



学数学丛书



平行线教育
Parallel Education

解析几何

竞赛读本

蔡玉书 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

全书详细介绍数学联赛中解析几何的题型和解题方法. 解析几何的基本内容包括: 直线和圆、圆锥曲线、参数方程和极坐标、轨迹问题、圆锥曲线的切线和极线问题; 基本题型包括: 圆锥曲线性质的研究、圆锥曲线的最值问题; 解题技巧包括: 平面几何性质的使用、圆锥曲线有关直径性质的使用、点差法的使用、两条直线合成技巧的使用、曲线系方程的使用. 本书还对解析几何中一般圆锥曲线的性质进行了深入研究, 这些可以用于命题研究和试题研究. 作为本书的新亮点, 第 10 章对平面几何竞赛试题的解析法证明进行了充分的展示.

本书内容丰富, 方法多样, 习题充足, 可作为参加全国高中数学联赛的中学生复习解析几何的首选用书, 也可作为广大数学奥林匹克教练员进行高中数学联赛考前辅导的教材, 或高等院校数学系本科生和研究生选修数学竞赛的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

解析几何竞赛读本/蔡玉书编著. —合肥: 中国科学技术大学出版社, 2017. 8(2017. 9 重印)
(学数学丛书)

ISBN 978-7-312-04060-3

I. 解… II. 蔡… III. 几何课—中学—题解 IV. G634.635

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 044908 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026
<http://press.ustc.edu.cn>
<https://zgkxjsdxcs.tmall.com>
印刷 安徽国文彩印有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 21.5
字数 550 千
版次 2017 年 8 月第 1 版
印次 2017 年 9 月第 2 次印刷
定价 58.00 元

前言

历时两年多的写作,这本《解析几何竞赛读本》终于和大家见面了.

这本书姗姗来迟有两方面原因:首先,本人平时教学任务繁重,既是中学特级教师,又是教授级中学高级教师,学校的工作量一直饱满,有两个班的教学任务,用来写作的时间不是太多.其次,想把书做得精巧需要一定的时间做保证,需要收集整理资料.尤其是第8章“圆锥曲线统一直角坐标方程的应用”,是通过研究大量中学数学期刊与推广命题后编写而成的,需要对这些命题进行系统的证明.第10章“平面几何问题解析法证明”中的例题、练习题大多数选自《中等数学》增刊《国内外数学竞赛试题汇编》,这些题目都是国家级数学奥林匹克试题,有很大的难度,由于原来的解答都采用平面几何证明方法,现在要用解析法证明,每道试题都需要亲自演算,耗费大量时间.

单墀教授在《解析几何的技巧》一书前言中这样写道:

“几何难!”

很多人都有这样的感慨.

感谢笛卡儿创立了解析几何,为解决几何问题开辟了一条康庄大道.

可是仍有不少人不乐意采用这一方法,原因之一是他们觉得解析几何“繁”.其实,真正掌握了技巧,许多问题用解析几何来解不但不“繁”,而且解答井井有条,十分优雅.

本书的选材大多数来自数学竞赛试题,部分试题是经典高考解析几何试题的推广,希望能给喜欢数学的朋友提供一些素材.全书共分10章,每章可以独立成文,部分内容在《数学通讯》《中学数学月刊》和《中等数学》上发表过,可供数学竞赛专题讲座使用.本书最后的附录提供了各章练习题的具体解答,供读者参考使用.

由于时间所限,书中疏漏、不足之处在所难免,欢迎广大读者指正(作者邮箱:caiyushu19631981@sina.com).对此,谨致以诚挚的谢意!

蔡玉书

2017年5月于苏州正谊书院

目 录

前言	(i)
第 1 章 直线和圆	(1)
例题选讲	(1)
练习题	(8)
第 2 章 圆锥曲线	(12)
例题选讲	(12)
练习题	(28)
第 3 章 圆锥曲线参数方程的应用	(34)
例题选讲	(34)
练习题	(43)
第 4 章 圆锥曲线极坐标方程的应用	(45)
例题选讲	(45)
练习题	(51)
第 5 章 解析几何中的轨迹问题	(54)
例题选讲	(54)
练习题	(64)
第 6 章 解析几何中的最值问题	(68)
例题选讲	(68)
练习题	(79)
第 7 章 圆锥曲线中与切线相关的问题	(84)
例题选讲	(85)
练习题	(95)
第 8 章 圆锥曲线统一直角坐标方程的应用	(99)
例题选讲	(99)
练习题	(118)
第 9 章 解析几何解题技巧的研究	(122)
例题选讲	(122)
练习题	(132)
第 10 章 平面几何问题解析法证明	(135)
例题选讲	(135)

练习题	(151)
附录 习题解答	(166)
第 1 章	(166)
第 2 章	(181)
第 3 章	(204)
第 4 章	(214)
第 5 章	(220)
第 6 章	(232)
第 7 章	(258)
第 8 章	(274)
第 9 章	(285)
第 10 章	(294)
参考文献	(336)

第6章 解析几何中的最值问题

解析几何最值问题和范围问题是解析几何重点研究的内容,它的处理方法复杂多变,本章通过典型例题加以讨论.

例题选讲

1. 利用基本不等式

例1 在直角坐标平面上,已知直线 $y = x + a$ ($-1 < a < 1$) 与抛物线 $y = 1 - x^2$ 交于点 A, B , 点 C 的坐标为 $(1, 0)$. 问: 当 a 为何值时, $\triangle ABC$ 的面积最大? 求出 $\triangle ABC$ 面积的最大值. (2010 年上海市 TI 杯数学竞赛试题)

 **解析** 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x + a \end{cases}$, 消去 y 得

$$x^2 + x + a - 1 = 0$$

所以, $x_1 + x_2 = -1, x_1 x_2 = a - 1$, 则

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2(x_1 - x_2)^2 \\ &= 2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = 2(5 - 4a) \end{aligned}$$

