



高校核心课程学习指导丛书

量子力学题解

量子理论在现代物理中的应用

THE QUANTUM MECHANICS SOLVER
HOW TO APPLY QUANTUM THEORY TO MODERN PHYSICS



[法] 吉恩·路易斯·巴德旺
[法] 吉恩·达利巴尔 / 著
丁亦兵 沈彭年 / 译

中国科学技术大学出版社

安徽省版权局著作权合同登记号:第 12151582 号

The Quantum Mechanics Solver: How to Apply Quantum Theory to Modern Physics, first edition by Jean-Louis Basdevant, Jean Dalibard.

first published by Springer 2006.

All rights reserved.

This simplified Chinese edition for the People's Republic of China is published by arrangement with Springer, Berlin Heidelberg, Germany.

© Springer – Verlag Berlin Heidelberg & University of Science and Technology of China Press 2017

This book is in copyright. No reproduction of any part may take place without the written permission of Springer and University of Science and Technology of China Press.

This edition is for sale in the People's Republic of China (excluding Hong Kong SAR, Macau SAR and Taiwan Province) only.

此版本仅限在中华人民共和国境内(不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区)销售。

图书在版编目(CIP)数据

量子力学题解:量子理论在现代物理中的应用/(法)吉恩·路易斯·巴德旺,
(法)吉恩·达利巴尔著;丁亦兵,沈彭年译. —合肥:中国科学技术大学出版社,
2018. 1

书名原文: The Quantum Mechanics Solver: How to Apply Quantum Theory to
Modern Physics

ISBN 978-7-312-03971-3

I. 量… II. ①吉… ②吉… ③丁… ④沈… III. 量子力学—高等学校—题解
IV. O413. 1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 116160 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026
<http://press.ustc.edu.cn>
<https://zgkxjsdxcs.tmall.com>
印刷 安徽省瑞隆印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm × 1000 mm 1/16
印张 17.75
字数 358 千
版次 2018 年 1 月第 1 版
印次 2018 年 1 月第 1 次印刷
定价 49.00 元

序

量子力学是新问题和有趣的观测现象的一个无穷无尽的源泉。在目前量子力学的解释及其哲学含义的流行争论中，以及在基础物理和应用物理及数学问题中，我们都可以找到许多例子。

量子力学的讲授大多依赖于理论课程，它们通过一些简单的、时常带有数学特征的练习来举例说明。把量子物理简化成这种类型的问题有点令人沮丧，因为只有极少的实验的量，如果有的话，可以用来与这些结果相比较。不管怎样，长期以来，从 20 世纪 50 年代到 70 年代，这些基本练习的唯一选择似乎只限制在起源于原子物理和核物理的问题，它们被转换为精确的可解问题并且与已知的一些较高阶的超越函数联系起来。

在过去的 10 年或 20 年中，情况发生了根本的变化。高技术的发展是一个很好的例子。对初学者来说，一维方势阱曾经是一个相当好的教学练习。半导体技术中量子点和量子阱的出现已经彻底地改变了这种情况。光电子学及相关联的红外半导体和激光技术的发展已经显著地提升了方势阱模型的科学地位。结果，越来越多的重点放在了现象的物理方面而不是在分析或计算的考虑上。

近年来，量子理论一开始就提出的许多基本问题得到了实验的回应。一个很好的例子是 20 世纪 80 年代的中子干涉实验，它对 50 年来关联着波函数相位可测性的老问题给出了实验的回答。也许最基本的例子是贝尔不等式（Bell's inequality）破坏的实验证明和纠缠态的性质，它们已经在自 20 世纪 70 年代后期起的一些决定性的实验中被确立了。

最近，为定量验证退相干效应和“薛定谔猫”状态所进行的实验已经引起了对量子力学基础和解释的极大兴趣。

本书包含了一系列关系到现代量子力学的实验或理论的问题。所有这些问题都基于实际的物理实例，即使有时把所考虑的模型的数学结构有意地简化，也是为了更迅速地掌握物理。

在过去的十几年，这些问题都曾经出给了我们在巴黎高等理工学院和巴黎高等师范学校的学生。巴黎高等理工学院的特色来自两个多世纪一直被保持的一个传统，由此说明了为什么每年都有必要设计一些原创性的问题。考试有双重的目的。一方面，它是一种测试学生知识和能力的手段；另一方面，不管怎样，它也被视为工程、行政管理和军事职业方面公职工作入职考试的一部分。因此，激烈的竞争性考试的传统特征和严格的精才管理制度禁止我们利用可在现有著作中找到的问题。所以，我们必须在目前的研究前沿中寻找问题。结果证明，我们与许多同事合作完成的这项工作是我们之间进行讨论的一个令人吃惊的源泉。通过把各自感兴趣的领域的知识汇集在一起，我们实际上都学到了很多。

与 2000 年施普林格出版社出版的这本书的第 1 版相比，我们已经做了若干修改。首先，本书包含了一些新的主题，如有关测量中微子振荡、量子点、量子温度计等方面的进展。其次，在开始的时候一个关于量子力学基础和我们使用的公式的小结显然是很有用的。最后，我们把问题分到了三个主要的主题组之下。第一个主题（A 部分）处理基本粒子、原子核和原子，第二个主题（B 部分）处理量子纠缠和量子测量，而第三个主题（C 部分）处理复杂系统。

我们受惠于很多同事，他们要么提供了起推动作用的主意，要么写出了呈现在这里的一些问题的初稿。我们想把敬意献给吉尔伯特·格林柏格（Gilbert Grynberg），他撰写了第 1 版的“交叉场中的氢原子”、“隐变量和贝尔不等式”及“中子束的光谱测量”。我们特别要感谢弗朗索瓦·贾戈尔（François Jacquet）、安德烈·鲁热（André Rougé）和吉姆·里什（Jim Rich）的关于“中微子振荡”的启发性讨论。最后，我们要感谢菲利普·格兰杰尔（Philippe Grangier），他实际上构思了很多问题，其中有“薛定谔猫”、“理想的量子测量”和

“量子温度计”，还有杰拉尔德·巴斯塔德（Gérald Bastard）的“量子点”，让-诺埃尔·查扎尔维埃勒（Jean-Noël Chazalviel）的“电子自旋共振中的超精细结构”，蒂埃里·优利克（Thierry Jolicoeur）的“磁激子”，伯纳德·埃凯（Bernard Eker）的“用正 μ 子探测物质”，文森特·吉利特（Vincent Gillet）的“物质中离子的能量损失”，伊凡·卡斯坦（Yvan Castin）、让-米歇尔·库尔蒂（Jean-Michel Courty）、多米尼克·德朗德（Dominique Delande）的“原子在表面上的量子反射”和“周期势中的量子运动”。

吉恩·路易斯·巴德旺

吉恩·达利巴尔

2005 年 4 月于帕莱索（Palaiseau）

目 录

序	(i)
概要	(1)
0.1 原理	(1)
0.2 一般结果	(4)
0.3 类点粒子的特殊情况; 波动力学	(5)
0.4 角动量和自旋	(6)
0.5 精确可解的问题	(8)
0.6 近似方法	(9)
0.7 全同粒子	(11)
0.8 系统的时间演化	(12)
0.9 碰撞过程	(13)

第 1 部分 基本粒子、原子核和原子

第 1 章 中微子振荡	(18)
1.1 振荡机制: 反应堆中微子	(19)
1.2 三类振荡: 大气中微子	(21)
1.3 解	(24)
1.4 评注	(27)
第 2 章 原子钟	(29)
2.1 基态的超精细分裂	(29)
2.2 原子喷泉	(30)
2.3 GPS 系统	(32)
2.4 基本常数的漂移	(33)
2.5 解	(33)

2.6 参考文献.....	(37)
第 3 章 中子干涉测量方法	(38)
3.1 中子干涉.....	(39)
3.2 重力效应.....	(40)
3.3 将自旋 $1/2$ 的粒子旋转 360°	(41)
3.4 解	(43)
3.5 参考文献.....	(46)
第 4 章 中子束流的谱学测量	(47)
4.1 拉姆齐干涉条纹.....	(48)
4.2 解	(49)
4.3 参考文献.....	(53)
第 5 章 斯特恩 — 盖拉赫实验的分析	(54)
5.1 中子束流的制备.....	(54)
5.2 中子的自旋态	(56)
5.3 斯特恩 — 盖拉赫实验	(56)
5.4 解	(59)
第 6 章 测量电子反常磁矩	(63)
6.1 电子的自旋和动量在磁场中的进动.....	(63)
6.2 解	(64)
第 7 章 氚原子的衰变	(66)
7.1 氚核衰变中的能量平衡	(67)
7.2 解	(68)
7.3 评注	(69)
第 8 章 电子偶素的谱	(70)
8.1 电子偶素的轨道态	(70)
8.2 超精细分裂	(71)
8.3 基态中的塞曼效应	(72)
8.4 电子偶素的衰变.....	(72)
8.5 解	(74)
8.6 参考文献.....	(78)
第 9 章 交叉场中的氢原子	(79)
9.1 交叉的电场和磁场中的氢原子	(80)
9.2 泡利的结果	(80)
9.3 解	(81)

