1.3 绝对连续预解式

zhangwei

May 17, 2014

为进一步研究马氏过程的理论，介绍预解核绝对连续的情型.

命题10 下面三个论断等价:

(i) 对某个 $q>0$ 和某个 $x\in \mathrm{R}^d$，测度 $U^q(x,\mathrm{d}y)$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续. 其中本节用 m 表示 Lebesgue 测度.即 $\exists q=q_0>0,\exists x=x_0\in\mathrm{R}^d$ 使得 $U^{q_0}(x_0,\mathrm{d}y)\ll m$.

(ii) $\forall q>0$, $\forall x\in\mathrm{R}^d$，测度 $U^q(x,\mathrm{d}y)$ 关于 Lebesgue 测度绝对连续.即 $\forall q>0,\forall x\in\mathrm{R}^d$ 有 $U^q(x,\mathrm{d}y)\ll m$..

(iii) 预解算子具有强 Feller 性，即对 $\forall q>0$ 和 $f\in L^\infty(\mathrm{R}^d)$，函数 U^qf 连续.

注： 由后面的命题11和练习5(1)可以看出命题10中的(iii)的结论改为 U^qf 下半连续结论仍成立.

证明. 首先证明 (i) $\Leftrightarrow$(ii).

(ii)$\Rightarrow$(i) 显然.

(i)$\Rightarrow$(ii) 设 $\exists q=q_0>0,\exists x=x_0\in\mathrm{R}^d$ 使得 $U^{q_0}(x_0,\mathrm{d}y)\ll m$.则对 $\forall N\in\mathscr{B}(\mathrm{R}^d)$, 若 $m(N)=0$, 则 $m(-N)=0$[1].由绝对连续性 $U^{q_0}(x_0,-N)=0$. 从而

$$
\begin{aligned}
U^{q_0}(x_0,-N) &= U^{q_0}\mathbf{1}_{-N}(x_0)=\gamma^{q_0}*\mathbf{1}_{-N}(x_0)\\
&=\int_{\mathrm{R}^d}\mathbf{1}_{-N}(x_0-y)\gamma^{q_0}(\mathrm{d}y)\\
&\xlongequal{x_0-y=-z}\int_{\mathrm{R}^d}\mathbf{1}_{-N}(-z)\gamma^{q_0}(\mathrm{d}z)\\
&=\int_{\mathrm{R}^d}\mathbf{1}_{N}(z)\gamma^{q_0}(dz)=\gamma^{q_0}(N)=0.
\end{aligned}
$$

我们得到 $\gamma^{q_0}\ll m$,而由预解方程

$$\gamma^q-\gamma^{q_0}+(q-q_0)\gamma^q*\gamma^{q_0}=0$$

显然有 $\gamma^q(N)=0,\forall q>0$.

即有 $\gamma^q\ll m$.

若 $m(N)=0$,则 $m(-N)=0$,完全类似前边的证明有 $U^q(x,-N)=\gamma^q(N)=0,\forall q>0,\forall x\in\mathrm{R}^d$. 显然 $-N$ 也是任意的，即有 $U^q(x,\mathrm{d}y)\ll m,\forall q>0,\forall x\in\mathrm{R}^d$.

下证 (ii)$\Leftrightarrow$(iii).

(ii)$\Rightarrow$(iii) 若 (ii) 成立,由Radon-Nikodym 定理，存在 $\widehat{g^q}\in L^1(\mathrm{R}^d)$,使得 $\forall A\in\mathscr{B}(\mathrm{R}^d),\gamma^q(A)=\int_A\widehat{g^q}(x)m(\mathrm{d}x)$. (或写成 $\gamma^q(\mathrm{d}x)=\widehat{g^q}(x)m(\mathrm{d}x)$)对任何有界可测函数 f ($|f|\leqslant M,M>0$)，由Lebesgue 可积函数的平均连续性[2]有

[1] 设 $T:\mathrm{R}^d\to\mathrm{R}^d$ 是非奇异的线性变换.若$E\in\mathscr{M}$.则 $T(E)\in\mathscr{M}$ 且有$m(T(E))=|\det(T)|\cdot m(E)$.