点 C 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|1+a|}{\sqrt{2}}$, 则

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{(5-4a)(1+a)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2\left(\frac{5}{2} - 2a\right)(1+a)(1+a)} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{2 \left[\frac{\left(\frac{5}{2} - 2a\right) + (1+a) + (1+a)}{3} \right]^3} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{5}{2} - 2a = 1 + a$, 即 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\triangle ABC$ 面积取最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

例2 已知正数 p 及抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$), $A\left(\frac{p}{6}, 0\right)$ 为抛物线 C 对称轴上的一点, O 是抛物线的顶点, M 是抛物线 C 上任意一点, 求 $\frac{|OM|}{|AM|}$ 的最大值. (2013 年上海市数学竞赛试题)



解析

(解法一) 设 $M(x, y)$, 则 $x \geq 0$, 且 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 则 $\left(\frac{|OM|}{|AM|}\right)^2 =$

$$\frac{x^2 + y^2}{\left(x - \frac{p}{6}\right)^2 + y^2} = \frac{x^2 + 2px}{\left(x - \frac{p}{6}\right)^2 + 2px} = \frac{x^2 + 2px}{x^2 - \frac{px}{3} + \frac{p^2}{36} + 2px} = \frac{x^2 + 2px}{x^2 + \frac{5px}{3} + \frac{p^2}{36}}. \text{ 设}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2px}{x^2 + \frac{5px}{3} + \frac{p^2}{36}} \quad (x \geq 0)$$

则

$$f(x) = 1 + \frac{4p(12x - p)}{(12x - p)^2 + 22p(12x - p) + 25p^2} \quad (x \geq 0)$$

(1) 当 $12x - p > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} 1 < f(x) &= 1 + \frac{4p}{(12x - p) + \frac{25p^2}{12x - p} + 22p} \\ &\leq 1 + \frac{4p}{2\sqrt{(12x - p) \cdot \frac{25p^2}{12x - p}} + 22p} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

当且仅当 $12x - p = 5p$, 即 $x = \frac{p}{2}$ 时, 等号成立.

(2) 当 $12x - p = 0$ 时, $f(x) = 1$.

(3) 当 $12x - p < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{4p}{(12x - p) + \frac{25p^2}{12x - p} + 22p} \\ &= 1 + \frac{4p}{t + \frac{25p^2}{t} + 22p} \quad (-p \leq t < 0) \end{aligned}$$

由于 $t + \frac{25p^2}{t}$ 在 $[-p, 0)$ 上单调递减, 所以 $t + \frac{25p^2}{t} \leq -26p$, 所以

$$f(x) \geq 1 + \frac{4p}{-26p + 22p} = 0$$

所以 $0 \leq f(x) \leq \frac{9}{8}$.

综上所述, 当 $x = \frac{p}{2}$ 时, $\frac{|OM|}{|AM|}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

(解法二) 设 $M(x, y)$, 则 $x \geq 0$, 且 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 则

$$\begin{aligned} \left(\frac{|OM|}{|AM|}\right)^2 &= \frac{x^2 + y^2}{\left(x - \frac{p}{6}\right)^2 + y^2} = \frac{x^2 + 2px}{\left(x - \frac{p}{6}\right)^2 + 2px} = \frac{x^2 + 2px}{x^2 + \frac{5px}{3} + \frac{p^2}{36}} \\ &= \frac{x^2 + 2px}{\frac{8}{9}x^2 + \frac{5px}{3} + \left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{p^2}{36}\right)} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{x^2 + 2px}{\frac{8}{9}x^2 + \frac{5px}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot \frac{p}{6}} = \frac{9}{8}$$

当 $x = \frac{p}{2}$ 时, 等号成立. 即当 $x = \frac{p}{2}$ 时, $\frac{|OM|}{|AM|}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

2. 利用三角函数的有界性

例 3 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 直线 l 与抛物线 C 相交于 A, B 两点, 连接 A 及抛物线顶点 O 的直线交准线于 B' , 连接 B 及抛物线顶点 O 的直线交准线于 A' , 并且 AA' 与 BB' 都平行于 x 轴.

(1) 证明: 直线 l 经过定点;

(2) 求四边形 $ABB'A'$ 的面积的最小值. (2014 年辽宁省数学竞赛试题)

解析 (1) 设直线 AB 的方程为 $x = c + my$, 则 $A(c + my_1, y_1), B(c + my_2, y_2)$, 因为 AA' 与 BB' 都平行于 x 轴, 所以 $A'(-\frac{p}{2}, y_1), B'(-\frac{p}{2}, y_2)$, 由 A, O, B' 三点共线得

$$\frac{y_1}{c + my_1} = \frac{y_2}{-\frac{p}{2}}$$

即

$$-py_1 = 2my_1y_2 + 2cy_2 \quad ①$$

同理, 由 A', O, B 三点共线得

$$-py_2 = 2my_1y_2 + 2cy_1 \quad ②$$

① - ② 得

$$p(y_2 - y_1) = 2c(y_2 - y_1)$$

由于 $y_1 \neq y_2$, 所以 $p = 2c, c = \frac{p}{2}$, 所以直线 AB 的方程为 $x = \frac{p}{2} + my$, 恒过定点 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 它为抛物线的焦点.

(2) 因为直线 AB 经过焦点 F , 所以设 $\angle AFx = \theta (0 < \theta < \pi)$, 则由抛物线定义得 $|AA'| = |AF|$, 即 $p + |AF| \cdot \cos \theta = |AF|$, 所以 $|AF| = \frac{p}{1 - \cos \theta}$, 同理可得 $|BF| = \frac{p}{1 + \cos \theta}$, 于是

$$|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta}, \quad |AA'| = \frac{p}{1 - \cos \theta}, \quad |BB'| = \frac{p}{1 + \cos \theta}$$

梯形 $ABB'A'$ 的面积

$$S = \frac{1}{2}(|AA'| + |BB'|) \cdot |A'B'| = \frac{p}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{2p}{\sin^2 \theta} \cdot \sin \theta = \frac{2p^2}{\sin^3 \theta} \geq 2p^2$$

即当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, 四边形 $ABB'A'$ 的面积取最小值 $2p^2$.