第 10 章 物质中离子能量的损失	(84)
10.1 被一个原子吸收的能量	(85)
10.2 在物质中的能量损失	(86)
10.3 解	(87)
10.4 评注	(91)

第 2 部分 量子纠缠和测量

第 11 章 EPR 问题与贝尔不等式	(94)
11.1 电子自旋	(94)
11.2 两个自旋之间的关联	(95)
11.3 单态中的关联	(95)
11.4 一个简单的隐变量模型	(96)
11.5 贝尔定理和实验结果	(97)
11.6 解	(98)
11.7 参考文献	(103)
第 12 章 薛定谔猫	(104)
12.1 一个谐振子的准经典态	(104)
12.2 构造一个薛定谔猫态	(106)
12.3 量子叠加与统计混合对比	(106)
12.4 量子叠加的脆弱性	(108)
12.5 解	(109)
12.6 评注	(115)
第 13 章 量子密码学	(116)
13.1 预备知识	(116)
13.2 关联的自旋对	(117)
13.3 量子密码学程序	(119)
13.4 解	(121)
第 14 章 场量子化的直接观测	(125)
14.1 电磁场一种模式的量子化	(125)
14.2 场与一个原子的耦合	(127)
14.3 原子与一个“空腔”的相互作用	(128)
14.4 原子与一个准经典态的相互作用	(129)
14.5 大量的光子：阻尼和复苏	(130)
14.6 解	(131)

14.7 评注	(138)
第 15 章 理想量子测量	(139)
15.1 预备知识: 冯·诺依曼探测器	(139)
15.2 谐振子的相位态	(140)
15.3 系统与探测器之间的相互作用	(141)
15.4 一个“理想”的测量	(142)
15.5 解	(142)
15.6 评注	(145)
第 16 章 量子擦除器	(146)
16.1 磁共振	(146)
16.2 拉姆齐条纹	(147)
16.3 中子自旋态的探测	(149)
16.4 量子擦除	(150)
16.5 解	(151)
16.6 评注	(157)
第 17 章 量子温度计	(158)
17.1 经典力学中的彭宁离子阱	(158)
17.2 量子力学中的彭宁离子阱	(159)
17.3 回旋与轴向运动的耦合	(161)
17.4 量子温度计	(162)
17.5 解	(164)

第 3 部分 复杂系统

第 18 章 三体问题的精确结果	(174)
18.1 两体问题	(174)
18.2 变分法	(175)
18.3 三体 and 两体部分的关系	(175)
18.4 三体谐振子	(176)
18.5 在夸克模型中从介子到重子	(177)
18.6 解	(178)
18.7 参考文献	(182)
第 19 章 玻色 - 爱因斯坦凝聚的性质	(183)
19.1 谐振势阱中的粒子	(183)
19.2 两个禁闭粒子间的相互作用	(184)

19.3	玻色 — 爱因斯坦凝聚的能量	(185)
19.4	具有相互排斥作用的凝聚	(186)
19.5	具有相互吸引作用的凝聚	(187)
19.6	解	(187)
19.7	评注	(192)
第 20 章	磁激子	(193)
20.1	CsFeBr ₃ 分子	(193)
20.2	在一个分子链中的自旋 — 自旋相互作用	(194)
20.3	链的能级	(195)
20.4	链的振动: 激子	(196)
20.5	解	(198)
第 21 章	量子箱	(204)
21.1	一维谐振子的结果	(205)
21.2	量子箱	(206)
21.3	磁场中的量子箱	(207)
21.4	实验验证	(208)
21.5	量子箱的各向异性	(209)
21.6	解	(210)
21.7	评注	(218)
第 22 章	彩色分子离子	(219)
22.1	碳氢化合物离子	(219)
22.2	含氮的离子	(220)
22.3	解	(221)
22.4	评注	(223)
第 23 章	电子自旋共振中的超精细结构	(224)
23.1	与一个原子核的超精细相互作用	(225)
23.2	几个原子核情况下的超精细结构	(226)
23.3	实验结果	(227)
23.4	解	(228)
第 24 章	用正 μ 子探测物质	(233)
24.1	真空中的 μ 子素	(234)
24.2	硅中的 μ 子素	(235)
24.3	解	(237)

第 25 章 原子自表面的量子反射	(243)
25.1 氢原子 – 液氦相互作用	(243)
25.2 液 He 表面上的激发	(245)
25.3 在 H 与液 He 之间的量子相互作用	(246)
25.4 黏附概率	(246)
25.5 解	(247)
25.6 评注	(253)
第 26 章 激光致冷和陷阱	(254)
26.1 静止原子的光学布洛赫方程	(254)
26.2 辐射压力	(255)
26.3 多普勒制冷	(256)
26.4 偶极子力	(257)
26.5 解	(257)
26.6 评注	(263)
第 27 章 布洛赫振荡	(264)
27.1 在一个量子系统上的么正变换	(264)
27.2 在一个周期势中的能带结构	(265)
27.3 布洛赫振荡现象	(266)
27.4 解	(268)
27.5 评注	(272)

概 要

下面我们对量子力学的基本定义、标记法和结果给出一些提示.

0.1 原 理

希尔伯特 (Hilbert) 空间

量子物理问题处理的第一步是准确恰当地描述该系统的希尔伯特空间. 希尔伯特空间是一个具有厄米的标量积的复矢量空间. 该空间的矢量称为右矢 (ket) 并用 $|\psi\rangle$ 标记. 右矢 $|\psi_1\rangle$ 和右矢 $|\psi_2\rangle$ 的标量积标记为 $\langle\psi_2|\psi_1\rangle$. 它对于 $|\psi_1\rangle$ 是线性的, 而对于 $|\psi_2\rangle$ 是反线性的, 故有

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = (\langle\psi_2|\psi_1\rangle)^*.$$

系统态的定义; 纯态

一个物理系统的态在任意时刻 t 由归一到 1 的希尔伯特空间矢量完全确定, 记为 $|\psi(t)\rangle$. 如果 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 是一个给定物理系统的两个可能的态, 由叠加原理, 任意线性组合

$$|\psi\rangle \propto c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$$

也是系统的一个可能的态, 在这里 c_1 和 c_2 是复数. 这些系数的选取必须使 $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

测量

人们把一个作用在希尔伯特空间的自共轭（或厄米）算符 $\hat{A}$ 关联到一个给定的物理量 A . 在量 A 的测量中，唯一可能的结果是 $\hat{A}$ 的本征值 a_α .

考虑一个系统处于 $|\psi\rangle$ 态. 在物理量 A 的测量中，获得结果为 a_α 的概率 $\mathcal{P}(a_\alpha)$ 为

$$\mathcal{P}(a_\alpha) = \|\hat{P}_\alpha|\psi\rangle\|^2,$$

其中 $\hat{P}_\alpha$ 是投影到与本征值 a_α 关联的本征子空间 ε_α 的投影算符.

测量 $\hat{A}$ 给出结果 a_α 之后，系统的态就正比于 $\hat{P}_\alpha|\psi\rangle$ （波包投影或约化）.

一次单一的测量只能给出测量后系统的态的信息. 得到的有关测量之前的态的信息非常“匮乏”，即如果测量给出 a_α 的结果，人们仅能推断态 $|\psi\rangle$ 不在与 ε_α 正交的子空间.

为了获得测量之前态的精确信息，人们需要使用 N ($N \gg 1$) 个独立的系统，它们都被制备成相同的 $|\psi\rangle$ 态. 如果我们对 $\hat{A}_1$ （本征值 $\{a_{1,\alpha}\}$ ）进行了 N_1 次测量，对 $\hat{A}_2$ （本征值 $\{a_{2,\alpha}\}$ ）进行了 N_2 次测量，等等（ $\sum_{i=1}^p N_i = N$ ），我们就可以确定 $a_{i,\alpha}$ 的概率分布，并进而确定 $\|\hat{P}_{i,\alpha}|\psi\rangle\|^2$. 如果精心挑选这 p 个算符 $\hat{A}_i$ ，就可毫无悬念地确定初态 $|\psi\rangle$.

演化

在系统未被测量的情况下，它的态矢量的演化可由薛定谔方程

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle$$

给出，这里厄米算符 $\hat{H}(t)$ 是系统在 t 时刻的哈密顿量，或能量可观测量.

假定我们考虑一个孤立的系统，它的哈密顿量与时间无关，则该哈密顿量的能量本征态 $|\phi_n\rangle$ 是时间无关薛定谔方程

$$\hat{H}|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$$

的解. 它们构成一个希尔伯特空间的正交基组. 这个基组是非常有用的. 如果在这个基组上展开初态 $|\psi(0)\rangle$ ，我们马上就能写出系统的态在任意时间的表示：

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n \alpha_n |\phi_n\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = \sum_n \alpha_n e^{-iE_n t/\hbar} |\phi_n\rangle.$$

其中系数 $\alpha_n = \langle \phi_n | \psi(0) \rangle$ ，即

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} |\phi_n\rangle \langle \phi_n | \psi(0) \rangle.$$

对易可观测量的完备集 (CSCO)

如果一组算符 $\{\hat{A}, \hat{B}, \dots, \hat{X}\}$ 中的所有算符都相互对易，且它们共同的本征基 $\{|\alpha, \beta, \dots, \xi\rangle\}$ 是唯一的（最多相差一个相因子），则这组算符是一组 CSCO.