[2] 若 $f\in L^1(\mathrm{R}^d)$,则有

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathrm{R}^d}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

$$\left|\int_{\mathrm{R}^d} f(y)\widehat{g^q}(z-y)m(\mathrm{d}y)-\int_{\mathrm{R}^d} f(y)\widehat{g^q}(x-y)m(\mathrm{d}y)\right|\leqslant M\int_{\mathrm{R}^d}\left|\widehat{g^q}(z-y)-\widehat{g^q}(x-y)\right|m(\mathrm{d}y)\to 0,(z\to x).$$

故 $\widehat{g^q}*f$ 连续.再由

$$U^qf(x)=\gamma^q*f(x)=\int_{\mathrm{R}^d} f(x-y)\gamma^q(\mathrm{d}y)=\int_{\mathrm{R}^d} f(x-y)\widehat{g^q}(y)m(\mathrm{d}y)=\widehat{g^q}*f$$

知 U^qf 连续.对 $\forall f\in L^\infty(\mathrm{R}^d)$ 易知 U^qf 连续.
(iii)⇒(ii) 对 $\forall N\in\mathscr{B}(\mathrm{R}^d)$, 若 $m(N)=0$,令 $f=\mathbf{1}_N$,由 $U^qf=\gamma^q*f$ 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{R}^d} U^qf(x)\mathrm{d}x&=\int_{\mathrm{R}^d}\gamma^q*f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathrm{R}^d}\left[\int_{\mathrm{R}^d} f(x-y)\gamma^q(\mathrm{d}y)\right]\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{Fubini}}\int_{\mathrm{R}^d}\left[\int_{\mathrm{R}^d} f(x-y)\mathrm{d}x\right]\gamma^q(\mathrm{d}y)\\&=\gamma^q(\mathrm{R}^d)\int_{\mathrm{R}^d} f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty e^{-qt}\mathrm{P}(-X_t\in\mathrm{R}^d)\mathrm{d}t\cdot m(N)\\&=\frac{1}{q}\cdot 0=0.\end{aligned}$$

又 $f=\mathbf{1}_N\geqslant 0$,故 $U^qf(x)=0$ a.e. 又 $U^qf(x)$ 连续,因此 $U^qf(x)=0,\forall x\in\mathrm{R}^d$. 即 $U^q(x,N)=0,\forall q>0,\forall x\in\mathrm{R}^d$.于是 $U^q(x,\mathrm{d}y)\ll m,\forall q>0,\forall x\in\mathrm{R}^d$. □

当命题10成立时，我们称预解核是绝对连续的.对 $\forall q>0$, 由 Radon-Nikodym 定理，存在一个可测函数 $g^q(x):\mathrm{R}^d\to[0,\infty)$ 使得对任何可测函数 $f\geqslant 0,x\in\mathrm{R}^d$,

$$U^qf(x)=\int_{\mathrm{R}^d} f(y)g^q(y-x)\mathrm{d}y$$

由命题10,

$$U^qf(x)=\widehat{g^q}*f(x)=\int_{\mathrm{R}^d} f(y)\widehat{g^q}(x-y)\mathrm{d}y$$

由 f 的任意性易知 $g^q(x)=\widehat{g^q}(-x)$ a.e. $x\in\mathrm{R}^d$. 称这样的函数 g^q 为预解密度.
下面我们的目的是证明可以选取预解密度的一个特殊版本.首先我们先介绍一个重要的函数族.

定义1(过分函数) 对 $\forall q\geqslant 0$, 称取值于 $[0,\infty]$ 的 Borel 可测函数为 $q-$ 过分的.如果它满足
(1) $rU^{r+q}f\leqslant f,\forall r>0$;
(2) $\lim\limits_{r\to\infty} rU^{r+q}f(x)=f(x),x\in\mathrm{R}^d$.

用预解算子给出的过分函数的定义和用转移半群定义是等价的，即过分函数也可如下定义
定义1'(过分函数) 对 $\forall q\geqslant 0$, 称取值于 $[0,\infty]$ 的 Borel 可测函数为 $q-$过分的.如果它满足
(3) $e^{-qt}P_tf\leqslant f,\forall t\geqslant 0$;

(4) $\lim\limits_{t\to 0+} e^{-qt}P_t f(x)=f(x), x\in \mathrm{R}^d$.

函数 f 满足 (3) 称为 f 关于 (P_t) 是 q 上平均的.

我们将证明不但 定义1 和 定义1' 等价，而且它们和下面两种定义也等价.