例 4 已知四边形 $ABCD$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的内接平行四边形, 它外切

于一个中心在原点的圆,求:

- (1) AB 的最大值和最小值;
- (2) 四边形 $ABCD$ 面积的最大值和最小值.



解析 易得四边形 $ABCD$ 是菱形, $OA \perp OB$, 不妨设 $A(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta)$ 、

$B\left(r_2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), r_2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$, 则 $B(-r_2 \sin \theta, r_2 \cos \theta)$, $|AB|^2 = r_1^2 + r_2^2$.

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \theta}{b^2} &= 1, \quad r_1^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} \\ \frac{r_2^2 \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{r_2^2 \cos^2 \theta}{b^2} &= 1, \quad r_2^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \\ r_1^2 + r_2^2 &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^4 + b^4) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a^2 b^2 (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)} \\ &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^4 + b^4) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a^2 b^2 (1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a^2 b^2} \\ &= \frac{4a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 2\theta + 4a^2 b^2} \end{aligned}$$

显然

$$\frac{4a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2} \leq \frac{4a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 2\theta + 4a^2 b^2} \leq \frac{4a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{4a^2 b^2}$$

即

$$\frac{4a^2 b^2}{a^2 + b^2} \leq \frac{4a^2 b^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2 \sin^2 2\theta + 4a^2 b^2} \leq a^2 + b^2$$

左边当且仅当 $\theta = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ 时等号成立, 右边当且仅当 $\theta = \frac{k\pi}{2}$ 时等号成立, 于是 AB 的最小值

是 $\frac{2ab \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}$, 最大值是 $\sqrt{a^2 + b^2}$.

四边形 $ABCD$ 的面积为

$$S = 2r_1 r_2 = \frac{2a^2 b^2}{\sqrt{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)}}$$

同理可得 S 的最大值是 $2ab$, 最小值是 $\frac{4a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.

以下试题是本例的特例:

1. 已知 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的两个动点, O 为坐标原点, 且 $OA \perp OB$, 求 $|AB|$ 的最小值. (2003 年天津市数学竞赛试题)

2. 已知焦点在 x 轴上的椭圆 $E: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内含圆 $C: x^2 + y^2 = \frac{8}{3}$, 圆 C 的切线 l 与椭圆 E 交于 A 、 B 两点, 且满足 $OA \perp OB$, O 为坐标原点, 求:

- (1) b^2 的值;

(2) $|AB|$ 的取值范围. (2012 年河北省数学竞赛试题)

例 5 某建筑物内一个水平直角型过道如图 6.1 所示, 两过道的宽均为 3 m, 有一个水平截面为矩形的设备需要水平移进直角型过道. 若该设备水平截面矩形的宽为 1 m、长为 7 m, 试问: 该设备能否水平移进直角型过道? (2009 年湖南省数学竞赛试题)

解析 以直线 OB 、 OA 分别为 x 轴、 y 轴建立直角坐标系, 则问题转化为: 先求以点 $M(3, 3)$ 为圆心、1 为半径的圆的切线被 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴所截线段 AB 长的最小值, 再比较该最小值和 7 的大小关系. 设直线 AB 的方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 即 $bx + ay - ab = 0$. 因为该直线与圆 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$ 相切, 所以

$$|3(a+b) - ab| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1)$$

因为原点 $O(0, 0)$ 和 $M(3, 3)$ 在直线 $bx + ay - ab = 0$ 的异侧, 则 $3(a+b) - ab > 0$. 所以, ①可化为

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 3(a+b) - ab \quad (2)$$

下面求 $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ ($a > 0, b > 0$) 的最小值.

设 $a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 代入②得

$$r = \frac{3(\sin \theta + \cos \theta) - 1}{\sin \theta \cos \theta} \quad (3)$$

再设 $t = \sin \theta + \cos \theta$, 则因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以得到 $1 < t \leq \sqrt{2}$. 代入③得

$$\begin{aligned} r &= \frac{3(\sin \theta + \cos \theta) - 1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{6t - 2}{t^2 - 1} = \frac{4}{t + 1} + \frac{2}{t - 1} \\ &\geq \frac{4}{\sqrt{2} + 1} + \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 6\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

当且仅当 $t = \sqrt{2}$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, 上式等号成立.

这说明, 能水平移过的宽为 1 m 的矩形的长至多为 $r_{\max} = 6\sqrt{2} - 2 < 6 \times \frac{3}{2} - 2 = 7$.

所以, 设备不能水平移进直角型过道.

注 本题可以直接用三角知识处理, 最后的最值可以用导数进行求解, 请读者自行考虑.

3. 利用双曲函数的单调性

函数 $y = x + \frac{a}{x}$ 的单调性在解析几何最值问题求解中经常使用.

例 6 如图 6.2 所示, 过点 $P(a, b)$ ($a > 0, b > 0$) 作一条直线和 x 轴、 y 轴分别相交于 M 、 N 两点, 试求

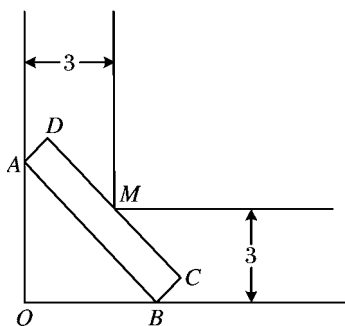


图 6.1

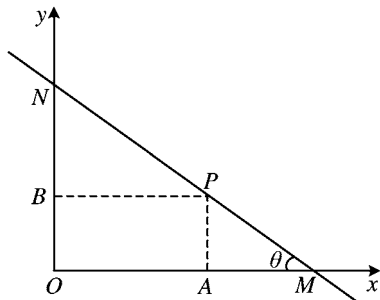


图 6.2

$|OM| + |ON| - |MN|$ 的取值范围.

