_i$ 值的范围在 0-1 之间，如果 $r_i$ 值越趋向于 0，则说明节点*i*所拥有的各个连边的权值就越接近。相反的，若 $r_i$ 值越趋向于 1，节点所拥有的各个连边的权值差距越大。进一步的利用权重置乱算法，将原始网络的权重进行随机置乱。可以采用如下公式检测整个网络的连边权重相关性：

$$\rho = \langle r \rangle_{orig} / \langle r \rangle_{rand} \quad (4.3)$$

其中， $\langle r \rangle_{orig}$ 表示原始网络中，所有节点的 $r_i$ 值之和的平均值。 $\langle r \rangle_{rand}$ 表示权重随机置乱零模型网络中，所有节点的 $r_i$ 值之和的平均值。若 $\rho < 1$ ，则原始网络相对于权重随机置乱零模型显示了正的连边权重相关性。权重相关性越强，所对应的 $\rho$ 值就越小。若 $\rho > 1$ ，则原始网络相对于权重随机置乱零模型显示了负的相关性。而当 $\rho = 1$ ，则表示原始网络中的连边权重无相关性。

Ramasco 等分别对演员合作网络和航空网络的测量发现这两个实际网络中相邻连边之间均存在正的权重相关性，且这种权重相关性对网络的作用是非常重要的<sup>[13]</sup>。此外，狄增如等在对规则网络的权重置乱研究中发现权重置乱可以引发网络的小世界效应，并且可以显著提高混沌系统的同步能力<sup>[14]</sup>。在研究手机通信网络的时候，Onnela 等也使用了权重置乱算法，通过将置乱后的零模型网络与原始网络的对比，发现个体之间的交互强度与网络的局部拓扑有很强的关联性<sup>[15]</sup>。在分析网络中派系强度分布时，Pan 等人将科学家合作网络与具有相同拓扑结构和派系数目的权重随机置乱零模型做比较<sup>[16]</sup>，他们将网络中连边的权重定义为：

$$w_{ij} = \sum_p \frac{1}{n_p - 1} \quad (4.4)$$

其中， $p$  为作者  $i$  和作者  $j$  之间共同合作的论文数， $n_p$  为每篇论文中共有的作者数目。

同时，定义网络中派系的强度为：

$$I(g) = \left[ \prod_{ij \in l_g} w_{ij} \right]^{1/|l_g|} \quad (4.5)$$

$I(g)$  为网络中子图  $g$  的派系强度， $|l_g|$  为在子图  $g$  中连边的数目。图 4-12 显示的是原始网络以及相应的权重置乱零模型中派系强度分布图。

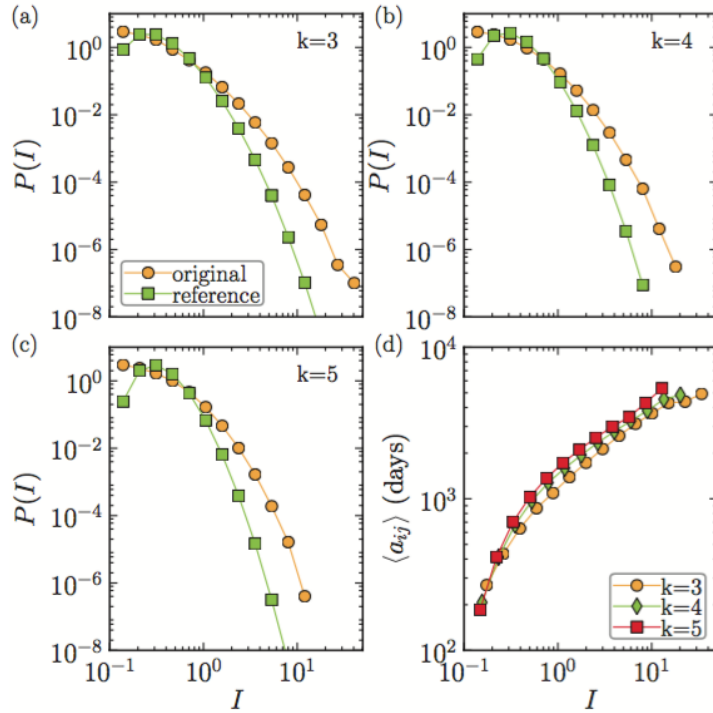


图 4-12 派系强度分布图(取自文献<sup>[16]</sup>)

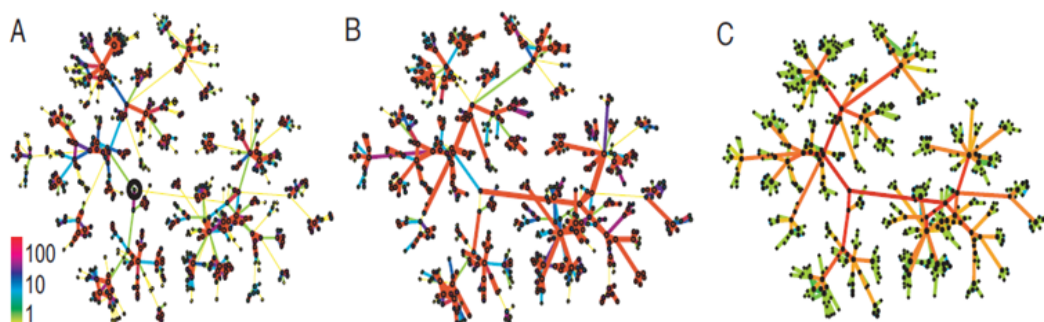
图(a)-(c)分别表示了网络中子图的派系为 3-5 的强度分布图，图(d)表示相互合作的科学家之间共同在一起合作的时间数。各图中圆点表示原始网络，方块表示权重置乱零模型网络。从图(a)-(c)中我们可以看出，原始网络中派系的强度分布呈现出更高的数值，具有更多的高强度值。同时，由图(d)可知，一般科学家合作的时间越久，他们之间的合作强度就越大。

弱链接的强作用最早是指人们在寻找工作时，那些关系紧密的朋友（强连接）反倒没有那些关系一般的甚至只是偶尔见面的朋友（弱连接）更能发挥作用<sup>[17]</sup>。2007 年，Onnela 等人研究移动电话社交网络中强弱链接的作用，在对原始网络进行可视化后发现(如 (a) 原始网络 (b) 权重置乱零模型网络 (c) 按照介数值大小进行放置权重的全局最优网络

图 4-13(a)所示)，网络中社团内部之间的链接权重相对较强，而社团与社团之间的链接权重则相对较弱<sup>[18]</sup>。针对这种情况，他们将原始网络的权重进行置乱，如(a) 原始网络 (b) 权重置乱零模型网络 (c) 按照介数值大小进行放置权重的全局最优网络

图 4-13(b)所示，发现社团内部之间弱连接较多，而社团之间则产生了较多的强连接，该现象可以说明原始网络内部存在强连接，而社团之间的连接多为弱连接的形式存在。最后，他们尝试按照介数值大小进行放置权重，形成全局最优的加权网络，如(a) 原始网络 (b) 权重置乱零模型网络 (c) 按照介数值大小进行放置权重的全局最优网络