定义1"(过分函数) 对 $\forall q\geqslant 0$, 称取值于 $[0,\infty]$ 的 Borel 可测函数为 $q-$过分的.如果它满足

(5) $rU^{r+q}f(x)\uparrow f(x)$ $(r\uparrow\infty)$.

定义1"'(过分函数) 对 $\forall q\geqslant 0$, 称取值于 $[0,\infty]$ 的 Borel 可测函数为 $q-$过分的.如果它满足

(6) $e^{-qt}P_t f(x)\uparrow f$ $(t\downarrow 0)$.

首先证明定义1和定义1"等价及定义1'和定义1"'等价.最后证明定义1和定义1'等价.分别给出证明.

1.定义1和定义1"等价.

证明. 由(5)$\Rightarrow$ (1)(2) 显然.

另一方面，若(1)成立，则对 $\forall s>0$,由预解方程

$$U^{r+q}-U^{r+q+s}=sU^{r+q+s}U^{r+q}$$

有

$$rU^{r+q}f=rU^{r+q+s}f+sU^{r+q+s}(rU^{r+q}f)\leqslant (r+s)U^{r+q+s}f.$$

故 $rU^{r+q}f(x)$ 关于 r 递增(注: 后面多次用到,不再证明)，再由(2)可知(5) 成立.得证. □

2.定义1'和定义1"'等价.

证明. 由(6)$\Rightarrow$ (3)(4) 显然.

另一方面，若(3)成立，用 $e^{-qs}P_s$ 作用(3),利用半群定义,显然有

$$e^{-q(s+t)}P_{s+t}f(x)=e^{-qs}P_s(e^{-qt}P_t f(x))\leqslant e^{-qs}P_s f(x),\forall t>0,\forall s\geqslant 0.$$

故 $e^{-qt}P_t f(x)\uparrow$ $(t\downarrow 0)$.再由(4)可知(6)成立.得证. □

3.定义1和定义1'等价.为此我们先按定义1为 $q-$过分函数的定义，分析过分函数的性质，然后利用这些性质给出定义1和定义1'等价性的证明.

命题10.1 $0\leqslant q<\infty$.

(i) 若 $\{f_n,n=1,2,\cdots\}$ 是单调递增的 $q-$过分函数，则它们的极限函数 $f(x)$ 也是 $q-$ 过分的.

(ii) f 是取值于 $[0,\infty]$ 的 Borel 可测函数，则 $U^q f$ 是 $q-$过分的.

(iii) 函数 f 是 $q-$过分的当且仅当 f 对 $\forall s>q$ 是 $s-$过分的.

证明. (i) $rU^{r+q}f_n(x)\leqslant f_n(x)\leqslant f(x)$,两边取极限由单调收敛定理有 $rU^{r+q}f(x)\leqslant f(x)$, 于是 $f_n(x)=\lim\limits_{r\to\infty}rU^{r+q}f_n(x)\leqslant \lim\limits_{r\to\infty}rU^{r+q}f(x)\leqslant f$. 令 $n\to\infty$ 由夹逼准则 $\lim\limits_{r\to\infty}rU^{r+q}f(x)=f(x)$.

(ii) 由预解方程可得 $U^{r+q}f(x)+rU^{r+q}U^q f(x)=U^q f(x)$. (1) 若对任意的$s>0$, $U^s f(x)=\infty$, 则结论显然成立.(2) 若 $\exists s>0$, $U^s f(x)<\infty$, 则当 r 充分大时(例如 $r>s$)有 $U^{r+q}f(x)<\infty$, 由预解方程 $rU^{r+q}U^q f(x)=U^q f(x)-U^{r+q}f(x)\leqslant U^q f(x)$. 而且由 Levi 定理(单减且上方有可积函数控制), $U^{r+q}f(x)\to 0$ $(r\to\infty)$,故 $rU^{r+q}U^q f(x)\to U^q f(x)$ $(r\to\infty)$.

(iii) "$\Rightarrow$" 若 f 是 $q-$过分的，则 $\forall s>q, rU^{r+s}f(x)\leqslant rU^{r+q}f(x)\leqslant f(x)$. (1) 若 $U^{r+s}f(x)=\infty$, 则由上述不等式必有 $f(x)=\infty$,结论显然成立. (2) 若 $U^{r+s}f(x)<\infty$, 则由预解方程可得 $rU^{r+s}f(x)=(r+s-q)U^{(r+s-q)+q}f(x)-(s-q)U^{r+s}f(x)\to f(x)$ $(r\to\infty)$.