 **解析** 设 $\angle PMO = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), 则由万能公式得

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

其中 $t = \tan \frac{\theta}{2} \in (0, 1)$. 于是

$$\begin{aligned} |OM| + |ON| - |MN| &= a + b \cot \theta + b + a \tan \theta - (a \sec \theta + b \csc \theta) \\ &= a + b - \left[\frac{a(1 - \sin \theta)}{\cos \theta} + \frac{b(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} \right] \\ &= a + b - \left[\frac{a \left(1 - \frac{2t}{1+t^2} \right)}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} + \frac{b \left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)}{\frac{2t}{1+t^2}} \right] \\ &= a + b - \left[\frac{a(1-t)}{1+t} + bt \right] = 2(a+b) - \left[\frac{2a}{1+t} + b(1+t) \right] \end{aligned}$$

用单调性的定义可以证明 $g(t) = \frac{2a}{1+t} + b(1+t)$ ($t > -1$) 在 $(-1, \sqrt{\frac{2a}{b}} - 1]$ 上单调递减, 在 $[\sqrt{\frac{2a}{b}} - 1, +\infty)$ 上单调递增. 考虑到 $0 < t < 1$, 我们分三种情况加以讨论:

(1) 当 $1 < \frac{2a}{b} < 4$ 时, 有 $\frac{a}{2} < b < 2a$, 于是 $0 < \sqrt{\frac{2a}{b}} - 1 < 1$, 函数 $g(t)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{2a}{b}} - 1]$ 上单调递减, 在 $[\sqrt{\frac{2a}{b}} - 1, 1)$ 上单调递增. 从而

$$\begin{aligned} g\left(\sqrt{\frac{2a}{b}} - 1\right) &\leq g(t) < \max\{g(0), g(1)\} \\ g\left(\sqrt{\frac{2a}{b}} - 1\right) &= 2\sqrt{2ab} \end{aligned}$$

于是, $|OM| + |ON| - |MN|$ 的最大值是 $2(a+b) - 2\sqrt{2ab}$. $|OM| + |ON| - |MN|$ 的取值范围是 $(\min(a, b), 2(a+b) - 2\sqrt{2ab}]$.

(2) 当 $2b \leq a$ 时, 有 $\sqrt{\frac{2a}{b}} - 1 \geq 1$, 函数 $g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 于是 $g(1) < g(t) < g(0)$, 即 $2a + b < g(t) < a + 2b$, 于是, $|OM| + |ON| - |MN|$ 的取值范围是 (b, a) , $|OM| + |ON| - |MN|$ 没有最大值, 也没有最小值.

(3) 当 $b \geq 2a$ 时, 有 $\sqrt{\frac{2a}{b}} - 1 \leq 0$, 函数 $g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 于是 $g(0) < g(t) < g(1)$, 即 $a + 2b < g(t) < 2a + b$, 于是, $|OM| + |ON| - |MN|$ 的取值范围是 (a, b) , $|OM| + |ON| - |MN|$ 没有最大值, 也没有最小值.

下列两道竞赛试题是例6的特例:

1. 过点 $P(3+2\sqrt{2}, 4)$ 作一条直线和 x 轴、 y 轴分别相交于 M 、 N 两点, 试求 $|OM| + |ON| - |MN|$ 的最大值 (其中 O 为坐标原点). (2005 年湖南省数学竞赛试题)

2. 设 $\angle XOY = 90^\circ$, P 为 $\angle XOY$ 内的一点, 且 $|OP| = 1$, $\angle XOP = 30^\circ$, 过点 P 任意作

一条直线分别交 OX 、 OY 于点 M 、 N ，试求 $|OM| + |ON| - |MN|$ 的最大值. (2004 年中国国家集训队选拔考试试题)

例 7 过抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A 、 B 两点，抛物线在 A 、 B 两点处的切线交于点 E .

(1) 求证: $EF \perp AB$;

(2) 设 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB}$, 当 $\lambda \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ 时, 求 $\triangle ABE$ 的面积 S 的最小值. (2017 年湖北省数学竞赛试题)

解析 (1) 设直线 l 的方程为 $x = my + \frac{1}{2}$, 代入抛物线方程 $y^2 = 2x$ 中, 得

$$y^2 - 2my - 1 = 0$$

设 $A\left(\frac{y_1^2}{2}, y_1\right)$ 和 $B\left(\frac{y_2^2}{2}, y_2\right)$, 则由韦达定理得到

$$y_1 + y_2 = 2m \quad ①$$

$$y_1 y_2 = -1 \quad ②$$

又因为切线 AE 的方程为

$$y_1 y = x + \frac{y_1^2}{2} \quad ③$$

切线 BE 的方程为

$$y_2 y = x + \frac{y_2^2}{2} \quad ④$$

由③④得

$$y_2 \left(x + \frac{y_1^2}{2}\right) = y_1 \left(x + \frac{y_2^2}{2}\right)$$

所以

$$x = \frac{y_1^2 y_2 - y_2^2 y_1}{2(y_1 - y_2)} = \frac{y_1 y_2}{2} = -\frac{1}{2}$$

由③-④得

$$(y_1 - y_2)y = \frac{y_1^2 - y_2^2}{2}$$

所以 $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = m$, 所以 $E\left(-\frac{1}{2}, m\right)$.

当 $m = 0$ 时, 显然有 $EF \perp AB$.

当 $m \neq 0$ 时, $k_{EF} \cdot k_{AB} = \frac{m-0}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{m} = -1$, 也有 $EF \perp AB$.

(2) 由 $\overrightarrow{AF} = \lambda \overrightarrow{FB}$, 得 $y_1 = -\lambda y_2$, 结合①②得

$$y_2 = \frac{2m}{1-\lambda}, \quad -\lambda \left(\frac{2m}{1-\lambda}\right)^2 = -1$$

从而

$$m^2 = \frac{(1-\lambda)^2}{4\lambda}$$

又

$$|AB| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{4m^2+4} = 2(1+m^2)$$

$$|EF| = \sqrt{1+m^2}$$

所以

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |EF| = \sqrt{(1+m^2)^3}$$

因为 $\lambda \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, $m^2 = \frac{(1-\lambda)^2}{4\lambda} = \frac{1}{4} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2\right)$ 在区间 $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ 上为减函数, 所以当 $\lambda =$

$\frac{1}{2}$ 时, m^2 取最小值 $\frac{1}{8}$, 从而可得 $S_{\triangle ABE}$ 有最小值 $\frac{27\sqrt{2}}{32}$.