在那种情况下，测量了物理量 $\{A, B, \dots, X\}$ 之后，系统的态就毫无悬念地确定了. 如果由 A 给出值 α ，由 B 给出 $\beta, \dots$ ，由 X 给出 ξ ，则该系统的态就是 $|\alpha, \beta, \dots, \xi\rangle$.

纠缠态

考虑一个由两个子系统 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 构成的量子系统 $\mathcal{S}$. 描述 $\mathcal{S}$ 的希尔伯特空间是分别关联着 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 的希尔伯特空间 ε_1 和 ε_2 的张量积. 如果把 $\mathcal{S}_1$ 的基记为 $\{|\alpha_m\rangle\}$ ，把 $\mathcal{S}_2$ 的基记为 $\{|\beta_n\rangle\}$ ，则整个系统的一个可能的基是 $\{|\alpha_m\rangle \otimes |\beta_n\rangle\}$.

整个系统的任意一个态矢可写为

$$|\Psi\rangle = \sum_{m,n} C_{m,n} |\alpha_m\rangle \otimes |\beta_n\rangle.$$

如果这个矢量能写成 $|\Psi\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ ，这里 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 分别为 ε_1 和 ε_2 中的矢量，人们就把它称为一个因子化的态.

一般来说，一个任意的态 $|\Psi\rangle$ 是不能因子化的：在两个子系统之间存在量子关联，则态 $|\Psi\rangle$ 被称为纠缠态 (entangled state).

统计混合和密度算符

如果我们只有系统态不完全的信息，例如测量是不完备的，人们就不可能精确地知道它的态矢量. 这样的态可用一个密度算符 $\hat{\rho}$ 来描写，该算符有如下的一些性质：

- 密度算符是厄米的，且它的迹为 1.

- 密度算符所有的本征值 Π_n 都是非负的. 因此密度算符能被写成

$$\hat{\rho} = \sum_n \Pi_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|,$$

其中 $|\phi_n\rangle$ 是 $\hat{\rho}$ 的本征态, 而 Π_n 可被解释为概率分布. 在纯态的情况下, 除了等于 1 的一个本征值外, 所有的本征值均为 0.

- 在物理量 A 的测量中, 找到结果为 a_α 的概率为

$$\mathcal{P}(a_\alpha) = \text{tr}(\hat{P}_\alpha \hat{\rho}) = \sum_n \Pi_n \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_n \rangle.$$

测量之后系统的态为 $\hat{\rho}' \propto \hat{P}_\alpha \hat{\rho} \hat{P}_\alpha$.

- 只要系统未被测量, 密度算符的演化就可写成

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)].$$

0.2 一般结果

不确定性关系 (uncertainty relations)

考虑 $2N$ 个全同且独立的并且全部被制备成相同 $|\psi\rangle$ 态的物理系统 (假定 $N \gg 1$). 我们在其中的 N 个系统中测量物理量 A , 在另外的 N 个系统中测量物理量 B . 这两组测量的均方根 (rms) 偏差 Δa 和 Δb 满足不等式

$$\Delta a \Delta b \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle|.$$

埃伦费斯特 (Ehrenfest) 定理

考虑一个在哈密顿量 $\hat{H}(t)$ 的作用下演化的系统和一个可观测量 $\hat{A}(t)$. 这个可观测量的期待值将按照下述方程演化:

$$\frac{d}{dt} \langle a \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [\hat{A}, \hat{H}] | \psi \rangle + \langle \psi | \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} | \psi \rangle.$$

特别地, 如果 $\hat{A}$ 是时间无关的, 且与 $\hat{H}$ 对易, 则期待值 $\langle a \rangle$ 是一个运动常数.

0.3 类点粒子的特殊情况；波动力学

波函数

对一个能够忽略其可能内部自由度的类点粒子，希尔伯特空间是平方可积函数的空间（数学上写成 $L^2(R^3)$ ）。

态矢量 $|\psi\rangle$ 可由一个波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 来描述。量 $|\psi(\mathbf{r})|^2$ 是发现粒子处于尺度空间中 $\mathbf{r}$ 点的概率密度。它的傅里叶变换

$$\varphi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \psi(\mathbf{r}) d^3r$$

是发现粒子具有动量 $\mathbf{p}$ 的概率振幅。

算符

在与通常物理量关联的算符中，人们发现：

- 位置算符 $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ ，它表示用 $\mathbf{r}$ 乘以波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 。
- 动量算符 $\hat{\mathbf{p}}$ 作用在波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 上就是进行 $-i\hbar\nabla$ 的操作。
- 对一个置于势阱 $V(\mathbf{r})$ 中的粒子，哈密顿量或能量算符为

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + V(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \hat{H}\psi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}),$$

其中 M 为粒子的质量。

波函数的连续性

如果势 V 是连续的，则哈密顿量的本征函数 $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ 是连续的，且它们的导数也连续。如果 $V(\mathbf{r})$ 是一个阶梯函数，这个结论还是对的：在 $V(\mathbf{r})$ 不连续处， ψ 和 ψ' 还是连续的。

在无限高阶跃势的情况下（例如在 $x < 0$ 时 $V(x) = +\infty$ ，而在 $x \geq 0$ 时

$V(x) = 0$), $\psi(x)$ 连续且在 V 的间断处为 0 ($\psi(0) = 0$), 而它的一阶导数 $\psi'(x)$ 不连续.

在一维的情况下, 考虑狄拉克分布的位势, $V(x) = g\delta(x)$ 是有意思的. 此时波函数是连续的, 而其导数的不连续性是通过把薛定谔方程在 δ 函数中心的周围积分得到的 (在我们的例子中 $\psi'(0_+) - \psi'(0_-) = (2Mg/\hbar^2)\psi(0)$).

位置 – 动量的不确定性关系

利用上述的一般结果, 人们得到

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \Rightarrow \Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2.$$

对 y 、 z 分量也有类似的关系.

0.4 角动量和自旋

角动量可观测量

角动量可观测量 $\hat{\mathbf{J}}$ 是三个算符 $\{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z\}$ 的一个集合, 它们满足对易关系:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar \hat{J}_z, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar \hat{J}_x, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar \hat{J}_y.$$

源于 $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ 的轨道角动量是一个角动量可观测量.

可观测量 $\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ 与 $\hat{J}_i$ 的所有分量都对易. 因此, 人们能找到一个 $\hat{\mathbf{J}}^2$ 与三个分量之一的 $\hat{J}_i$ 的共同本征基. 通常人们选取 $i = z$.

角动量的本征值

$\hat{\mathbf{J}}^2$ 的本征值的形式为 $\hbar^2 j(j+1)$, 其中 j 为整数或半整数. 在一个对应于给定 j 值的 $\hat{\mathbf{J}}^2$ 的本征子空间中, $\hat{J}_z$ 的本征值具有下列形式:

$$\hbar m, \quad \text{其中 } m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\} \quad (2j+1 \text{ 个值}).$$

相应的本征态记为 $|\alpha, j, m\rangle$, 其中 α 表示完全定义该态所需要的其他量子数. 态 $|\alpha, j, m\rangle$ 通过算符 $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ 与 $|\alpha, j, m \pm 1\rangle$ 态相关联:

$$\hat{J}_{\pm}|\alpha, j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|\alpha, j, m \pm 1\rangle.$$

一个粒子的轨道角动量

就轨道角动量来说, j 和 m 只能取整数值. 这时人们通常习惯把它写成 $j = l$. 在球坐标系中, $\hat{L}^2$ 和 $\hat{L}_z$ 的共同本征态 $\psi(\mathbf{r})$ 可写成 $R(r)Y_{l,m}(\theta, \varphi)$, 其中径向波函数 $R(r)$ 是任意函数, 而函数 $Y_{l,m}$ 是球谐函数 (spherical harmonics), 即在半径为 1 的球上的谐函数 (harmonic functions). 最低阶的几个球谐函数为

$$\begin{aligned} Y_{0,0}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, & Y_{1,0}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ Y_{1,1}(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, & Y_{1,-1}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

自旋

除了角动量, 一个粒子还具有一个被称为它的自旋的内禀角动量. 自旋通常记为 $j = s$, 它既可以取整数值也可以取半整数值.