图 4-13(c)所示，将该图和图(a)进行比较可知，原始网络中有些弱连接链的介数中心性比较大，因此可以说明，在该网络中的弱连接也起到非常重要的作用，同时这种弱链接也体现出社交网络的非最优化性质。



(a) 原始网络 (b) 权重置乱零模型网络 (c) 按照介数值大小进行放置权重的全局最优网络

图 4-13 移动电话社交网络的可视化<sup>[18]</sup>

## 4.3 有倾向性断边重连的加权无向网络零模型

### 4.3.1 生成具有富人俱乐部效应的零模型

在第二章中我们介绍了在无权网络中存在的富人俱乐部现象，比如在 Internet 网络中，度大节点（富节点）之间连接往往比较多，形成的网络子图密度也比较大<sup>[19]</sup>。在加权网络中，我们将强度大的节点定义为富节点，称强度大的节点(富节点)之间相互连接的现象为富人俱乐部现象。

在图 4-14(a)所示的网络中，可以看到节点的尺寸有大有小，节点之间的连边有粗有细。这里节点的尺寸大小表示该节点的强度，节点越大表示它们的强度也就越大。而连边的宽度表示的是连边权重的大小，边越宽，表示权重越大。在最重要的五个节点（红色标记）之间的六条连接的权重之和为 14；在图 4-14(b)中，最强的六条连接为黑色，他们的权重总和为 21。因此得到两者的比值为  $14/21 = 2/3$ <sup>[11]</sup>。通过上面的一个简单的边权重数值分析，可以看出在加权网络中的富人俱乐部现象，不但要考虑节点的度，也要考虑边的权重。

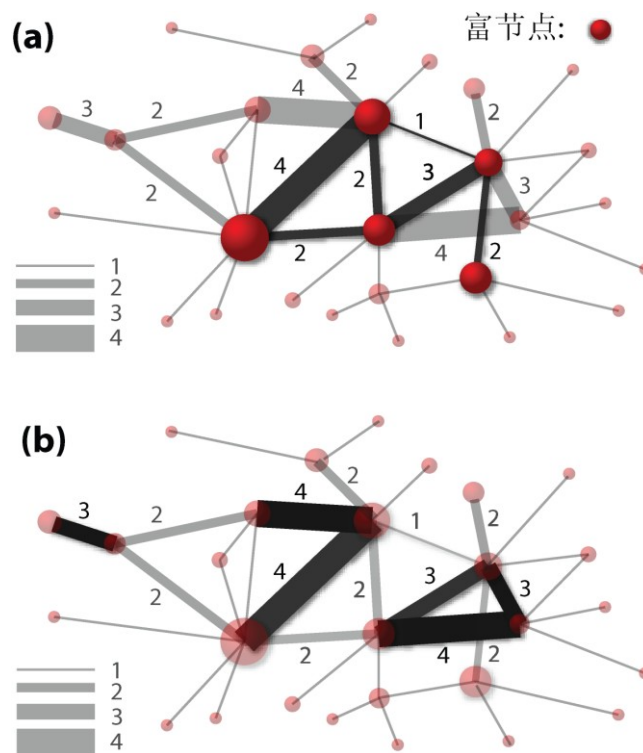


图 4-14 权重网络的富人俱乐部现象<sup>[11]</sup>

富人俱乐部现象除了节点度数很大或者与之相连的边权重很大之外，还有一个重要的特性就是这些富节点之间往往更倾向于连边，在加权网络中可以用加权富人俱乐部系数来表

示。加权富人俱乐部系数的主要作用就是被用来研究连接权重最大的连边是否存在于强度最大的节点之间，Opsahl等给出了如下定义<sup>[11]</sup>：

$$\varphi(r) = \frac{E_{>r}}{\sum_{l=1}^{E_{>r}} W_l^{rank}} \quad (4.6)$$

上式的具体计算过程如下：首先定义节点强度大于一定值的节点为富节点，然后计算这些节点之间的所有连边强度之和  $E_{>r}$ ，接着计算同样数量权重最大连边的权重之和为

$\sum_{l=1}^{E_{>r}} W_l^{rank}$ ，最后再求出前面两项的比值。如果权重最大的连接都存在于重要节点之间，那么上面计算出的比值应为1。一般情况下，并不是所有权重最大的连接都存在于富节点之间，因此这个比值一般都小于1。但是这个比值也是一个绝对量，这个量的大小是依赖于具体实际网络的，因此为了有可比性，很多时候都使用实际网络和其对应的随机化零模型网络进行对比，判断比值为：

$$\rho^w(r) = \frac{\varphi(r)}{\varphi_{w,null}(r)} \quad (4.7)$$

上式中， $\varphi_{w,null}(k)$ 代表的是实际网络随机化后的加权富人俱乐部系数。我们根据  $p^w(r)$  是否大于 1 来作为加权网络中是否具有富人俱乐部现象的依据<sup>[20]</sup>。如果  $p^w(r) > 1$  表明原始网络有正向的加权富人俱乐部影响，也就是说富节点之间更倾向于相互连接。 $p^w(r) < 1$  表明原始网络有负向的加权富人俱乐部影响，即富节点之间不倾向于相互连接。

Opsahl 等人将航空网络、科学家合作网络和在线社会网络分别使用一阶随机断边重连和权重随机置乱生成零模型，用来研究网络中的富节点是否控制资源流动<sup>[11]</sup>。在研究过程中，作者根据节点的度来定义富节点，根据  $p^w(r)$  值(如公式(4.7))是否大于 1 来判断加权网络中是否具有富人俱乐部现象，并以此来判断富节点是否控制资源流动，具体的数值分布如图 4-15 所示。图中的方格线表示根据权重置乱算法产生的零模型的  $p^w(r)$  值，圆圈代表根据连边置乱算法产生的零模型的  $p^w(r)$  值。



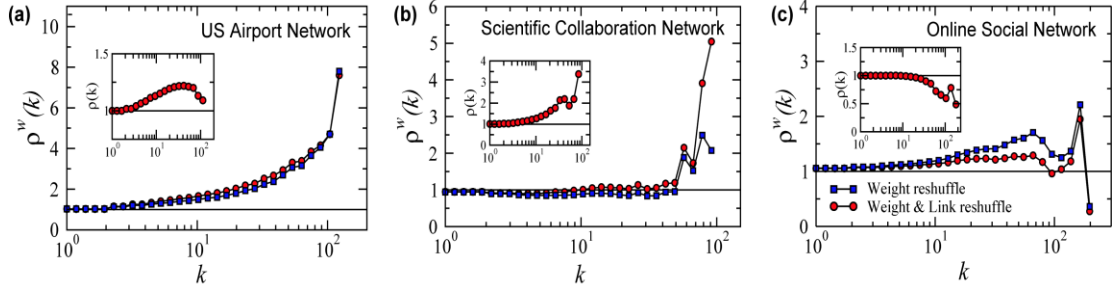


图 4-15 权重富人俱乐部对这三个网络的影响(取自文献<sup>[11]</sup>)