例 8 如图 6.3 所示, 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b >$

0) 的右焦点 F 作两条垂直的弦 AB, CD . 设 AB, CD 的中点分别为 M, N .

(1) 求证: 直线 MN 必过定点, 并求出这个定点;

(2) 若弦 AB, CD 的斜率均存在, 求 $\triangle FMN$ 的面积的最大值.

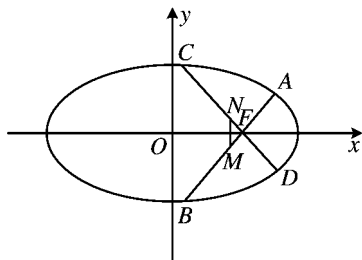


图 6.3

解析 (1) 当直线 AB 的斜率存在且不为 0 时, 设

直线 AB 的斜率为 k , 则 CD 的斜率为 $-\frac{1}{k}$, 直线 AB 的方

程为 $y = k(x - c)$, 代入椭圆方程 $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, 整理得

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 - 2k^2a^2cx + a^2(k^2c^2 - b^2) = 0$$

此方程有两个实数根 x_1, x_2 , 由韦达定理得点 M 的横坐标

$$x_M = \frac{k^2a^2c}{b^2 + a^2k^2}$$

纵坐标

$$y_M = k(x_M - c) = k\left(\frac{k^2a^2c}{b^2 + a^2k^2} - c\right) = -\frac{b^2ck}{b^2 + a^2k^2}$$

即点 $M\left(\frac{k^2a^2c}{b^2 + a^2k^2}, -\frac{b^2ck}{b^2 + a^2k^2}\right)$, 同理将 k 换成 $-\frac{1}{k}$, 得点 $N\left(\frac{a^2c}{b^2k^2 + a^2}, \frac{b^2ck}{b^2k^2 + a^2}\right)$.

当 $k^2 \neq 1$, 即 $k \neq \pm 1$ 时, 直线 MN 的斜率为

$$k_{MN} = \frac{-\frac{b^2ck}{b^2 + a^2k^2} - \frac{b^2ck}{b^2k^2 + a^2}}{\frac{k^2a^2c}{b^2 + a^2k^2} - \frac{a^2c}{b^2k^2 + a^2}} = -\frac{(a^2 + b^2)k}{(k^2 - 1)a^2}$$

所以直线 MN 的方程为

$$y - \frac{b^2ck}{b^2k^2 + a^2} = -\frac{(a^2 + b^2)k}{(k^2 - 1)a^2} \left(x - \frac{a^2c}{b^2k^2 + a^2}\right)$$

整理得

$$y = -\frac{(a^2 + b^2)k}{(k^2 - 1)a^2} \left(x - \frac{a^2c}{a^2 + b^2}\right)$$

所以直线 MN 经过定点 $\left(\frac{a^2 c}{a^2 + b^2}, 0\right)$.

当 $k^2 = 1$, 即 $k = \pm 1$ 时, 点 M 、 N 的横坐标均为 $\frac{a^2 c}{a^2 + b^2}$, 直线 MN 也经过定点 $\left(\frac{a^2 c}{a^2 + b^2}, 0\right)$.

当直线 AB 的斜率为 0 或者不存在时, 直线 MN 的方程为 $y = 0$, 也经过定点 $\left(\frac{a^2 c}{a^2 + b^2}, 0\right)$.

综上所述, 直线 MN 经过定点 $E\left(\frac{a^2 c}{a^2 + b^2}, 0\right)$.

(2) $\triangle FMN$ 的面积最大时直线 AB 的斜率一定存在, 由对称性, 不妨设 $k > 0$, 并令 $k = \tan \theta (0 < \theta \leq \frac{\pi}{2})$, 因为线段 EF 的长度

$$|EF| = c - \frac{a^2 c}{a^2 + b^2} = \frac{b^2 c}{a^2 + b^2}$$

注意到 $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $\triangle FMN$ 的面积

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \frac{b^2 c}{a^2 + b^2} \times |y_M - y_N| \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{b^2 c}{a^2 + b^2} \times \left| \frac{b^2 ck}{b^2 k^2 + a^2} + \frac{b^2 ck}{b^2 + a^2 k^2} \right| = \frac{b^4 c^2 k(k^2 + 1)}{2(b^2 k^2 + a^2)(b^2 + a^2 k^2)} \\ &= \frac{b^4 c^2 \sin \theta \cos \theta}{2(b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} = \frac{b^4 c^2 \sin \theta \cos \theta}{2(b^2 + c^2 \cos^2 \theta)(b^2 + c^2 \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{b^4 c^2 \sin \theta \cos \theta}{2(a^2 b^2 + c^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta)} = \frac{b^4 c^2}{2\left(c^4 \sin \theta \cos \theta + \frac{a^2 b^2}{\sin \theta \cos \theta}\right)} \end{aligned}$$

记

$$f(\theta) = c^4 \sin \theta \cos \theta + \frac{a^2 b^2}{\sin \theta \cos \theta}$$

则

$$f(\theta) = \frac{1}{2} c^4 \sin 2\theta + \frac{2a^2 b^2}{\sin 2\theta}$$

设

$$g(t) = \frac{1}{2} c^4 t + \frac{2a^2 b^2}{t} \quad (0 < t \leq 1)$$

则

$$g(t) = \frac{1}{2} c^4 t + \frac{2a^2 b^2}{t} \quad (t > 0)$$

在 $\left(0, \frac{2ab}{c^2}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{2ab}{c^2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 所以:

(i) 当 $\frac{2ab}{c^2} \geq 1$, 即 $b < a \leq (\sqrt{2} + 1)b$ 时, $g(t)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 所以 $g(t)$ 的最小值

为 $g(1) = \frac{1}{2} c^4 + 2a^2 b^2$, 这时 $\triangle FMN$ 的面积 S 取最大值

$$\frac{b^4 c^2}{c^4 + 4a^2 b^2} = \frac{b^4 (a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2} = \frac{b^4 (a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}$$

(ii) 当 $\frac{2ab}{c^2} < 1$, 即 $a > (\sqrt{2} + 1)b$ 时, $g(t)$ 在 $(0, \frac{2ab}{c^2}]$ 上单调递减, 在 $[\frac{2ab}{c^2}, 1)$ 上单调递增, 所以 $g(t)$ 的最小值为 $g(\frac{2ab}{c^2}) = abc^2$, 这时 $\triangle FMN$ 的面积 S 取最大值 $\frac{b^3}{4a}$.