电子、质子和中子都是自旋 $s = 1/2$ 的粒子, 对它们来说, 内禀角动量的投影可取两个 $m\hbar$ 值中的任何一个: $m = \pm 1/2$. 在 $|s = 1/2, m = \pm 1/2\rangle$ 基中, 算符 $\hat{S}_x$ 、 $\hat{S}_y$ 和 $\hat{S}_z$ 具有矩阵表示:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

角动量加法

考虑一个由角动量分别为 $\hat{\mathbf{J}}_1$ 和 $\hat{\mathbf{J}}_2$ 的两个子系统 S_1 和 S_2 构成的系统 S . 可观测量 $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}_1 + \hat{\mathbf{J}}_2$ 是一个角动量可观测量. 在对应着给定 j_1 和 j_2 值的子空间 $((2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1))$ 维空间中, 系统总角动量 $\hat{\mathbf{J}}$ 的量子数 j 的可能值为

$$j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2.$$

对每一个 j ，有 $2j+1$ 个 m 值： $m = -j, -j+1, \dots, j$ 。例如，把两个 $1/2$ 自旋相加，人们能够得到一个角动量为 0 的态（单态： $j = m = 0$ ）和三个角动量为 1 的态（三重态： $j = 1, m = 0, \pm 1$ ）。

因子化的基 $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ 和总角动量基 $|j_1, j_2; j, m\rangle$ 之间的关系由克莱布施 - 高登 (Clebsch-Gordan) 系数给出：

$$|j_1, j_2; j, m\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{j_1, m_1; j_2, m_2}^{j, m} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle.$$

0.5 精确可解的问题

谐振子

为简单起见，我们考虑一维问题。谐振子势可写成 $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ 。自然长度和动量标度分别为

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}.$$

引入约化算符（reduced operators） $\hat{X} = \hat{x}/x_0$ 和 $\hat{P} = \hat{p}/p_0$ ，哈密顿量可写为

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2), \quad \text{其中 } [\hat{X}, \hat{P}] = i.$$

用

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}), \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

定义产生算符 $\hat{a}^\dagger$ 和湮灭算符 $\hat{a}$ ，则

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2).$$

$\hat{H}$ 的本征值为 $(n+1/2)\hbar\omega$ ，其中 n 为非负整数。这些本征值都是非简并的，相应的本征矢记为 $|n\rangle$ 。于是有

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

和

$$\hat{a} |n\rangle = \begin{cases} \sqrt{n} |n-1\rangle, & n > 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$$

相应的波函数为厄米函数 (Hermite function). 基态 $|n=0\rangle$ 由下式给出:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{x_0}} \exp(-x^2/(2x_0^2)).$$

更高维谐振子的问题可从这些结果直接推出.

库仑势 (束缚态)

考虑一个电子在质子的静电场中运动. 我们用 μ 来标记约化质量 ($\mu = m_e m_p / (m_e + m_p) \approx m_e$), 并且令 $e^2 = q^2 / (4\pi\epsilon_0)$. 由于库仑势是转动不变的, 我们可以找到一套哈密顿量 $\hat{H}$ 及 $\hat{L}^2$ 和 $\hat{L}_z$ 共有态的基. 用

$$\psi_{n,l,m}(\mathbf{r}) = R_{n,l}(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

描述的束缚态具有 3 个量子数 n, l, m , 其中 $Y_{l,m}$ 是球谐函数. 其能级具有如下形式:

$$E_n = -\frac{E_I}{n^2}, \quad \text{其中 } E_I = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \approx 13.6 \text{ eV}.$$

式中主量子数 n 是一个正整数, l 可取 $0 \sim n-1$ 的所有整数值. 对一个给定 m 和 l 的能级, 其总简并度是 n^2 (我们没有计入自旋). 径向波函数 $R_{n,l}$ 的形式为

$$R_{n,l}(r) = r^l P_{n,l}(r) \exp(-r/(na_1)), \quad \text{其中 } a_1 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \approx 0.53 \text{ \AA}.$$

$P_{n,l}(r)$ 是 $n-l-1$ 次 Laguerre 多项式. 长度 a_1 是玻尔 (Bohr) 半径. 基态波函数为 $\psi_{1,0,0}(\mathbf{r}) = e^{-r/a_1} / \sqrt{\pi a_1^3}$.

0.6 近似方法

时间无关的微扰

考虑一个时间无关的哈密顿量 $\hat{H}$, 它可以写成 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1$. 我们假定 $\hat{H}_0$ 的本征态是已知的:

$$\hat{H}_0 |n, r\rangle = E_n |n, r\rangle, \quad r = 1, 2, \dots, p_n,$$

其中 p_n 是 E_n 的简并度. 我们还假定 $\lambda \hat{H}_1$ 项足够小, 以至它对 $\hat{H}_0$ 的谱只造成很小的扰动.

非简并的情况. 在这种情况下, $p_n = 1$, 并且在 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 与 E_n 对应的 $\hat{H}$ 的本征值由

$$\tilde{E}_n = E_n + \lambda \langle n | \hat{H}_1 | n \rangle + \lambda^2 \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k | \hat{H}_1 | n \rangle|^2}{E_n - E_k} + O(\lambda^3)$$

给出. 相应的本征态为

$$|\psi_n\rangle = |n\rangle + \lambda \sum_{k \neq n} \frac{\langle k | \hat{H}_1 | n \rangle}{E_n - E_k} |k\rangle + O(\lambda^2).$$

简并的情况. 为了求得 λ 的第一阶的 $\hat{H}$ 的本征值以及相应的本征态, 人们必须把 $\lambda \hat{H}_1$ 的约束对角化到与本征值 E_n 关联的 $\hat{H}_0$ 的子空间中, 也就是找到久期方程 (“secular” equation) 的 p_n 一个解:

$$\begin{vmatrix} \langle n, 1 | \lambda \hat{H}_1 | n, 1 \rangle - \Delta E & \cdots & \langle n, 1 | \lambda \hat{H}_1 | n, p_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle n, p_n | \lambda \hat{H}_1 | n, 1 \rangle & \cdots & \langle n, p_n | \lambda \hat{H}_1 | n, p_n \rangle - \Delta E \end{vmatrix} = 0.$$

到 λ 的第一阶的能量是 $\tilde{E}_{n,r} = E_n + \Delta E_r, r = 1, \dots, p_n$. 一般来说, 简并被微扰 (至少部分地) 解除. (译者注: 原文此处文字有明显笔误, 已更正.)

对基态的变分法

考虑一个归一到 1 的任意态. 在该态上, 能量的期待值大于或等于基态能量 $E_0: \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \geq E_0$. 为了找到 E_0 的上限, 人们使用一组依赖于一个参数集合的试探波函数, 并寻找 $\langle E \rangle$ 对这些函数的极小值. 这个极小值总是大于 E_0 .

0.7 全同粒子

所有自然界中的粒子都隶属于下述类型中的一种：

- 玻色子，具有整数自旋. N 个全同玻色子的态矢量在交换这些粒子中的任意两个粒子时都是全对称的.
- 费米子，具有半整数自旋. N 个全同费米子的态矢量在交换这些粒子中的任意两个粒子时都是全反对称的.

考虑单粒子希尔伯特空间的一组基 $\{|n_i\rangle, i = 1, 2, \dots\}$. 在一个具有 N 个全同粒子的系统中，我们随意地从 1 到 N 对这些粒子编号.

(a) 如果粒子是玻色子，具有 N_1 个粒子处于 $|n_1\rangle$ 态、 N_2 个粒子处于 $|n_2\rangle$ 态 …… 的系统，态矢量为

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \frac{1}{\sqrt{N_1! N_2! \dots}} \sum_P |1 : n_{P(1)}; 2 : n_{P(2)}; \dots; N : n_{P(N)}\rangle,$$

其中求和是对 N 个元素集合的 $N!$ 种置换计算的.

(b) 如果粒子是费米子，对于一个粒子处于 $|n_1\rangle$ 态、一个粒子处于 $|n_2\rangle$ 态 …… 的系统，态矢量由 Slater 行列式

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} |1 : n_1\rangle & |1 : n_2\rangle & \cdots & |1 : n_N\rangle \\ |2 : n_1\rangle & |2 : n_2\rangle & \cdots & |2 : n_N\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |N : n_1\rangle & |N : n_2\rangle & \cdots & |N : n_N\rangle \end{vmatrix}$$

给出. 因为这个态矢量是全反对称化的，两个费米子不能处于一个相同的量子态（泡利不相容原理）. 上述态构成一组 N 个费米子希尔伯特空间的基.

0.8 系统的时间演化

拉比 (Rabi) 振荡

考虑一个两能级系统 $|\pm\rangle$, 其哈密顿量为 $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0|+\rangle\langle+|$. 我们用哈密顿量

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\omega_1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}|+\rangle\langle-| + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}|-\rangle\langle+|)$$

把这两个态耦合起来. 假定在 $t=0$ 时刻, 这个系统处于 $|-\rangle$ 态, 则在 t 时刻找到系统处于 $|+\rangle$ 态的概率为

$$P(t) = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2(\Omega T/2), \quad \text{其中 } \Omega^2 = (\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2.$$

时间相关的微扰论

考虑一个哈密顿量为 $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)$ 的系统. 我们假定 $\hat{H}_0$ 的本征态 $|n\rangle$ 和相应的本征能量 E_n 是已知的. 在 $t=0$ 时刻, 我们假定系统处于 $\hat{H}_0$ 的本征态 $|i\rangle$. 到 $\hat{H}_1$ 的领头阶为止, 在 t 时刻找到系统处于另一个本征态 $|f\rangle$ 的概率振幅为

$$a(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\hbar} \int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_f - E_i)t'/\hbar} \langle f | \hat{H}_1(t') | i \rangle \mathrm{d}t'.$$

在时间无关微扰 $\hat{H}_1$ (译者注: 原文误写为 H_1) 的情况下, 其概率为

$$P(t) = |a(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |\langle f | \hat{H}_1 | i \rangle|^2 \frac{\sin^2(\omega t/2)}{(\omega/2)^2},$$

我们令 $\hbar\omega = E_f - E_i$.