可以发现在航空网络中具有很强的富人俱乐部效应，如图 4-15(a)所示。主要原因是中心机场到各个目的地之间有大量的客流，即节点的度和连边权重之间有强的相关性，度大节点控制了资源的流动。相反，在科学家合作网络中，发现合作密度跟合作人数之间缺乏相关性，资源流动与富节点无关，没有呈现出富人俱乐部效应，如图 4-15(b)所示。而对在线社会网络，如图 4-15(b)所示。可以发现受欢迎的个体彼此之间很少有联系，但是一旦发生了联系，个体之间便会建立比随机情况更强的联系，因此该网络也呈现出富人俱乐部效应<sup>[11]</sup>。

在上述的论述中，我们讨论了如何基于网络零模型来检验原始加权网络是否具有富人俱乐部特性，此时使用 1 阶网络零模型即可。在有些实际应用中，我们也需要生成存在（或不存在）富人俱乐部的加权网络零模型。在无权网络中，Zhou 提出了改变网络富人俱乐部系数的局域断边重连算法<sup>[13]</sup>。根据加权网络的特性，本节也尝试构造出存在（或不存在）富人俱乐部特性的加权网络零模型，具体的构造过程如图 4-16 所示：首先根据节点的强度将所有节点分成富节点和非富节点。然后随机选择两个富节点，如图 4-16(a)中的节点 A、B 节点，并保证在断边重连之前节点 A、B 之间无连接，没有形成富人俱乐部。接着从节点 A、B 的连边中随机选择两条边，保证这两条边连接的都是非富节点如 C 和 D 两个节点，且 C 与 D 这两个节点之间不存在连边。最后采用断边重连算法先将连边 AC、BD 断开，再使节点 A 与节点 B 相连，节点 C 与节点 D 相连，这样富节点 A 与富节点 B 相连后网络就有了富人俱乐部性质(如图 4-16(b)所示)。上述算法描述的是如何使网络构造具有强的富人俱乐部特性，如果将这一过程反过来运用，也可构造出一个几乎没有富人俱乐部特性的零模型网络。

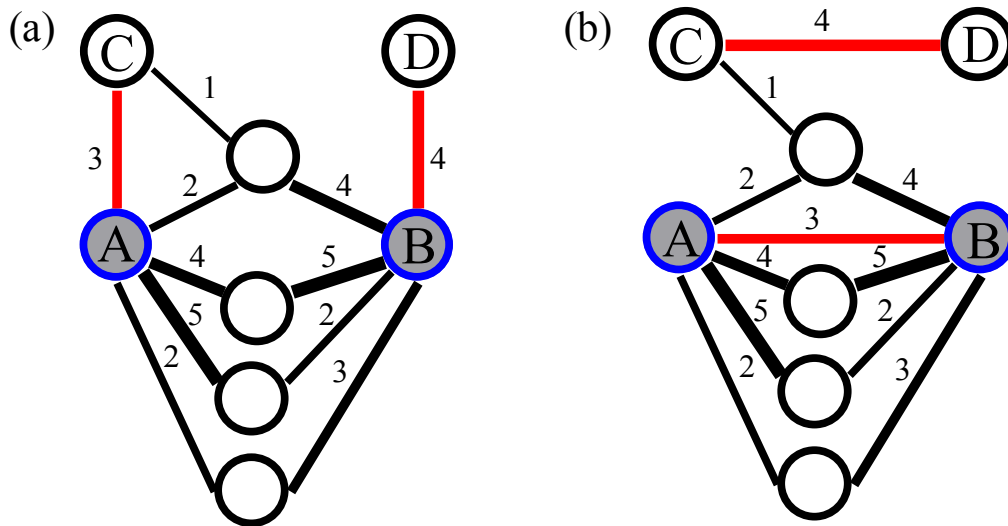


图 4-16 原始网络和使用断边重连算法构造的具有富人俱乐部特性的网络

根据图 4-16 介绍的加权无向网络中富人俱乐部特性的构造原理，我们定义了如下程序生成零模型网络：

`G1 = wnm.rich_club_creat(G0, rich_degree, max_tries)`

程序的输入参数为原始网络  $G_0$ ，富节点的最小强度  $rich\_degree$ （强度大于  $rich\_degree$  的节点为富节点）， $max\_tries$  为尝试次数，输出为具有富人俱乐部特性的网络  $G_1$ 。上述程序生成的网络零模型没有保证网络的连通性，如果原始网络是一个全联通网络，可以采用程序  $G1 = wnm.rich\_club\_creatc()$  约束生成的零模型网络也是全联通的。图 4-17 为短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下使用断边重连构造的具有富人俱乐部特性网络零模型。

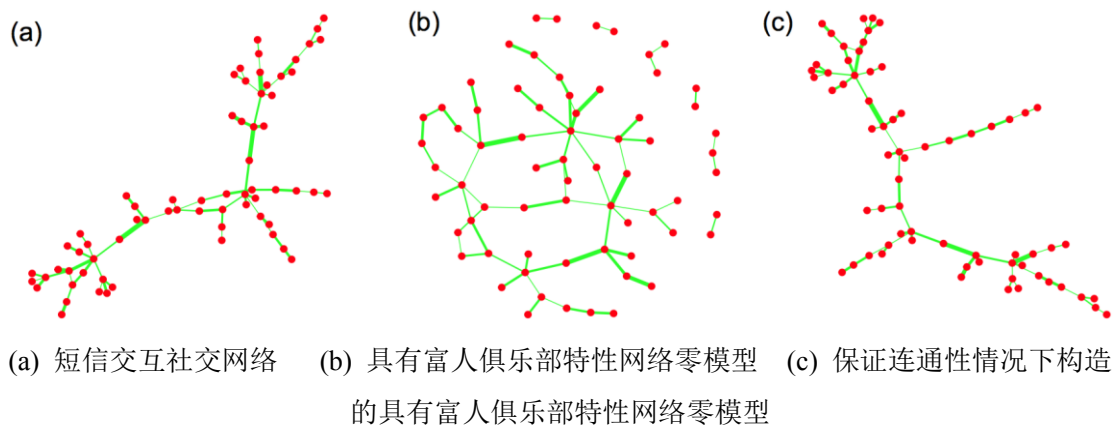


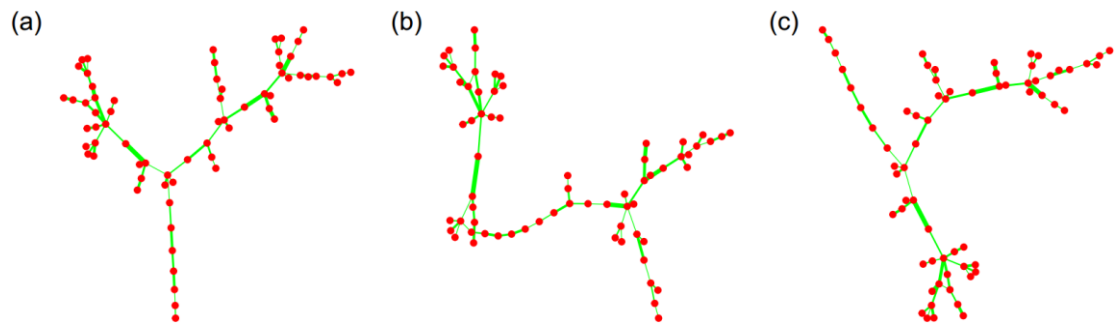
图 4-17 短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下有富人俱乐部特性的网络零模型