综上所述, 当 $b < a \leq (\sqrt{2} + 1)b$ 时, $\triangle FMN$ 的面积 S 取最大值 $\frac{b^4(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}$; 当 $a > (\sqrt{2} + 1)b$ 时, $\triangle FMN$ 的面积 S 取最大值 $\frac{b^3}{4a}$.

注 $a^2 = 3, b^2 = 2$ 是 2014 年四川省数学竞赛试题.

4. 利用导数研究单调性

例 9 已知 A, B 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上的两个动点, 点 A 在第一象限, 点 B 在第四象限. l_1, l_2 分别过点 A, B 且与抛物线 C 相切, P 为 l_1, l_2 的交点.

(1) 若直线 AB 过抛物线 C 的焦点 F , 求证: 动点 P 在一条定直线上, 并求此直线方程;

(2) 设 C, D 为直线 l_1, l_2 与直线 $x = 4$ 的交点, 求 $\triangle PCD$ 面积的最小值. (2013 年福建省数学竞赛试题)

解析 (1) 设 $A(\frac{y_1^2}{4}, y_1), B(\frac{y_2^2}{4}, y_2) (y_1 > 0 > y_2)$, 则 l_1 的方程为 $y_1 y = 2(x + \frac{y_1^2}{4})$, l_2 的方程为 $y_2 y = 2(x + \frac{y_2^2}{4})$.

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $y_1 y_0 = 2(x_0 + \frac{y_1^2}{4}), y_2 y_0 = 2(x_0 + \frac{y_2^2}{4})$.

所以点 $A(\frac{y_1^2}{4}, y_1), B(\frac{y_2^2}{4}, y_2)$ 坐标满足方程 $yy_0 = 2(x_0 + x)$.

由直线 AB 过点 $F(1, 0)$, 知 $0 = 2(x_0 + 1)$, 所以 $x_0 = -1$, 点 P 在定直线 $x = -1$ 上.

(2) 由(1)知, C, D 的坐标分别为 $(4, \frac{8}{y_1} + \frac{y_1}{2}), (4, \frac{8}{y_2} + \frac{y_2}{2})$.

所以

$$|CD| = \left| \left(\frac{8}{y_1} + \frac{y_1}{2} \right) - \left(\frac{8}{y_2} + \frac{y_2}{2} \right) \right| = \left| \frac{(y_1 y_2 - 16)(y_1 - y_2)}{2y_1 y_2} \right|$$

所以

$$S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \left| 4 - \frac{y_1 y_2}{4} \right| \cdot \left| \frac{(y_1 y_2 - 16)(y_1 - y_2)}{2y_1 y_2} \right|$$

设 $y_1 y_2 = -t^2 (t > 0)$, $|y_1 - y_2| = m$, 由

$$(y_1 + y_2)^2 = (y_1 - y_2)^2 + 4y_1 y_2 = m^2 - 4t^2 \geq 0$$

知 $m \geq 2t$, 当且仅当 $y_1 + y_2 = 0$ 时等号成立.

所以

$$S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \left| 4 + \frac{t^2}{4} \right| \cdot \left| \frac{(-t^2 - 16)m}{-2t^2} \right| = \frac{m(t^2 + 16)^2}{16t^2} \geq \frac{2t(t^2 + 16)^2}{16t^2} = \frac{(t^2 + 16)^2}{8t}$$

设 $f(t) = \frac{(t^2 + 16)^2}{8t}$, 则

$$f'(t) = \frac{2(t^2 + 16) \cdot 2t \cdot t - (t^2 + 16)^2}{8t^2} = \frac{(t^2 + 16) \cdot (3t^2 - 16)}{8t^2}$$

所以当 $0 < t < \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, $f'(t) < 0$; 当 $t > \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, $f'(t) > 0$, 于是 $f(t)$ 在 $(0, \frac{4\sqrt{3}}{3}]$ 上为减函数, 在 $[\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $t = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, $f(t)$ 取最小值 $\frac{128\sqrt{3}}{9}$.

所以当 $y_1 + y_2 = 0$, $y_1 y_2 = -\frac{16}{3}$, 即 $y_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $y_2 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, $\triangle PCD$ 面积取最小值 $\frac{128\sqrt{3}}{9}$.

例 10 已知直线 $y = x$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{11} = 1$ 交于 A, B 两点, 过椭圆 C 的右焦点 F , 倾斜角为 α 的直线 l 交弦 AB 于点 P , 交椭圆 C 于点 M, N .

(1) 用 α 表示四边形 $MANB$ 的面积;

(2) 求四边形 $MANB$ 的面积取到最大值时直线 l 的方程. (2010 年湖北省数学竞赛试题)



解析 (1) 直线 MN 的倾斜角为 α , 记 $\angle MFO = \theta$, 则 $\alpha + \theta = \pi$, 可以求出

$$|MN| = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \alpha} = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$$

而 AB 与 MN 所成的角为 $\frac{\pi}{4} + \theta$, 则四边形 $MANB$ 的面积

$$S_{MANB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |MN| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \sqrt{2} |OA| \cdot ab^2 \cdot \frac{\sin \theta + \cos \theta}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$$

而 $a^2 = 16$, $b^2 = 11$, $c^2 = 5$, A 点坐标为 $(\frac{4\sqrt{33}}{9}, \frac{4\sqrt{33}}{9})$, 且 $|OA| = \frac{4\sqrt{66}}{9}$, 从而

$$S_{MANB} = \frac{352\sqrt{33}}{9} \cdot \frac{\sin \theta + \cos \theta}{16 - 5\cos^2 \theta} = \frac{352\sqrt{33}}{9} \cdot \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{16 - 5\cos^2 \alpha}$$

其中

$$0 < \alpha \leq \arctan \frac{4\sqrt{33}}{4\sqrt{33} + 9\sqrt{5}}$$

或

$$\arctan \frac{4\sqrt{33}}{4\sqrt{33} - 9\sqrt{5}} \leq \alpha < \pi$$

(2) 记 $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{16 - 5\cos^2 \alpha}$, 而 $f(\alpha)$ 只能在 $\alpha \in \left[\arctan \frac{4\sqrt{33}}{4\sqrt{33} - 9\sqrt{5}}, \pi\right)$ 时取到最大值.