费米黄金规则 (Fermi's Golden Rule) 和指数衰变

考虑一个未受微扰的哈密顿量 $\hat{H}_0$ 的系统. 最初, 系统处于能量 E_i 的本征态 $|i\rangle$. 我们假定这个系统通过时间无关微扰 $\hat{V}$ 耦合到 $\hat{H}_0$ 本征态的连续区 $\{|f\rangle\}$. 为简单起见, 我们假定矩阵元 $\langle f | \hat{V} | i \rangle$ 只依赖于态 $|f\rangle$ 的能量 E_f .

在 $\hat{V}$ 的最低阶, 这种耦合导致态 $|i\rangle$ 的有限的寿命 τ : 在 $t > 0$ 时发现系统处于 $|i\rangle$ 态的概率为 $e^{-t/\tau}$, 且有

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \hat{V} | i \rangle|^2 \rho(E_i).$$

这里, 矩阵元 $\langle f | \hat{V} | i \rangle$ 是对能量为 $E_f = E_i$ 的 $|f\rangle$ 态计算的. 函数 $\rho(E)$ 是末态密度. 对于非相对论粒子 ($E = p^2/(2m)$) 或极端相对论粒子 ($E = cp$, 例如光子), 其值分别为 (译者注: 下标 “non rel.” 指非相对论, 而 “ultra rel.” 指极端相对论)

$$\rho_{\text{non rel.}}(E) = \frac{mL^3\sqrt{2mE}}{2\pi^2\hbar^3}, \quad \rho_{\text{ultra rel.}}(E) = \frac{L^3E^2}{2\pi^2\hbar^3c^3}.$$

当粒子的自旋自由度起作用时, 该态密度必须乘以可能的自旋态数 $2s+1$, 其中 s 是粒子的自旋. 量 L^3 表示归一化体积 (它与态 $|i\rangle$ 和 $|f\rangle$ 的归一化因子完全相抵消). 考虑一个按两能级系统处理的原子跃迁, 该系统由一个激发态 $|e\rangle$ 和一个基态 $|g\rangle$ 组成, 其能级间距为 $\hbar\omega$ 并通过电偶极矩相互作用耦合. 由这种自发发射导致的激发态寿命 τ 由下式给出:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} |\langle e | \hat{D} | g \rangle|^2,$$

其中 $\hat{D}$ 是电偶极矩算符.

0.9 碰撞过程

玻恩 (Born) 近似

考虑一个质量为 m 的非相对论粒子与一个固定势场 $V(\mathbf{r})$ 的弹性碰撞过程. 对一个初态动量为 $\mathbf{p}$, 末态动量为 $\mathbf{p}'$ 的入射粒子来说, 到 V 的第二阶的弹性散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\tilde{V}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')|^2, \quad \text{其中 } \tilde{V}(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} V(\mathbf{r}) d^3r.$$

例 Yukawa 势.

我们考虑

$$V(\mathbf{r}) = g \frac{\hbar c}{r} e^{-r/a},$$

令 $p = \hbar k$, 则有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2mgca^2}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{[1 + 4a^2k^2 \sin^2(\theta/2)]^2} \quad (\text{玻恩近似解}),$$

其中 θ 为 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{p}'$ 间的散射角. 于是总截面为

$$\sigma(k) = \left(\frac{2mgca^2}{\hbar} \right)^2 \frac{4\pi a^2}{1 + 4k^2 a^2} \quad (\text{玻恩近似解}).$$

当势的范围 a 趋于无穷时, 它恢复到库仑截面, 为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{g\hbar c}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (\text{精确解}),$$

其中 $E = p^2/(2m)$.

被一个束缚态散射

我们考虑一个质量为 m 的粒子在一个由 n 个粒子 $b_1, \dots, b_n$ 组成的系统中的弹性散射. 这 n 个粒子形成一个束缚态, 其波函数为 $\psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$. 在玻恩近似下, 截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\mathcal{V}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2, \quad \text{其中 } \mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_j \tilde{V}_j(\mathbf{q}) F_j(\mathbf{q}).$$

势 $\tilde{V}_j$ (译者注: 原文误写为 V_j) 表示粒子 a 和 b_j 间的相互作用. 形状因子 (form factor) F_j 由

$$F_j(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_j / \hbar} |\psi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_n)|^2 d^3r_1 \cdots d^3r_j \cdots d^3r_n$$

定义. 一般来说, 贡献给定义了 $\mathcal{V}(\mathbf{q})$ 的求和的不同 $\mathbf{q}$ 项间的相干效应可被观测到. 在电荷分布的情况中, $\tilde{V}$ 是卢瑟福 (Rutherford) 振幅, 形状因子 F 是电荷密度的傅里叶 (Fourier) 变换.

散射的一般理论

为研究更为普遍的质量为 m 的粒子被势 $V(\mathbf{r})$ 散射的问题, 确定具有正能量 $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$ 的 $\hat{H} = \hat{p}^2 / (2m) + V(\mathbf{r})$ 的本征态是有意义的, 它的渐近形式是

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \underset{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty}{\rightarrow} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(k, \mathbf{u}, \mathbf{u}') \frac{e^{ikr}}{r}.$$

该式对应着一个入射平面波 $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ 和一个散射波的叠加. 这样的态被称为定散射态. 散射振幅 f 依赖于能量、入射方向 $\mathbf{u} = \mathbf{k}/k$ 和出射方向 $\mathbf{u}' = \mathbf{r}/r$. 微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k, \mathbf{u}, \mathbf{u}')|^2.$$

散射振幅由隐式方程

$$f(k, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') d^3r' \quad (\mathbf{k}' = k\mathbf{u}')$$

给出. 选择 $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}') \approx e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ 就可重现玻恩近似的结果.

低能散射

当入射粒子的波长 $\lambda \approx k^{-1}$ 比势的范围要大, 振幅 f 就不再依赖于 u 和 u' (至少当势在无穷远处比 r^{-3} 减小得还要快时). 这时散射是各向同性的. 极限 $a_s = -\lim_{k \rightarrow 0} f(k)$ 被称为散射长度 (scattering length).



第 2 部分



量子纠缠和测量

第 12 章 薛定谔猫

叠加原理声称：如果 $|\phi_a\rangle$ 和 $|\phi_b\rangle$ 为一个量子系统的两个可能的态，则量子叠加 $(|\phi_a\rangle + |\phi_b\rangle)/\sqrt{2}$ 也是该系统的允许的一个态。这个原理在解释干涉现象时是至关重要的。然而，当这个原理用到“大型”物体时，会导致一种佯谬，在那里，一个系统可能处于一种经典上自相矛盾（对立）的态的叠加。

最重要的例子是薛定谔的“猫佯谬”，其中的猫处于“死”的态和“活”的态的叠加。这一章的目的就是要证明宏观态的这种叠加实际上是无法探测的。它们都是非常脆弱的，与环境的一个非常弱的耦合就足以破坏 $|\phi_a\rangle$ 和 $|\phi_b\rangle$ 这两个态的量子叠加。

12.1 一个谐振子的准经典态

在这一章将考虑一个质量为 m 、频率为 ω 的一维谐振子的高能量激发态。其哈密顿量被写成

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

我们用 $\{|n\rangle\}$ 代表 $\hat{H}$ 的本征态。态 $|n\rangle$ 的能量为 $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ 。

12.1.1 预备知识。 引入算符 $\hat{X} = \hat{x}\sqrt{m\omega/\hbar}$, $\hat{P} = \hat{p}/\sqrt{m\hbar\omega}$ 和湮灭及产生算符

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}), \quad \hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}.$$

回顾对易关系: $[\hat{X}, \hat{P}] = i, [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, 以及关系式 $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + 1/2)$ 和 $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$.

(a) 检验一下, 如果人们使用无量纲变量 X 和 P , 则有

$$\hat{P} = -i\frac{\partial}{\partial X}, \quad \hat{X} = i\frac{\partial}{\partial P}.$$

(b) 求对易关系 $[\hat{N}, \hat{a}]$, 并证明

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (12.1)$$

最多差一个在下文中被置为 1 的相因子.

(c) 使用 $n=0$ 时的 (12.1) 式并用 $\hat{X}$ 和 $\hat{P}$ 表示 $\hat{a}$, 计算基态波函数 $\psi_0(X)$ 及其傅里叶变换 $\varphi_0(P)$. 不必把结果归一化.