上述代码可生成具有富人俱乐部特性的网络，将这一过程反过来进行，就可以生成不具有富人俱乐部特性的网络。我们根据非富俱乐部网络的特性定义了如下函数实现该功能：

`G1 = wnm.rich_club_break(G0, rich_degree, max_tries)`



输入参数为具有连通性的原始网络  $G_0$ ，富节点的最小强度  $\text{rich\_degree}$ ，（强度大于  $k$   $\text{rich\_degree}$  的节点为富节点），输出为没有富人俱乐部特性的网络  $G_1$ 。上述程序生成的网络零模型没有保证网络的连通性，如果原始网络是一个全联通网络，我们可以采用程序  $G_1 = \text{wnm.rich\_club\_breakc}()$  约束生成的零模型网络是全联通网络。图 4-18 为短信交互社交网络和在不连通性及有连通性情况下构造的不具有富人俱乐部特性网络零模型。



(a) 短信交互社交网络 (b) 不具有富人俱乐部特性的网络零模型 (c) 保证连通性情况下构造的不具有富人俱乐部特性的网络零模型

图 4-18 短信交互社交网络和在不连通性及有连通性情况下构造的不具有富人俱乐部特性的网络零模型

### 4.3.2 生成具有一定匹配特性的零模型

在加权网络中，如果强度大的节点倾向于和强度大的节点相连，强度小的节点倾向于和强度小的节点相连，那么网络中存在节点强度的正匹配特性。相反，如果强度小的节点倾向于和强度大的节点相连，那么网络中存在节点强度的负匹配特性。加权随机置乱算法不仅破坏了网络拓扑，也扰乱了网络本身的强度相关性，使连边不再具有强度同配或异配特性。

在前文中，我们已经介绍了无权网络中匹配系数的定义式，这里给出加权网络中的加权匹配系数的定义式为<sup>[21]</sup>：

$$r_{w1} = \frac{H^{-1} \sum w_{ij} k_i k_j - [H^{-1} \sum \frac{1}{2} w_{ij} (k_i + k_j)]^2}{H^{-1} \sum \frac{1}{2} w_{ij} (k_i^2 + k_j^2) - [H^{-1} \sum \frac{1}{2} w_{ij} (k_i + k_j)]^2} \quad (4.8)$$

上式中  $H$  为网络中的总边数， $w_{ij}$  为节点  $i$  和  $j$  的连边的权重。如果  $r_{w1}$  大于不考虑权重的匹配系数  $r$  时，则表示节点间权重高的连边更倾向于存在于节点度相差不是很多的节点之间。相反当  $r_{w1} < r$  时，可以将其理解为，高权重的连边存在于节点度相差很大的节点之间。

尽管  $r_{w1}$  的定义能保证当所有的连边权重都相同时， $r_{w1} = r$ ，但上述定义和原始匹配系数的

物理意义是有一定差别的。无权网络中，匹配系数  $r$  表征的是网络中节点度的匹配特性，那么加权匹配系数应该表征的是节点强度的匹配特性，即不同强度的节点倾向于连接还是不连接，但是  $r_{w1}$  的定义和这个目标有很大的区别，因此我们可以尝试将加权匹配系数定义为下面的式子：

$$r_{w2} = \frac{M^{-1} \sum s_i s_j - [M^{-1} \sum \frac{1}{2} (s_i + s_j)]^2}{M^{-1} \sum \frac{1}{2} (s_i^2 + s_j^2) - [M^{-1} \sum \frac{1}{2} (s_i + s_j)]^2} \quad (4.9)$$

上式中， $s_i$  和  $s_j$  为一条连边两个端点的强度。如果加权匹配系数  $r_{w2} > 0$ ，则称加权网络是同配的，此时节点强度相似的节点倾向于相互连接。如果  $r_{w2} < 0$ ，则称加权网络是异配的，此时节点强度相差很大的节点之间倾向于存在连接关系。公式(4.9)中给出了衡量权匹配特性的绝对值，但是这个绝对值的结果也往往并不是准确的，为了更加准确检测实际网络的权匹配特性时，我们需要做出如下的修正。在保持网络中节点强度不变的情况下生成原始网络对应的零模型，如一阶随机断边重连零模型、等权重随机断边重连零模型或权重置乱零模型，并将产生的零模型网络的权匹配系数平均值  $\langle r_{w2} \rangle$  与原始网络的  $r_{w2}$  做对比。若  $r_{w2} > \langle r_{w2} \rangle$ ，认为原始网络是同配的；若  $r_{w2} < \langle r_{w2} \rangle$ ，认为原始网络是异配的。同时，可根据原始网络 and 不同零模型的比较结果推断出原始网络具有同配或异配特性的原因。

如果想有倾向性的改变原始网络中节点强度之间匹配特性，就需要有选择的进行断边重连来构造强度同配或异配网络。如图 4-19 所示，原始网络(a)中有 A、B、C、D 四个节点，且每个节点的强度均不相同，强度大小依次为 A、D、C 和 B。如果将原始网络强度大的节点 A 和强度大的节点 D 相连、强度小的节点 B 和强度小的节点 C 相连(如图 4-19(b)所示)，那么就增强了网络的同配特性。将这一过程反复进行，就可以生成强同配性的网络。相反，将原始网络的强度最大的节点 A 和强度最小的节点 B 相连，其余节点 C 和 D 相连(如图 4-19(c)所示)，那么就增强了网络的异配特性，反复进行就可以生成强异配性的网络。