"$\Leftarrow$" 若 f 是 $s-$过分的,$(\forall s>q)$. $rU^{r+q}f(x)=\lim\limits_{s\downarrow q}rU^{r+s}f(x)\leqslant f(x)$. (1) 若 $U^{r+q}f(x)=\infty$,结论显然成立. (2) 若 $U^{r+q}f(x)<\infty$, 则由预解方程可得 $rU^{r+q}f(x)=(r+q-s)U^{(r+q-s)+s}f(x)+(s-q)U^{r+q}f(x)\to f(x)$ $(r\to\infty)$. □

下面证明定义1和定义1'等价.

证明. 若(3)(4)成立，则

$$rU^{r+q}f(x)=r\int_0^\infty e^{-(r+q)t}P_tf(x)\mathrm{d}t \xlongequal{rt=z} \int_0^\infty e^{-z}e^{-q\frac{z}{r}}P_{\frac{z}{r}}f(x)\mathrm{d}z\uparrow\int_0^\infty e^{-z}f(x)\mathrm{d}z(r\uparrow\infty)=f(x).$$

即(3)(4)⇒(1)(2).

若 (1)(2)成立，分 $q>0$ 和 $q=0$.

若 $q>0$, 令 $f_n=f\wedge n$,则 $rU^{r+q}f_n\leqslant(rU^{r+q}f)\wedge rU^{r+q}n\leqslant f_n$. 由预解方程有 $U^{r+q}f_n=U^qf_n-rU^qU^{r+q}f_n=U^q(f_n-rU^{r+q}f_n)$,显然 $f_n-rU^{r+q}f_n\geqslant 0$ 且 Borel 可测.则由命题10.1(ii)知 $U^{r+q}f_n$ 是 $q-$过分的.由我们已经证明的 $rU^{r+q}f_n$ 关于 r 单调递增，可设 $rU^{r+q}f_n\to h_n$ $(r\to\infty)$. 再由 f_n 关于 n 单增可知 h_n 单增,设 $h_n\uparrow h$.由命题10.1(i)及 $rU^{r+q}f_n$ 是 $q-$过分的知 h_n 是 $q-$过分的,进而 h 是 $q-$过分的.一方面显然有 $h_n\leqslant f_n$ 有 $h\leqslant f$. 另一方面由 $rU^{r+q}f_n\leqslant h_n$ 有 $rU^{r+q}f\leqslant h$.令 $r\to\infty$ 有 $f\leqslant h$. 从而 $f=h$.故 f 是 $q-$过分的.

若 $q=0$,由命题10.1(iii),只需证明f 是 $s-$过分的($\forall s>0$).这种情形已经证明.故 f 是 $0-$过分的. □

两类典型的 $q-$过分函数.

a. $g\geqslant 0$ 且非负可测,U^qg 是 $q-$过分函数.这在命题10.2 (ii)已经证明.

b. $f(\cdot)=\mathrm{E}.(\exp\{-qT'\}),T'$是集合 B 的击中时,$T'=T_B=\inf\{t>0,X_t\in B\}$.

下证 b 中函数是 $q-$过分函数.

证明. 注意到对 $\forall t>0,T'\circ\theta_t=\inf\{s>0,X_{t+s}\in B\}\geqslant T'-t$. 其中 θ_t 是推移算子.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_x[f(X_t)]&=\mathrm{E}_x\mathrm{E}_{X_t}\exp\{-qT'\}=\mathrm{E}_x\{\mathrm{E}_x[\exp\{-qT'\circ\theta_t\}|\mathscr{F}_t]\}\\&=\mathrm{E}_x\exp\{-qT'\circ\theta_t\}\leqslant\mathrm{E}_x\exp\{-q(T'-t)\}=e^{qt}f(x).\end{aligned}$$

于是

$$rU^{r+q}f(x)=\int_0^\infty re^{-(r+q)t}\mathrm{E}_x[f(X_t)]\mathrm{d}t\leqslant f(x).$$

而且 $T'\circ\theta_t\to T'$ $(t\downarrow 0)$.故由控制收敛定理 $rU^{r+q}f(x)\to f(x)$ $(r\to\infty)$. □

下一个命题指出当预解算子相对于 Lebesgue 测度有一个密度核时，过分函数是“光滑”的.