12.1.2 准经典态. 算符 $\hat{a}$ 的本征态被称为准经典态. 其理由我们现在研究.

考虑一个任意的复数 α . 证明下列态

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (12.2)$$

是 $\hat{a}$ 的一个归一化的本征态, 其本征值为 $\alpha: \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

12.1.3 计算在准经典态 $|\alpha\rangle$ 上的能量期待值. 再计算在这个态上的期待值 $\langle x \rangle$ 和 $\langle p \rangle$ 以及均方根偏差 Δx 和 Δp . 证明 $\Delta x \Delta p = \hbar/2$.

12.1.4 使用上面习题 12.1.1(c) 中的类似做法, 确定该准经典态 $|\alpha\rangle$ 的波函数 $\psi_\alpha(X)$ 以及其傅里叶变换 $\varphi_\alpha(P)$. 这里还是不必把结果归一化.

12.1.5 假定在 $t=0$ 时刻, 该振子处于准经典态 $|\alpha_0\rangle$, 且 $\alpha_0 = \rho e^{i\phi}$, 其中 ρ 是一个正实数.

(a) 证明在以后的任意时刻 t , 该振子仍处在一个准经典态上, 它可以被写成 $e^{-i\omega t/2}|\alpha(t)\rangle$. 利用 ρ 、 ϕ 、 ω 和 t 确定 $\alpha(t)$ 的值.

(b) 计算 $\langle x \rangle_t$ 和 $\langle p \rangle_t$. 对比习题 12.1.3 的结果, 并假定 $|\alpha| \gg 1$, 简略地说明为什么把这两个态称作“准经典态”是正确的.

12.1.6 数值例子. 考虑长度为 1 m、质量为 1 g 的一个单摆. 假定这个单摆的状态可以用一个准经典态来描写. 在 $t=0$ 时刻, 单摆处在离开它的经典平衡位置 $\langle x_0 \rangle = 1\mu\text{m}$ 的位置, 且具有零平均速度.

(a) $\alpha(0)$ 相应的值是多少?

(b) 其位置的相对不确定度 $\Delta x/x_0$ 是多少?

(c) 在振荡了 1/4 周期之后, $\alpha(t)$ 的值是多少?

12.2 构造一个薛定谔猫态

在时间间隔 $[0, T]$ 期间, 把耦合

$$\hat{W} = \hbar g (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2$$

添加到谐振子势中. 我们假定 g 比 ω 大得多, 而且 $\omega T \ll 1$. 因此, 我们可以做这样的近似: 在间隔 $[0, T]$ 的期间, 系统的哈密顿量简单地就是 $\hat{W}$. 在 $t = 0$ 时刻, 系统处在一个准经典态 $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$ 上.

12.2.1 证明态 $|n\rangle$ 是 $\hat{W}$ 的本征态, 并且写出 T 时刻的态 $|\psi(T)\rangle$ 在基 $\{|n\rangle\}$ 上的展开式.

12.2.2 在 $T = \pi/2g$ 和 $T = \pi/g$ 的特定情况下, $|\psi(T)\rangle$ 如何简化?

12.2.3 现在选取 $T = \pi/2g$. 证明这将给出

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\pi/4} |\alpha\rangle + e^{i\pi/4} |-\alpha\rangle). \quad (12.3)$$

12.2.4 假定 α 是纯虚数: $\alpha = ip$.

(a) 定性地讨论态 (12.3) 式的物理性质.

(b) 考虑一个与习题 12.1.6 中的 α 值在大小量级上相同的 $|\alpha|$ 值. 在何种意义上可以把这个态看成是引言中提到的“薛定谔猫”类型的态的一个具体实例?

12.3 量子叠加与统计混合对比

现在研究在 $|\alpha| \gg 1$ 的“宏观”情况下, 态 (12.3) 式的性质. 选 α 为纯虚数, $\alpha = ip$, 并且设 $p_0 = \rho\sqrt{2m\hbar\omega}$.

12.3.1 考虑一个处在 (12.3) 式态的量子系统. 写出该系统的位置和动量 (非归一化的) 的概率分布. 对于 $\alpha = 5i$, 这些概率分布如图 12.1 所示. 从物理上解释这些分布.

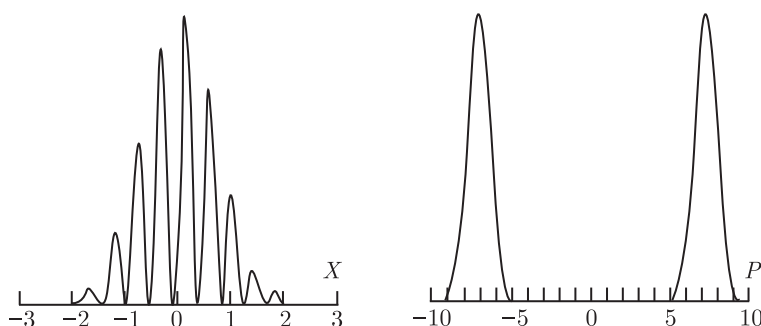


图 12.1 一个系统的位置和动量在 $\alpha = 5i$ 的 (12.3) 式的态上的概率分布.

量 X 和 P 都是在该问题的第一部分中引入的无量纲量. 竖直方向的尺度是任意的

12.3.2 一位物理学家 (Alice) 制备了 N 个独立系统, 它们都处在 (12.3) 式的态上, 然后测量这些系统每一个的动量. 测量仪器的分辨率为 δp , 有

$$\sqrt{m\hbar\omega} \ll \delta p \ll p_0.$$

对于 $N \gg 1$, 定性地画出这 N 个测量结果的直方图.

12.3.3 态 (12.3) 式代表宏观上两个不同态的量子叠加, 因此导致引言中提到的佯谬. 另外一位物理学家 (Bob) 宣称 Alice 所做的测量并不是对态 (12.3) 式中的 N 个粒子做的, 她实际上处理的是一个非佯谬的“统计混合”, 这就是说, N 个粒子的一半处在 $|\alpha\rangle$ 态, 而另一半处在 $|\alpha\rangle$ 态. 假定这是正确的, 是否可得到在前面 N 个动量测量问题中得到的相同的概率分布?

12.3.4 为了解决这个问题, Alice 现在测量 N 个独立系统中每一个的位置, 这些系统都被制备 (12.3) 式的态. 画出得到的事例分布形状, 假定测量仪器的分辨率为

$$\delta x \ll \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

12.3.5 假定 Bob 处理的是一个统计混合, 对于这 N 次位置测量能得到相同的结果吗?

12.3.6 考虑到在习题 12.1.6 单摆情况下得到的数值, 计算为了能够阐明以下两种情况之间的区别所必需的分辨率 δx : 一种情况是一组 N 个系统处在 (12.3) 式的量子叠加态上, 而另一种情况是 $N/2$ 个单摆处在 $|\alpha\rangle$ 态、另 $N/2$ 个单摆处在 $|\alpha\rangle$ 态的一种统计混合.

12.4 量子叠加的脆弱性

在真实的物理情况下，人们必须考虑振子与它的环境的耦合，以便估算出需要多长时间才能够在下述的两种系统之间做出判断：一种是（12.3）式的量子叠加态（这就是说“活的”和“死的”“薛定谔猫”），另一种是简单的统计混合态（也就是说，一组猫（系统），它的一半是活的，而另一半是死的；每一只猫或者是活的或者是死的）。

如果振子初始时处在 $|\alpha_0\rangle$ 态，而环境处在 $|\chi_e(0)\rangle$ 态，则整个系统的波函数是各部分的波函数的乘积，整个系统的态矢量可以写成两个子系统态矢量的（张量）积

$$|\Phi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle |\chi_e(0)\rangle.$$

这个耦合决定了振子振幅的衰减。在一个稍晚些时候，总系统的态矢量

$$|\Phi(t)\rangle = |\alpha_1\rangle |\chi_e(t)\rangle,$$

其中 $\alpha_1 = \alpha(t)e^{-\gamma t}$ ，数值 $\alpha(t)$ 对应于在不存在衰减时（习题 12.1.5(a)）能找到的准经典态，而 γ 是一个正实数。

12.4.1 利用 12.1.3 的结果，给出 t 时刻振子能量的期待值以及当 $2\gamma t \ll 1$ 时环境获得的能量。

12.4.2 对于“薛定谔猫”类型的振子初态， $t = 0$ 时整个系统的态矢量为

$$|\Phi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\pi/4} |\alpha_0\rangle + e^{i\pi/4} |-\alpha_0\rangle) |\chi_e(0)\rangle,$$

在一个稍后的时刻 t ，有

$$|\Phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\pi/4} |\alpha_1\rangle |\chi_e^{(+)}(t)\rangle + e^{i\pi/4} |-\alpha_1\rangle |\chi_e^{(-)}(t)\rangle).$$

仍然取 $\alpha_1 = \alpha(t)e^{-\gamma t}$ 。我们这样选取 t ，它使得 α_1 为纯虚数，且 $|\alpha_1| \gg 1$ 。 $|\chi_e^{(+)}(t)\rangle$ 和 $|\chi_e^{(-)}(t)\rangle$ 是环境的两个归一化的态，它们事先是不同的态（但不是正交的）。

独立于环境态测量的振子位置的概率分布为

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{2} [|\psi_{\alpha_1}(x)|^2 + |\psi_{-\alpha_1}(x)|^2]$$

$$+ 2\mathcal{R}e(i\psi_{\alpha 1}^*(x)\psi_{-\alpha 1}(x)\langle\chi_e^{(+)}(t)|\chi_e^{(-)}(t)\rangle)].$$

令 $\eta = \langle\chi_e^{(+)}(t)|\chi_e^{(-)}(t)\rangle$ 且 $0 \leq \eta \leq 1$ (假定 η 为实数), 并利用 12.3 节的结果, 在不进行任何计算的情况下描述下列各项的结果:

(a) N 次独立的位置测量;

(b) N 次独立的动量测量.