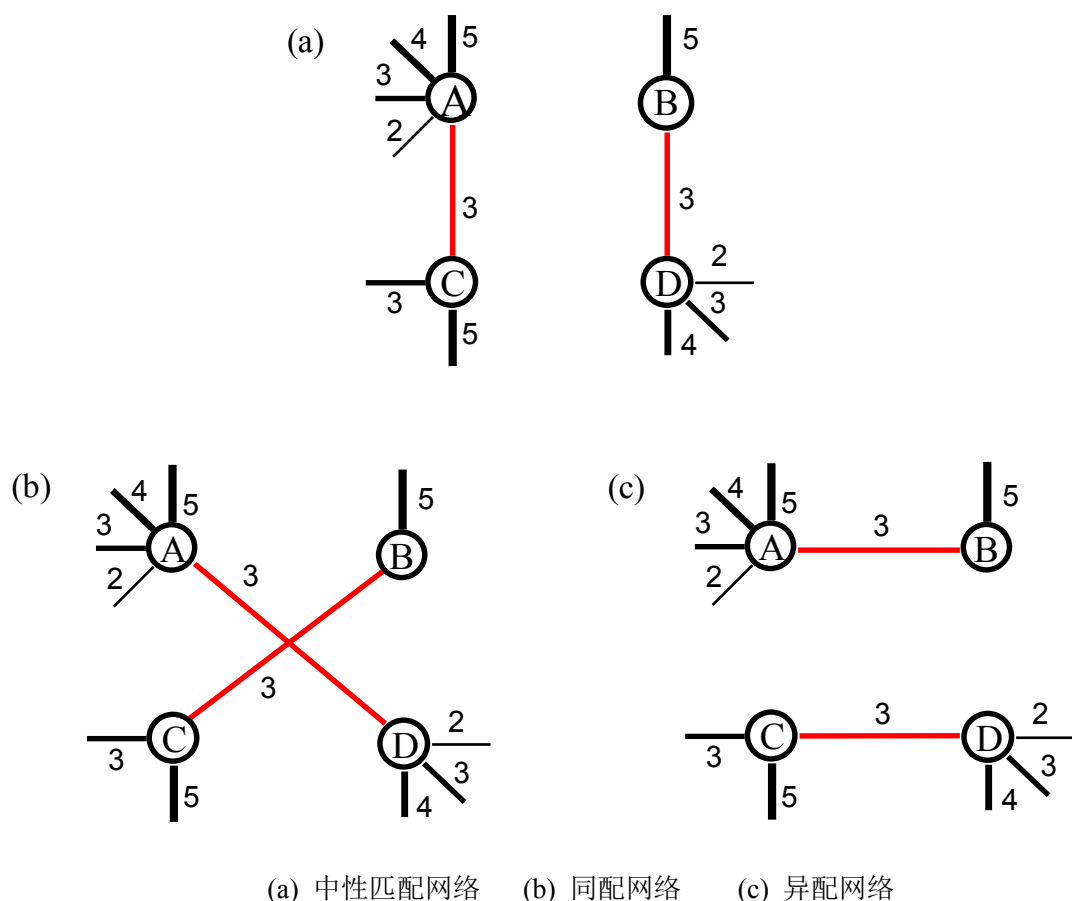


图 4-19 复杂网络中三种不同的强度匹配模式

根据图 4-19 介绍的加权无向网络中同配网络的构造原理，我们定义了如下所示的程序生成零模型网络：

`G1 = wnm assort_mixing(G0, nswap, max_tries)`

该程序在网络中随机的选取两条边，将边上的四个节点根据强度由大到小的顺序依次进行排序，并将强度大的节点和强度大的节点相连，强度小的节点和强度小的节点相连。重复该操作直到强度相差不大的节点之间所有可能的连接均相连为止。上述生成的网络零模型没有保证网络的连通性，如果原始网络是一个全联通网络，可以采用程序 `G1 = wnm assort_mixingc()` 约束生成的零模型网络为全联通网络。图 4-20 为短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下构造的同配网络零模型。

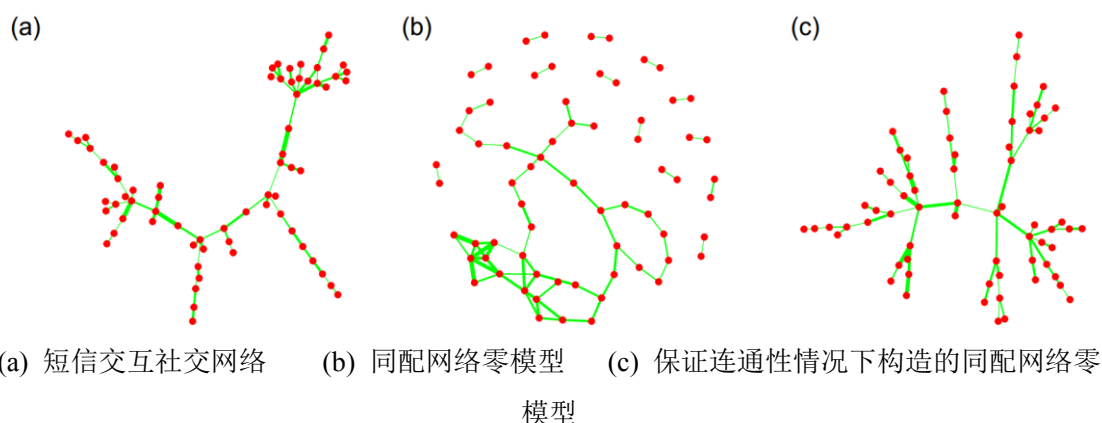


图 4-20 短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下断边重连构造的同配网络零模型

根据异配网络零模型的构造原理，我们定义了如下函数实现该功能：

`G1 = wnm.disassort_mixing(G0,nswap,max_tries)`

该算法的生成过程与同配网络的生成过程基本一致，不同的是需要将排序后强度大的节点和强度小的节点相连，构成异配网络。同样，我们可以采用程序 `G1 = wnm.disassort_mixingc()` 约束生成的零模型网络为全联通网络。图 4-21 为短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下断边重连构造的异配网络零模型。

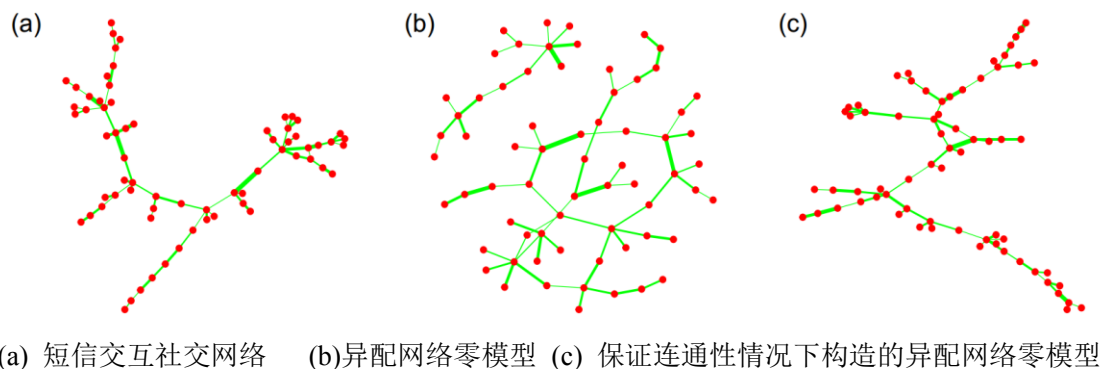


图 4-21 短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下构造的异配网络零模型

## 4.4 加权有向网络零模型

加权无向网络从拓扑结构、权重相关性这两方面构造了网络的零模型，加权有向网络不但要考虑上述两个因素，还需要考虑连边的方向性对网络性质的影响，因此一般认为其零模型比加权无向网络更复杂。但实际上，如果将所有的有向边都看成出边(或入边)，那么其零模型生成的思想和基本方法和加权无向网络是很相似的，因此这里我们就不一一赘述有向加权网络的产生方法，仅选择 1 阶随机断边重连零模型和局部权重重置零模型这两种典型零模型构造方式进行具体阐述。