对 $f(\alpha)$ 求导数得到

$$f'(\alpha) = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(16 - 5\cos^2 \alpha) - (\sin \alpha - \cos \alpha)(10\sin \alpha \cos \alpha)}{(16 - 5\cos^2 \alpha)^2}$$

令 $f'(\alpha) = 0$, 则有

$$(1 + \tan \alpha)(16 \tan^2 \alpha + 11) - (\tan \alpha - 1)(10 \tan \alpha) = 0$$

化简得到

$$16 \tan^3 \alpha + 6 \tan^2 \alpha + 21 \tan \alpha + 11 = 0$$

所以

$$(2 \tan \alpha + 1)(8 \tan^2 \alpha - \tan \alpha + 11) = 0$$

而 $8 \tan^2 \alpha - \tan \alpha + 11 = 0$ 没有实数根, 则 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$. 经检验, $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$ 符合 α

$$\in \left[\arctan \frac{4\sqrt{33}}{4\sqrt{33}-9\sqrt{5}}, \pi \right).$$

故所求直线 l 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

注 用导数求函数最值是一个基本方法, 新课程思想在这里得到了体现.

练 习 题

1. 已知圆 C 是正方形 $DEFG$ 的外接圆 (D, E, F, G 按逆时针方向排列), 其中 $E(2, 1)$ 、 $F(1, 2)$.

(1) 求圆 C 的方程.

(2) 若直线 l 与圆 C 相切, 且交 x 轴正半轴于点 $A(a, 0)$, 交 y 轴正半轴于点 $B(0, b)$.

(i) 求证: $(a-2)(b-2) = 2$;

(ii) 当 $a > 2, b > 2$ 时, 求 $\triangle AOB$ 面积的最小值. (2008 年福建省数学竞赛试题)

2. 抛物线顶点为 O , 焦点为 F , M 是抛物线上的动点, 求 $\frac{|MO|}{|MF|}$ 的最大值. (2007 年江西省、2012 年山西省数学竞赛试题)

3. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 右准线 l 交 x 轴于点 N , 过椭圆上一点 P 作 PM 垂直于准线 l , 垂足为 M . 若 PN 平分 $\angle FPM$, 且四边形 $OFMP$ 为平行四边形, 证明: 椭圆离心率 $e > \frac{2}{3}$. (2012 年江苏省数学竞赛试题)

4. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, 直角三角形 ABC 以 $A(0, 1)$ 为直角顶点, 边 AB, BC 与椭圆交于 B, C 两点. 若 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{27}{8}$, 求 a 的值. (2010 年浙江省数学竞赛试题)

5. 已知长度为 6 的线段 CD 的中点为 M , 现以 CD 为一边在同一侧作周长均为 16 的 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$, 且 $\angle AMB = 90^\circ$. 求 $\triangle AMB$ 的面积的最小值. (2008 年吉林省数学竞赛试题)

6. 已知 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, M 点的坐标为 $(4, 0)$, 过点 F 作斜率为 k_1 的直线与

抛物线交于 A, B 两点, 延长 AM, BM 交抛物线于 C, D 两点, 设直线 CD 的斜率为 k_2 .

(1) 求 $\frac{k_1}{k_2}$ 的值;

(2) 求直线 AB 与直线 CD 夹角 θ 的取值范围. (2010 年四川省数学竞赛试题)

7. 过点 $P(1, 2)$ 作倾斜角互补且相异的两条直线 PA, PB , 分别与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点.

(1) 求线段 AB 中点 M 的轨迹;

(2) 若 P 在 AB 的上方, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值. (2014 年河北省数学竞赛试题)

8. 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 8$ 中, AB 是长为 $\frac{5}{2}$ 的动弦, O 为坐标原点, 求 $\triangle AOB$ 面积的取值范围. (2004 年福建省数学竞赛试题)

9. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过定点 $A(1, 0)$, 且焦点在 x 轴上, 椭圆与曲线 $|y| = x$ 的交点为 B, C . 现有以 A 为焦点, 过点 B, C 且开口向左的抛物线, 抛物线的顶点坐标为 $M(m, 0)$. 当椭圆的离心率 e 满足 $\frac{2}{3} < e^2 < 1$ 时, 求实数 m 的取值范围. (2007 年广西壮族自治区数学竞赛试题)

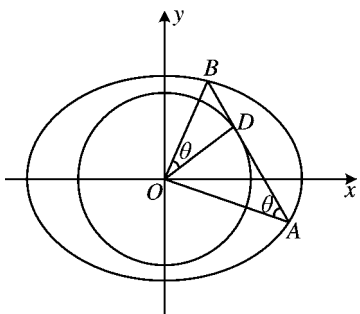


图 6.4

10. 如图 6.4 所示, 已知焦点在 x 轴上的椭圆 $E: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 内含圆 $C: x^2 + y^2 = \frac{8}{3}$. 圆 C 的切线 l 与椭圆 E 交于 A, B 两点, 且满足 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ (O 为坐标原点). 求:

(1) b^2 的值;

(2) $|AB|$ 的取值范围. (2012 河北省数学竞赛试题)

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过椭圆的右焦点 F_2 作一条直线 l 交椭圆于点 P, Q ,

求 $\triangle F_1 PQ$ 内切圆面积的最大值. (2007 年吉林省数学竞赛试题)

12. 给定曲线族 $2(2\sin \theta - \cos \theta + 3)x^2 - (8\sin \theta + \cos \theta + 1)y = 0$, 其中 θ 为参数, 求该曲线在直线 $y = 2x$ 上所截得的弦长的最大值. (1995 年全国高中数学联赛试题)

13. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 其长轴的两个端点为 A, B , 若椭圆上存在一点 Q 使得 $\angle AQB = 120^\circ$, 求椭圆离心率的取值范围. (2006 年天津市数学竞赛试题)

14. 设不经过坐标原点 O 的直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 交于两个不同的交点 P, Q , 若直线 PQ 的斜率是直线 OP 和 OQ 斜率的等比中项, 求 $\triangle POQ$ 面积 S 的取值范围. (2013 年陕西省数学竞赛试题)

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 过点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ 而不过点 $Q(\sqrt{2}, 1)$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点.