η 在什么样的条件下能使人们区分一个量子叠加态与一个统计混合态?

12.4.3 在一种非常简单的模型中, 环境用第二个振子来表示, 该振子与第一个振子有相同的质量和频率. 我们假定第二个振子开始处于 $|\chi_e(0)\rangle = |0\rangle$ 态. 如果在这两个振子之间的耦合是二次的, 我们将理所当然地认为:

- 态 $|\chi_e^{(\pm)}(t)\rangle$ 是准经典态: $|\chi_e^{(\pm)}(t)\rangle = |\pm\beta\rangle$.

- 而且对短时间 ($\gamma t \gg 1$) 有 $|\beta|^2 = 2\gamma t|\alpha_0|^2$.

(a) 由展开式 (12.2), 证明 $\eta = \langle\beta|\beta\rangle = \exp(-2|\beta|^2)$.

(b) 利用在习题 12.4.1 中找到的第一个振子能量的表示式, 确定在两个振子之间的典型能量转移, 在高于这个能量时, 一个量子叠加态和一个统计混合态之间的差别变得无法观测.

12.4.4 再一次考虑上述的单摆. 假定阻尼时间是一年 (在降低了摩擦的真空中的单摆). 利用上一习题中的结果, 计算可以观测到 “薛定谔猫” 态的时间. 给出评注和结论.

12.5 解

12.1 谐振子的准经典态

12.1.1 (a) 简单的变量变换给出:

$$\begin{aligned}\hat{P} &= \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} = -i\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{\partial}{\partial x} = -i\frac{\partial}{\partial X}, \\ \hat{X} &= \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} i\hbar \frac{\partial}{\partial p} = i\sqrt{m\hbar\omega} \frac{\partial}{\partial p} = i\frac{\partial}{\partial P}.\end{aligned}$$

(b) 有通常的关系 $[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} = -\hat{a}$. 于是,

$$[\hat{N}, \hat{a}]|n\rangle = -\hat{a}|n\rangle \Rightarrow \hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle,$$

并且 $\hat{a}|n\rangle$ 是 $\hat{N}$ 的一个本征态, 相应的本征值为 $n-1$. 由一维谐振子理论知道, 能级是非简并的. 因此发现 $\hat{a}|n\rangle = \mu|n-1\rangle$, 其中系数 μ 可通过计算 $\hat{a}|n\rangle$ 的模求得

$$||\hat{a}|n\rangle||^2 = \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n \Rightarrow \mu = \sqrt{n}$$

至多相差一个任意的相因子.

$$(c) \text{ 方程 } \hat{a}|0\rangle = 0 \text{ 对应着 } (\hat{X} + i\hat{P})|0\rangle = 0,$$

$$\text{在真实空间: } (X + \frac{\partial}{\partial X})\psi_0(X) = 0 \Rightarrow \psi_0(X) \propto \exp(-X^2/2).$$

$$\text{在动量空间: } (P + \frac{\partial}{\partial P})\varphi_0(P) = 0 \Rightarrow \varphi_0(P) \propto \exp(-P^2/2).$$

12.1.2 人们可以直接检验关系式 $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$:

$$\begin{aligned}\hat{a}|\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \hat{a}|n\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}|n-1\rangle \\ &= \alpha e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle = \alpha|\alpha\rangle.\end{aligned}$$

$$\text{计算 } |\alpha\rangle \text{ 的模, 得到 } \langle\alpha|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1.$$

12.1.3 能量的期待值为

$$\langle E \rangle = \langle\alpha|\hat{H}|\alpha\rangle = \hbar\omega\langle\alpha|\hat{N} + 1/2|\alpha\rangle = \hbar\omega(|\alpha|^2 + 1/2).$$

对于 $\langle x \rangle$ 和 $\langle p \rangle$, 有

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle\alpha|\hat{a} + \hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha + \alpha^*), \\ \langle p \rangle &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \langle\alpha|\hat{a} - \hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha), \\ \Delta x^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle\alpha|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2|\alpha\rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha + \alpha^*)^2 + 1] - \langle x \rangle^2.\end{aligned}$$

因此, $\Delta x = \sqrt{\hbar/2m\omega}$, 它不依赖于 α .

类似地, 有

$$\Delta p^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2} \langle\alpha|(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2|\alpha\rangle - \langle p \rangle^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2} ((\alpha - \alpha^*)^2 - 1) - \langle p \rangle^2.$$

因此, $\Delta p = \sqrt{m\hbar\omega/2}$. 在这种情况下, 海森堡 (Heisenberg) 不等式变成等式 $\Delta x \Delta p = \hbar/2$, 且与 α 的值无关.

12.1.4 利用变量 X , 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} \left(X + \frac{\partial}{\partial X} \right) \psi_\alpha(X) &= \alpha \psi_\alpha(X) \\ \Rightarrow \psi_\alpha(X) &= C \exp \left(-\frac{(X - \alpha\sqrt{2})^2}{2} \right).\end{aligned}$$

类似地, 利用变量 P , 有

$$\begin{aligned}\frac{i}{\sqrt{2}} \left(P + \frac{\partial}{\partial P} \right) \varphi_\alpha(P) &= \alpha \varphi_\alpha(P) \\ \Rightarrow \varphi_\alpha(P) &= C' \exp \left(-\frac{(P + i\alpha\sqrt{2})^2}{2} \right).\end{aligned}$$

12.1.5

(a)

$$\begin{aligned}|\psi(0)\rangle &= |\alpha_0\rangle, \\ |\psi(t)\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} e^{-i\omega t/2} \sum_n \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-in\omega t} |n\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2} |\alpha(t)\rangle, \quad \text{其中 } \alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} = \rho e^{-i(\omega t - \phi)}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\langle x \rangle_t &= \sqrt{2\hbar/(m\omega)} \rho \cos(\omega t - \phi) \\ &= x_0 \cos(\omega t - \phi), \quad \text{其中 } x_0 = \rho \sqrt{2\hbar/(m\omega)}, \\ \langle p \rangle_t &= -\sqrt{2m\hbar\omega} \rho \sin(\omega t - \phi) \\ &= -p_0 \sin(\omega t - \phi), \quad \text{其中 } p_0 = \rho \sqrt{2m\hbar\omega}.\end{aligned}$$

它们都是一个经典振子的运动方程. 利用习题 12.1.3 的结果, 得到

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{1}{2\rho} \ll 1, \quad \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{1}{2\rho} \ll 1.$$

振子的位置和动量的相对不确定性在任何时间都是相当精确地被确定的, 因此称之为准经典态.

12.1.6 (a) 合适的选择为 $\langle x \rangle_0 = x_0$ 和 $\langle p \rangle_0 = 0$, 即 $\phi = 0$,

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{l}} = 3.13 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \alpha(0) = 3.9 \times 10^9.$$

(b) $\Delta x/x_0 = 1/[2\alpha(0)] = 1.3 \times 10^{-10}$.

(c) 在 $1/4$ 周期后, $e^{i\omega t} = e^{i\pi/2} = i \Rightarrow \alpha(T/4) = -3.9 \times 10^9 i$.

12.2 构造一个薛定谔猫态

12.2.1 $\hat{W}$ 的本征矢就是前面的 $|n\rangle$, 因此

$$\hat{W}|n\rangle = \hbar g n^2 |n\rangle$$

和

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle \Rightarrow |\psi(T)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i g n^2 T} |n\rangle.$$

12.2.2 若 $T = 2\pi/g$, 则 $e^{-i g n^2 T} = e^{-2i\pi n^2} = 1$ 且

$$|\psi(T)\rangle = |\alpha\rangle.$$

如果 $T = \pi/g$, 那么若 n 为偶数, 则 $e^{-i g n^2 T} = e^{-i\pi n^2} = 1$; 而若 n 为奇数, 则该值为 -1 , 因此

$$e^{-i g n^2 T} = (-1)^n \Rightarrow |\psi(T)\rangle = |-\alpha\rangle.$$

12.2.3 如果 $T = \pi/2g$, 则当 n 为偶数时有 $e^{-i g n^2 T} = e^{-i\frac{\pi}{2}n^2} = 1$, 而当 n 为奇数时有 $e^{-i g n^2 T} = -i$.