#### 4.4.1 1 阶随机断边重连零模型

加权有向网络的 1 阶零模型同样可以采用随机断边重连的方式产生，具体的构造过程如图 4-22 所示。如果在有向加权网络中节点 A 有出度指向 B，节点 C 有出度指向 D，且没有连边 A→D 和 B→C。我们就将连边 A→B 和 C→D 删除，再增加连边使节点 A 的出度指向 D，C 的出度指向 B。同时，保证新添加的连边 A→D(B→C)的权重分布分别与原始网络 A→B (C→D)边的出权重分布相同。经过上述断边重连后，整个网络中所有节点的出度、入度均没有发生改变，但是改变了有向加权网络的拓扑结构和节点之间连边的权重相关性。根据网络规模和实际需要不断重复上述过程，就可以使网络的随机化程度逐渐增大，最后生成满足随机化要求的加权有向网络 1 阶零模型。

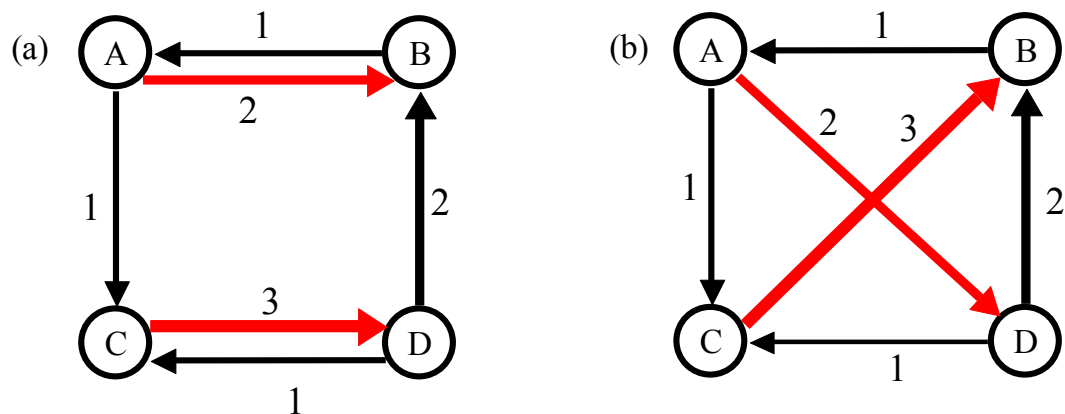
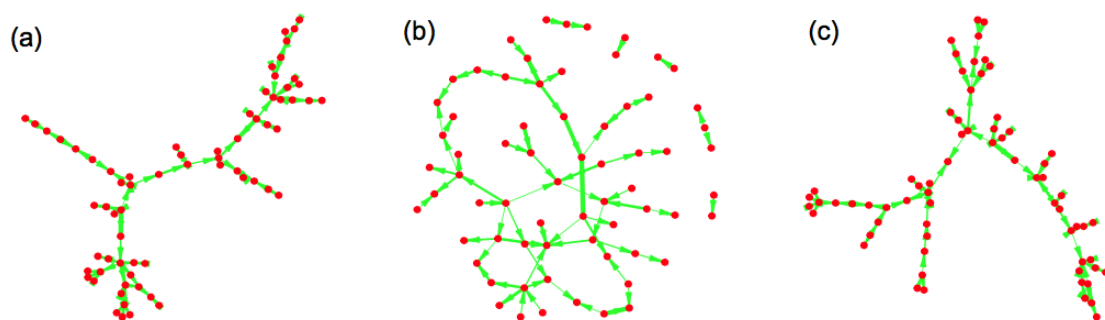


图 4-22 原始有向加权网络和使用置乱算法构造的 1 阶零模型

根据图 4-22 介绍的加权有向网络 1 阶零模型的构造原理，我们定义了如下函数实现该功能：

`G1 = wnm.random_1kd(H,nswap,max_tries)`

输入参数为原始网络 H(H 网络已强制转为有向网络)，交换次数 nswap 和最大尝试次数 max\_tries，输出为 1 阶零模型 G1。上述生成的网络零模型没有保证网络的连通性，如果原始网络是一个全联通网络，可以采用程序 `G1 = wnm.random_1kdc()` 约束生成的零模型网络为全联通网络。图 4-23 为短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下使用断边重连构造的 1 阶零模型网络。



(a) 短信交互社交网络 (b) 1 阶零模型 (c) 保证连通性情况下构造的 1 阶零模型

图 4-23 短信交互社交网络和在无连通性及有连通性情况下使用断边重连构造的 1 阶零模型

#### 4.4.2 局域权重重置乱零模型

当对有向加权网络进行随机化的时候，相对于权重重置算法，局域权重重置算法仅仅将同一个节点上连边的出权重(或入权重)相互交换，这样做的目的是为了破坏网络局部的拓扑相关性<sup>[11]</sup>。如图 4-24 所示，在保持节点出权不变的局域权重重置算法中，首先找出度大于 1 的节点，然后随机找出该节点上出权重不等的两条连边，接着将两条连边上的出权重互换在交换一次之后，节点 A 出权重为 4 和 1 的两条连边被互换了。

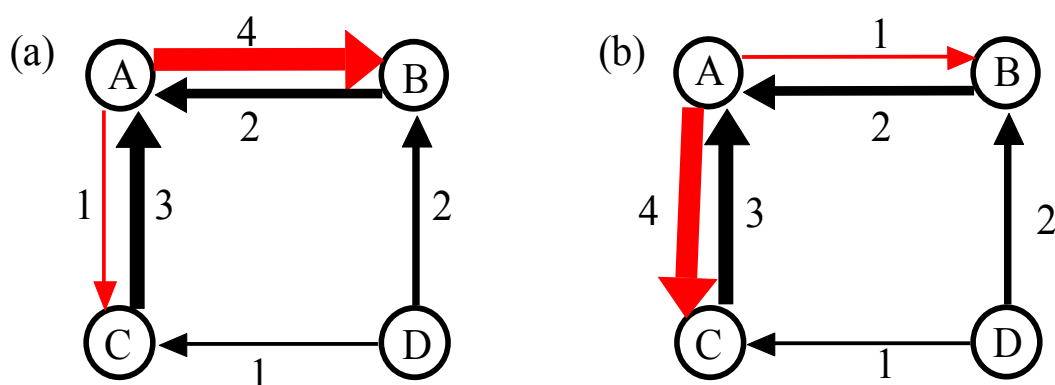


图 4-24 保持节点出权不变的局域权重重置乱算法示意图

根据图 4-24 介绍的局域权重重置乱零模型构造原理，我们定义了如下的程序完成其功能：

```
G1 = wnm.random_out_lw(H,nswap,max_tries)
```

该算法是在加权有向网络的基础上进行断边重连的，输入参数为原始网络 H，交换次数 nswap 和最大尝试次数 max\_tries，输出为保持节点出权不变的局域权重重置乱零模型 G1。上述生成过程中并没有改变网络的拓扑结构，仅将局域出权重进行了随机置乱，因此生成的零模型网络和原始网络的连通性相同的。图 4-25 为短信交互社交网络和保持节点出权不变的局域权重重置乱零模型。