命题11 假设预解核绝对连续.

(i) 所有 $q-$过分函数都是下半连续的.

(ii) 若 f 和 g 是两个 $q-$过分函数且 $f\geqslant h$ a.e. ,则 $f\geqslant h,\forall x\in\mathrm{R}^d$.

证明. (i) f 是 $q-$过分函数.$k,r>0$,一方面由单调收敛定理 $\sup\limits_{k>0}U^{r+q}(f\wedge k)=U^{r+q}f$. 由$f$ 是 $q-$过分函数，$\sup\limits_{r>0}rU^{r+q}f=f$. 另一方面，由命题10预解算子具有强 Feller 性,因此 $rU^{r+q}(f\wedge k)$ 连续. 由下半连续的性质[3]有 $f=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty}nU^{n+q}(f\wedge k)$ 下半连续.

(ii) 根据命题10，$U^r(x,\mathrm{d}y)\ll m,\forall r>0,\forall x\in\mathrm{R}^d$. 若 f 和 g 是两个 $q-$过分函数且 $f\geqslant h$ a.e ，显然有 $rU^{r+q}f(x)\geqslant rU^{r+q}h(x),\forall x\in\mathrm{R}^d$.又由于 f 和 g 是 $q-$过分函数,因此

$$f(x)=\lim_{r\to\infty}rU^{r+q}f(x)\geqslant\lim_{r\to\infty}rU^{r+q}h(x)=h(x)\ (\forall x\in\mathrm{R}^d).$$

□

[3]若函数序列$\{f_n(x)\}$在区间 $[a,b]$ 上有定义，并且每个 f_n 下半连续，且 $f_n\uparrow f$,则 f 下半连续.

需要指出如果命题11的两条中任意一条成立，则预解算子绝对连续.下面给出证明.

(a)若命题11中(i)成立，则预解核绝对连续.

证明. $\forall N \in \mathscr{B}(\mathrm{R}^d)$, 若 $m(N)=0$, 由命题10中的证明取 $f(x)=\mathbf{1}_N(x)$ 可得 $U^q(x,N)=0$, a.e. 又由命题10.1(ii)知 $U^q(x,N)=U^q\mathbf{1}_N(x)$ 是 $q-$过分函数.从而下半连续.即对 $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$,当 $|y-x|<\delta$ 时, $U^q(y,N)>U^q(x,N)-\epsilon$.

这样必有 $U^q(x,N)=0, \forall x\in\mathrm{R}^d$. 否则,若存在一点 x_0, s.t. $U^q(x_0,N)>0$,则取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}U^q(x_0,N)>0, \exists\delta_0>0$,当 $|y-x_0|<\delta_0$ 时, $U^q(y,N)>U^q(x_0,N)-\epsilon_0=\frac{1}{2}U^q(x_0,N)>0$. 这与 $U^q(x,N)=0$, a.e. 矛盾.故 $U^q(x,N)=0, \forall x\in\mathrm{R}^d$. 得证. □

(b)若命题11中(ii)成立，则预解核绝对连续.

证明. N同上，取 $f\equiv 0, h=U^q(x,N)$ 均为 $q-$过分函数,显然 $f\geqslant h$ a.e. 由命题11 中(ii)知：$0\geqslant U^q(x,N), \forall x\in\mathrm{R}^d$. 故 $U^q(x,N)=0, \forall x\in\mathrm{R}^d$. 得证. □

下面的命题显示我们能够选择一个很好的预解密度版本.

命题12 假设预解核绝对连续.则存在唯一的可测函数 $u^q:\mathrm{R}^d\to[0,\infty]$ 使得

(i) 对任意的可测函数 $f\geqslant 0, x\in\mathrm{R}^d$

$$U^qf(x)=\int_{\mathrm{R}^d}f(y)u^q(y-x)\mathrm{d}y.$$

(ii) 函数 $\widehat{u^q}:x\to u^q(-x)$ 是 $q-$过分的.