可以把这个关系式改写成

$$e^{-i g n^2 T} = \frac{1}{2} [1 - i + (1 + i)(-1)^n] = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}(-1)^n],$$

或者等价地有

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\pi/4} |\alpha\rangle + e^{i\pi/4} |-\alpha\rangle).$$

12.2.4 (a) 对于 $\alpha = i\rho$, 在 $|\alpha\rangle$ 态上, 该振子具有一个零平均位置和一个正速度. 而在 $|-\alpha\rangle$ 态上, 该振子也具有一个零平均位置但有一个负速度. (12.3) 式的态是这两种情况的量子叠加.

(b) 若 $|\alpha| \gg 1$, 则 $|\alpha\rangle$ 态和 $|-\alpha\rangle$ 态在宏观上是不同的 (相互矛盾的). (12.3) 式的态是这两个态的量子叠加. 因此它构成薛定谔猫的一个 (平和) 版本, 在那里利用希尔伯特空间的简单的矢量表示 “死的” 或 “活的” “猫”.

12.3 量子叠加与统计混合对比

12.3.1 位置与动量的概率分布为

$$P(X) \propto |e^{-i\pi/4} \psi_{\alpha}(X) + e^{i\pi/4} \psi_{-\alpha}(X)|^2$$

$$\begin{aligned}
& \propto \left| e^{-i\pi/4} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - i\rho\sqrt{2})^2\right) \right. \\
& \quad \left. + e^{i\pi/4} \exp\left(-\frac{1}{2}(X + i\rho\sqrt{2})^2\right) \right|^2 \\
& \propto e^{-X^2} \cos^2\left(X\rho\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\
P(P) & \propto |e^{-i\pi/4}\varphi_\alpha(P) + e^{i\pi/4}\varphi_{-\alpha}(P)|^2 \\
& \approx \exp(-(P - \rho\sqrt{2})^2) + \exp(-(P + \rho\sqrt{2})^2).
\end{aligned}$$

在靠后的那个方程中, 利用了这样的一个事实: 对于 $\rho \gg 1$, 中心位于 $\rho\sqrt{2}$ 与 $-\rho\sqrt{2}$ 的两个高斯函数具有可以忽略的重叠.

12.3.2 Alice 将发现两个峰, 其中的每个峰都包含大概一半的事例, 它们的中心分别处于 p_0 和 $-p_0$.

12.3.3 Bob 的统计混合导致了与 Alice 测量的相同的动量分布: 在 $|\alpha\rangle$ 态上的 $N/2$ 个振子都有平均动量 $+p_0$, 而在 $|\alpha\rangle$ 态上的 $N/2$ 个振子都有平均动量 $-p_0$. 因此, 到目前为止, 不存在什么差别, 并且不存在与 (12.3) 式的量子叠加态相关的佯谬行为.

12.3.4 对 X 变量, 探测器的分辨率满足

$$\delta X \ll \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\rho}.$$

因此 Alice 有足够的分辨率观测分布 $P(X)$ 中 $\cos^2(X\rho\sqrt{2} - \pi/4)$ 函数的振荡. 所以, 分布的形状将重新给出图 12.1 所示的 X 的概率规律, 即一种具有高斯型包络的周期为 $[\hbar\pi^2/(2m\alpha^2\omega)]^{1/2}$ 的调制.

12.3.5 如果 Bob 对于处在 $|\alpha\rangle$ 态上的 $N/2$ 个系统做位置测量, 他将发现相应于概率规律 $P(X) \propto |\psi_\alpha(X)|^2 \propto \exp(-X)^2$ 的一个高斯分布. 对于处在 $|\alpha\rangle$ 态上的 $N/2$ 个系统, 他将发现同样的分布. 他的结果之和将是一个高斯分布, 它完全不同于 Alice 预期的结果. 原则上, 位置的测量应使人们可辨别量子叠加与统计混合.

12.3.6 必需分辨率是 $\delta x \ll \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \approx 5 \times 10^{-26} \text{ m}$. 不幸的是, 实际上不可能达到这样的分辨率.

12.4 量子叠加的脆弱性

12.4.1 有 $E(t) = \hbar\omega(|\alpha_0|^2 e^{-2\gamma t} + 1/2)$: 这个能量随着时间减小. 在一个比 γ^{-1} 长得多的时刻之后, 该振子处在其基态. 这个耗散模型对应着一个零温的环

境. 对于 $2\gamma t \ll 1$, 环境得到的平均能量 $E(0) - E(t)$ 是 $\Delta E(t) \approx 2\hbar\omega|\alpha_0|^2\gamma t$.

12.4.2 (a) 位置的概率分布保持着它的高斯型包络, 但是该振荡强弱的对比降低了一个 η 的因子.

(b) 动量的概率分布由

$$\mathcal{P}(p) = \frac{1}{2}(|\varphi_{\alpha_1}(p)|^2 + |\varphi_{-\alpha_1}(p)|^2 + 2\eta \operatorname{Re}(i\varphi_{-\alpha_1}^*(p)\varphi_{\alpha_1}(p)))$$

给出. 由于这两个高斯型包络 $\varphi_{\alpha_1}(p)$ 和 $\varphi_{-\alpha_1}(p)$ 的重叠在 $|\alpha_1| \gg 1$ 时可以忽略, 因此正比于 η 的交叉项没有显著的贡献. 重新获得中心分别位于 $\pm|\alpha_1|\sqrt{2m\hbar\omega}$ 的两个峰.

量子叠加与统计混合之间的区别可通过位置测量产生出来. 量子叠加导致了具有高斯型包络的空间周期 $[\hbar\pi^2/(2m\alpha^2\omega)]^{1/2}$ 的调制, 反之, 在统计混合的情况下, 只有这个高斯型曲线被观测到. 为了看到这个调制, 它必须不太小, 比如说,

$$\eta \geq 1/10.$$

12.4.3 (a) 简单计算给出

$$\langle \beta | -\beta \rangle = e^{-|\beta|^2} \sum_n \frac{\beta^{*n}(-\beta)^n}{n!} = e^{-|\beta|^2} e^{-|\beta|^2} = e^{-2|\beta|^2}.$$

(b) 出于前面的考虑, 我们必须有 $e^{-2|\beta|^2} \geq 1/10$, 这就是说, $|\beta| \leq 1$. 在短于 γ^{-1} 的时间内, 第一个振子的能量为

$$E(t) = E(0) - 2\gamma t |\alpha_0|^2 \hbar\omega.$$

第二个振子的能量为

$$E'(t) = \hbar\omega(|\beta(t)|^2 + 1/2) = \hbar\omega/2 + 2\gamma t |\alpha_0|^2 \hbar\omega.$$

总能量是守恒的; 在 t 时间内转移的能量为 $\Delta E(t) = 2\gamma t |\alpha_0|^2 \hbar\omega = \hbar\omega|\beta|^2$. 为了区分量子叠加与统计混合, 必须有 $\Delta E \leq \hbar\omega$. 换句话说, 如果只转移了一个能量量子 $\hbar\omega$, 辨别就会有问题.

12.4.4 在 $1/(2\gamma) = 1 \text{ a} = 3 \times 10^7 \text{ s}$ 的情况下, 达到 $|\beta| = 1$ 所花费的时间是 $(2\gamma|\alpha_0|^2)^{-1} \approx 2 \times 10^{-12} \text{ s}$!

12.6 评 注

即使对于一个很好地避开了环境影响的系统, 就像我们对单摆所做的假定那样, 宏观态的量子叠加还是无法观测到的. 在一段非常短的时间之后, 人们在一个制备成这样一个初始状态的系统所能做的所有的测量与在一个统计混合态上做的测量是一致的. 因此, 目前不可能观测到与一个宏观量子叠加佯谬特性相关的效应.

然而, 对于具有有限个自由度并被很好隔离的系统, 完全有可能观测到“介观”小猫. 最早的尝试涉及超导量子干涉仪 (SQUID) (超导环中的约瑟夫森结), 但是这个结果并不令人信服. 这里所发展起来的思想是面向量子光学的, 是由伯纳德·约克 (Bernard Yurke) 和大卫·斯托勒 (David Stoler) 提出的 (Phys. Rev. Lett. 57, p. 13 (1986)). 对于存储在一个超导腔内的微波光子 (50 GHz), 巴黎高等师范学院得到了最具决定性的结果 (M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J.-M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 77, 4887 (1996)). 存储在腔中的场是一个准完美谐振子. 小猫的制备 (12.2 节) 是通过发送原子穿过空腔来完成的. 耗散 (12.4 节) 对应着超导空腔壁的非常弱的剩余吸收. 人们能够设计由 5 个或 10 个光子构成的“小猫” (即 $|\alpha|^2=5$ 或 10), 而且能精确地检验这个理论, 包括由耗散效应造成的退相干.