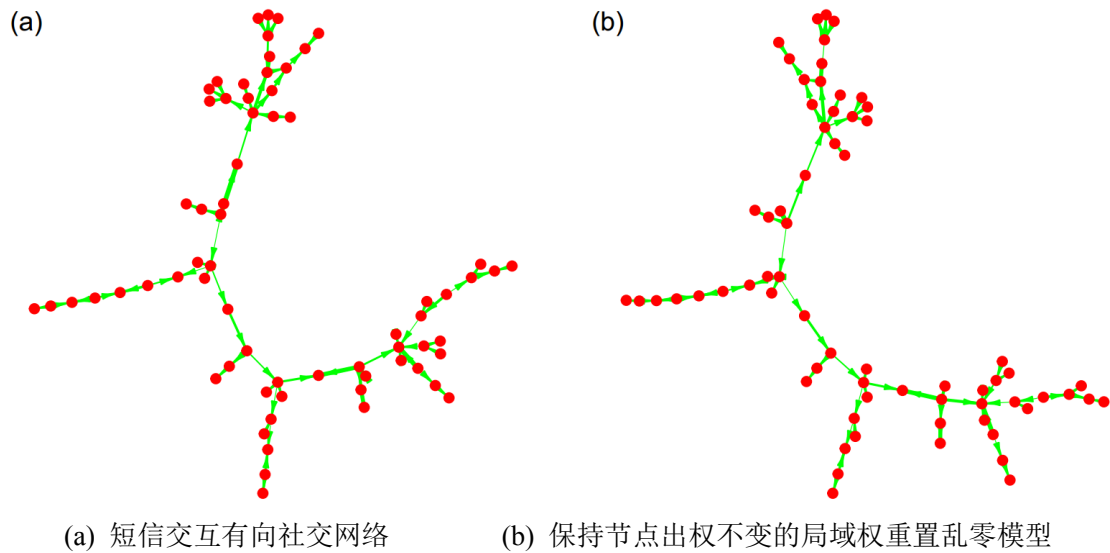


图 4-25 短信交互有向社交网络和保持节点出权不变的局域权重重置乱零模型

仿照保持节点出权不变的的算法,我们也可以构造保持节点入权重不变的局域权重重置乱算法,如图 4-26 所示。和出权重相互交换的方式是相同,首先随机的选择该节点上入权重不等的两条边,并将这两条边上的入权重互换。保持节点出权重或入权重不变的置乱算法都是针对加权有向网络的,当对无向加权网络进行置乱的时候,由于没有办法让所有节点的权均保持不变,所以这两种算法无法使用。但是在实际问题允许的情况下,可以先把无向网络转化为双向的有向网络,这样就可以保持节点的出权重或者入权重不变,然后再进行局部权重重置乱<sup>[22]</sup>。

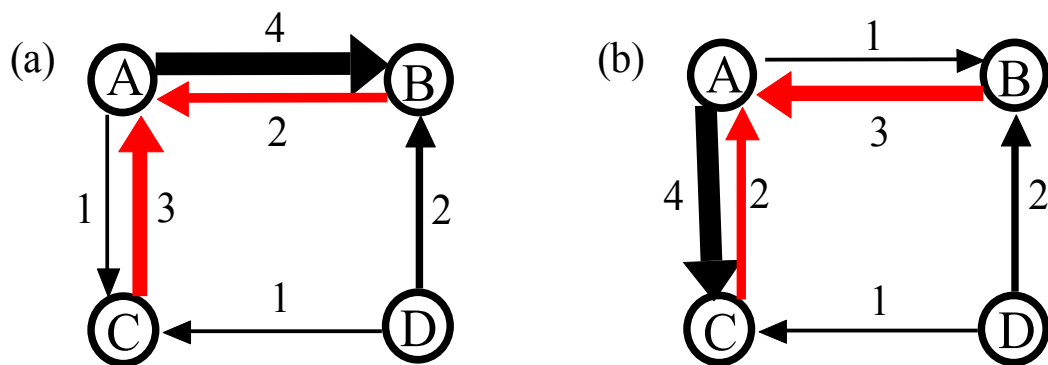


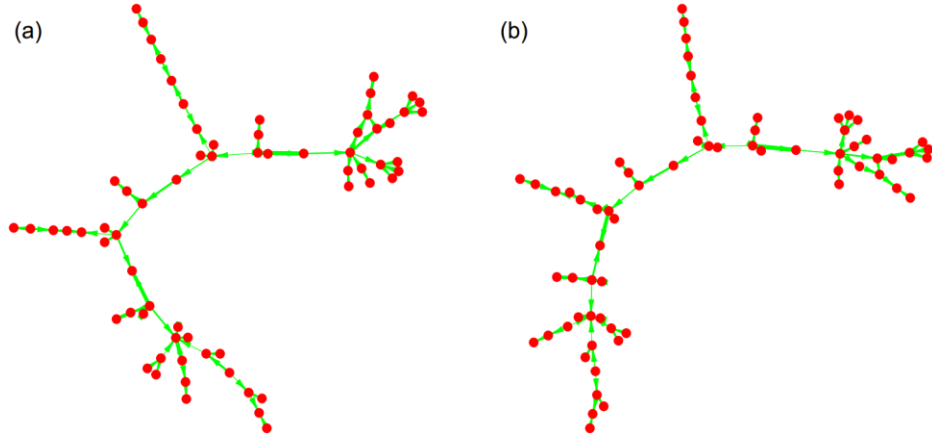
图 4-26 节点入权不变的局域权重重置乱算法示意图

根据图 4-26 介绍的保持节点入权不变的局域权重重置乱零模型构造原理,我们定义了如下程序实现其功能:

```
G1 = wnm.random_in_lw(H,nswap,max_tries)
```



该算法与保持节点出权不变的局域权重重置乱算法程序大致相同,不同的是需要任意选取同一节点的两条入权重不相等的连边进行权重互换。图 4-27 为短信交互有向社交网络和保持节点入权不变的局域权重重置乱零模型。



(a) 短信交互有向原始网络模型 (b) 保持节点入权不变的局域权重重置乱零模型

图 4-27 短信交互有向社交网络和保持节点入权不变的局域权重重置乱零模型

在加权有向网络的应用中 Opsahl 等人还根据节点的强度来定义富节点,检测了网络中富人俱乐部特性是否控制资源的流动<sup>[11]</sup>。Opsahl 将航空网络、科学家合作网络和在线社交网络分别进行了 1 阶随机断边重连和局域权重重置乱,在图 4-28 中给出了上述三个网络的  $p^w(r)$  值分布图。菱形代表在 1 阶随机断边重连算法的情况下产生的  $p^w(r)$  值,圆圈代表在根据局域权重重置乱算法的情况下产生的  $p^w(r)$  值。作者根据  $p^w(r)$  值(如公式(4.7))是否大于 1 来判断加权网络中是否具有富人俱乐部现象,并以此来判断富节点是否控制资源流动。我们发现航空网络(a)、科学家合作网络(b)和在线社交网络(c)这三种网络中权大的节点之间会倾向于将大部分资源彼此共享,以控制资源在网络中的流通<sup>[11]</sup>。尤其是在科学家合作网络中,通过与 4.3 节中以度大节点为富节点的情况进行对比,发现度大和权大节点的局域拓扑结构(科学家进行科研合作的模式)是有很大差异的。