证明. 对每个 $r>0$, 选取预解密度的一个任意版本 g^r 使得满足[4]

$$\int_0^\infty e^{-rt}\mathrm{P}(X_t\in A)\mathrm{d}t=\int_A g^r(y)\mathrm{d}y \quad \forall A\in\mathscr{B}(\mathrm{R}^d) \tag{$*$}$$

从($*$)式可以看出 $g^r\leqslant g^q$, a.e. $q\leqslant r$. 且 $g^r\xrightarrow{L^1(\mathrm{R}^d)}0\ (r\to\infty)$. 注意到任意的非负可测函数 f, $U^rf=\widehat{g^r}*f$.

首先将预解方程写成

$$(r-q)\widehat{g^r}*\widehat{g^q}=\widehat{g^q}-\widehat{g^r} \text{ a.e.} \tag{4}$$

显然有

$$(r-q)U^r\widehat{g^q}\leqslant\widehat{g^q} \text{ a.e.} \tag{5}$$

证明 $(r-q)U^r\widehat{g^q}$ 关于 r 单调递增的方法和证明 rU^{r+q} 关于 r 单增完全相同，故略去.

于是令 $\widehat{u^q}=\lim\limits_{r\to\infty}(r-q)U^r\widehat{g^q}$,则

$$\widehat{u^q}=\lim_{r\to\infty}(r-q)U^r\widehat{g^q}=\lim_{r\to\infty}(r-q)\widehat{g^r}*\widehat{g^q}=\lim_{r\to\infty}\widehat{g^q}-\widehat{g^r}=\widehat{g^q} \text{ a.e.} \tag{$**$}$$

故 $\widehat{u^q}=\widehat{g^q}$ a.e. ,$u^q(x)=\widehat{u^q}(-x)=\widehat{q^q}(-x)=g^q(x)$,a.e. 是 g^q 的一个版本.显然有 $\widehat{g^r}*\widehat{u^q}=\widehat{g^r}*\widehat{g^q}=U^r\widehat{u^q}$，而且

$$U^qf(x)=\widehat{g^q}*f(x)=\widehat{u^q}*f(x)=\int_{\mathrm{R}^d}f(y)\widehat{u^q}(x-y)\mathrm{d}y=\int_{\mathrm{R}^d}f(y)u^q(y-x)\mathrm{d}y.$$

下证 $\widehat{u^q}$ 是 $q-$过分的.一方面由 (5) 式有 $rU^{r+q}\widehat{g^q}\leqslant\widehat{g^q}$ a.e. 用 sU^{s+q} 作用于上式可得:

$$rU^{r+q}(sU^{s+q}\widehat{g^q})=sU^{s+q}(rU^{r+q}\widehat{g^q})\leqslant sU^{s+q}\widehat{g^q} \quad \forall x\in\mathrm{R}^d$$

[4] 左边 $=\gamma^r(-A)=\int_{-A}\widehat{g^r}(y)\mathrm{d}y=\int_{-A}g^r(-y)\mathrm{d}y=\int_A g^r(y)\mathrm{d}y=$ 右边

由 $\widehat{u^q}$ 的定义,对上式令 $s \to \infty$ 由单调收敛定理, $rU^{r+q}\widehat{u^q} \leqslant \widehat{u^q}$. 另一方面由 $\widehat{u^q} = \widehat{g^q}$ a.e. 显然有 $\widehat{u^q} = \lim\limits_{r\to\infty} rU^{r+q}\widehat{g^q} = \lim\limits_{r\to\infty} rU^{r+q}\widehat{u^q}$. 故 $\widehat{u^q}$ 是 $q-$过分的.

唯一性 假设存在 v^q 也满足，则取$f = \mathbf{1}_{\{u^q > v^q\}}$ 显然非负，由(i)可得

$$U^q f(x) = \int_{\mathrm{R}^d} f(y) u^q(y-x)\mathrm{d}y = \int_{\mathrm{R}^d} f(y) v^q(y-x)\mathrm{d}y.$$

于是

$$\int_{\{u^q > v^q\}} [u^q(y-x) - v^q(y-x)]\mathrm{d}y = 0$$

因此 $u^q \leqslant v^q$ a.e. 由命题11，$u^q \leqslant v^q, \forall x \in \mathrm{R}^d$. 同理：$u^q \geqslant v^q, \forall x \in \mathrm{R}^d$.于是 $u^q = v^q, \forall x \in \mathrm{R}^d$. 唯一性得证. $\square$