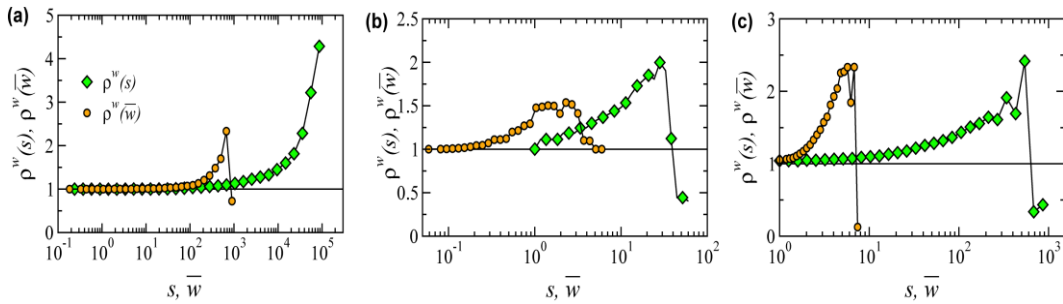


图 4-28 局部权重重置乱情况下的富人俱乐部对三个网络的影响(取自文献<sup>[11]</sup>)

## 4.5 本章小结与展望

综上所述，本章研究了加权无向网络及加权有向网络零模型的构造及应用。在对加权无向网络零模型的论述中，首先介绍了基于随机断边重连的 0 阶、1 阶零模型，以及等权重随机断边重连零模型，权重置乱零模型；然后介绍了基于有倾向性断边重连能生成具有富人俱乐部以及不同权匹配特性的零模型以及相关应用。在对加权有向网络零模型的描述中，分别介绍了 1 阶随机断边重连以及局域权重置乱零模型。

在本章中我们重点关注于加权网络零模型的算法构造和实现过程，相对于无权网络加权网络中零模型的实际应用是较少的。在今后的研究中，一个很重要的零模型应用是如何借助于零模型网络来判断加权网络中的拓扑结构、权重分布、强度相关等特征与各种网络统计量之间的联系。

加权网络零模型我们介绍比较详尽的是加权无向网络，在加权无向网络中应用较为广泛的是权重随机置乱零模型。对加权有向网络的零模型介绍较少有以下两方面原因：一是加权有向网络与加权无向的零模型构造方式差别不大，很容易将加权无向网络模型进行修改变成加权有向网络的零模型；二是目前加权有向网络的实际研究较少，而且计算加权有向网络的统计量比较困难，因此相关零模型的实际应用也比较少。

但也需要注意的是，在实际网络中，元素之间的关系仅用相互作用的强度来刻画是不全面的，元素之间相互作用的方向性也是一个非常重要的属性。比如，在生物学的基因作用蛋白质网络中，基因与蛋白质之间存在着相互作用，也正是这些控制作用构成了今天大自然中物种的丰富性，但很明显是基因作用于蛋白质，是基因通过蛋白质控制生物的生命特征，而造成了物种的多样性，而不是相反，所以在这种情况下，这里我们除了考虑作用强度之外，还必须考虑节点间作用的方向性问题。

## 参考文献

- [1] Newman M E J. Networks: An Introduction[M]. 郭世泽, 陈哲, 译. 北京: 电子工业出版社, 2010.
- [2] 朱陈平, 张永梅, 刘小廷, 等. 复杂网络稀疏性的统计物理研究综述[J]. 上海理工大学学报, 2011(05):425-432.
- [3] Newman M E J. Analysis of Weighted Networks[J]. Physical Review E, 2004,70(5):56131.
- [4] Granovetter M S. The Strength of Weak Ties[J]. American Journal of Sociology, 1973,78(6):1360-1380.
- [5] Onnela J P, Saramaki J, Hyvonen J. Structure and Tie Strengths in Mobile Communication Networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2007,104(18):7332-7336.
- [6] Almaas E, Kovacs B, Vicsek T, et al. Global Organization of Metabolic Fluxes in the Bacterium Escherichia Coli[J]. Nature, 2004,427(6977):839-843.
- [7] Nordlund C. Identifying Regular Blocks in Valued Networks: A Heuristic Applied to the St. Marks Carbon Flow Data, and International Trade in Cereal Products[J]. Social Networks, 2007,29(1):59-69.
- [8] 姚尊强, 尚可可, 许小可. 加权网络的常用统计量[J]. 上海理工大学学报, 2012(01):18-26.
- [9] Xie Y, Wang W, Wang B. Modeling the coevolution of topology and traffic on weighted technological networks[J]. Physical Review E, 2007,75(2):66149.
- [10] Wang W X, Wang B H, Hu B. General Dynamics of Topology and Traffic on Weighted Technological Networks[J]. Physical Review Letters, 2005,94(18):188702.
- [11] Opsahl T, Colizza V, Panzarasa P. Prominence and Control: The Weighted Rich-club Effect[J]. Physical Review Letters, 2008,101(16):168702.
- [12] Li M, Fan Y, Chen J, et al. Weighted Networks of Scientific Communication: The Measurement and Topological Role of Weight[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2005,350(2):643-656.
- [13] Ramasco J J, Goncalves B. Transport on Weighted Networks: When the Correlations are Independent of the Degree[J]. Physical Review E, 2007,76(6):66106.
- [14] Li M, Fan Y, Wang D, et al. Small-world Effect Induced by Weight Randomization on Regular Networks[J]. Physics Letters A, 2007,364(6):488-493.
- [15] Barrat A, Barthélemy M, Vespignani A. Dynamical Processes on Complex Networks[M]. Cambridge: Cambridge University press, 2008.
- [16] Pan R, Saramaki J. The strength of strong ties in scientific collaboration networks[J]. Europhysics Letters (epl), 2011,97(1):18007.
- [17] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [18] Onnela J, Saramaki J, Hyvonen J, et al. Structure and tie strengths in mobile communication networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2007,104(18):7332-7336.
- [19] Zhou S, Mondragon R J. The Rich-club Phenomenon in the Internet Topology[J]. IEEE Communications Letters, 2004,8(3):180-182.

- [20] Serrano M A. Rich-club vs Rich-multipolarization Phenomena in Weighted Networks [J]. Physical Review E, 2008,8(2):26101.
- [21] Leung C C, Chau H F. Weighted Assortative and Disassortative Networks Model[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2007,378(2):591-602.
- [22] Barrat A, Barthelemy M, Pastor-Satorras R. The Architecture of Complex Weighted Networks[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2004,101(11):3747-3752.