(1) 求 $\angle AQB$;

(2) 记 $\triangle QAB$ 的面积为 S , 求证: $S < 3$. (2011 年湖北省数学竞赛试题)

16. 设直线 $l: y = x + c$ 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 有两个公共点 A, B (可以重合), 与圆 $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$ 有两个公共点 C, D (可以重合), 求 $9|AB|^2 + |CD|^2$ 的最大值. (2007 年吉林省数学竞赛试题)

17. 已知两个动点 A, B 和一个定点 $M(x_0, y_0)$ 均在抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上 (A, B 与 M 不重合). 记 F 为抛物线的焦点, Q 为对称轴上一点, 有 $(\overrightarrow{QA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 且 $|\overrightarrow{FA}|, |\overrightarrow{FM}|, |\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列.

(1) 求 $\overrightarrow{OQ}$ 的坐标;

(2) 若 $|\overrightarrow{OQ}| = 3, |\overrightarrow{FM}| = \frac{5}{2}$, A, B 两点在抛物线准线上的射影分别为 A_1, B_1 , 求四边形 ABB_1A_1 面积的取值范围. (2011 年黑龙江省数学竞赛试题)

18. 已知直线 $y = kx - 1$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的左支交于 A, B 两点, 若另有一条直线 l 经过点 $P(-2, 0)$ 及线段 AB 的中点 Q . 求直线 l 在 y 轴上的截距 b 的取值范围. (2006 年四川省数学竞赛试题)

19. 已知在抛物线 $y = x^2$ 上有一个正方形的三个顶点 A, B, C , 求这种正方形面积的最小值. (1998 年上海市高中数学竞赛试题)

20. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} = 1 (a > 0)$, 抛物线 C_2 的顶点在原点 O 上, C_2 的焦点是 C_1 的左焦点 F_1 .

(1) 求证: C_1 与 C_2 总有两个不同的交点.

(2) 是否存在过焦点 F_1 的 C_2 的弦 AB , 使 $\triangle AOB$ 的面积有最大值或最小值? 如果存在, 求出 AB 所在直线的方程; 如果不存在, 说明理由. (1998 年湖南省数学竞赛试题)

21. 给定 y 轴上一点 $A(0, a) (a > 1)$, 对于曲线 $y = \left| \frac{x^2}{2} - 1 \right|$ 上的动点 $M(x, y)$, 试求 A, M 两点之间的距离 $|AM|$ 的最小值 (用 a 表示). (2009 年江西省数学竞赛试题)

22. 设曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a \text{ 为正常数})$ 与 $C_2: y^2 = 2(x + m)$ 在 x 轴上方仅有一个公共点 P .

(1) 求实数 m 的取值范围 (用 a 表示);

(2) O 为原点, 若 C_1 与 x 轴的负半轴交于点 A , 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 试求 $\triangle OAP$ 的面积的最大值 (用 a 表示). (2001 年全国高中数学联赛试题)

23. 已知点 $E(m, n)$ 为抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 内一定点, 过 E 作斜率分别为 k_1, k_2 的两条直线交抛物线于 A, B, C, D , 且 M, N 分别是线段 AB, CD 的中点.

(1) 当 $n = 0$ 且 $k_1 k_2 = -1$ 时, 求 $\triangle EMN$ 的面积的最小值;

(2) 若 $k_1 + k_2 = \lambda (\lambda \neq 0, \lambda \text{ 为常数})$, 证明: 直线 MN 过定点. (2012 年河北省数学竞赛试题)

24. 在平面直角坐标系中, 以点 $(0, 1)$ 为圆心的圆与抛物线 $y = x^2$ 交于 A, B, C, D 四点, 求证: $S_{ABCD} < \sqrt{2}$, 并求 S_{ABCD} 的最大可能值. (1989 年 IMO 预选题)

25. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 不过原点的直线 l 和椭圆相交于 A, B 两点.

(1) 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

(2) 是否存在椭圆 C_2 , 使得对于 C_2 的每一条切线和椭圆 C_1 均相交, 设它们交于 A, B 两点, 且 $\triangle AOB$ 的面积恰取最大值? 若存在, 给出该椭圆方程; 若不存在, 说明理由. (2015 年山东省数学竞赛试题)

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点. 设不经过焦点 F_1 的直线 l 与椭圆交于两个不同的点 A, B , 焦点 F_2 到直线 l 的距离为 d , 如果直线 AF_1, l, BF_1 的斜率成等差数列, 求 d 的取值范围. (2015 年全国高中数学联赛试题)

27. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 若存在经过焦点 F 的一条直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 使得 $OA \perp OB$. 求该椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a}$ 的取值范围. (2015 年全国高中数学联赛 B 卷试题)

28. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, A, B 是抛物线上不同于顶点 O 的两个动点, 记 $\angle AOB = \theta (\theta \neq 90^\circ)$. 若 $S_{\triangle AOB} = m \tan \theta$, 试求当 m 取得最小值时 $\tan \theta$ 的最大值. (2011 年全国高中数学联赛 B 卷试题)

29. 平面上有一个单位正方形 $ABCD$, O 为其对角线的交点, 以 O 为端点的射线 l 上有 X, Y 两点, 且满足 $|AX| + |CX| = 2, |BY| + |DY| = 2$, 设 Z 为线段 XY 的中点 (若 X, Y 重合, 则令 $Z = X$). 试求 $|OZ|$ 的最小值, 并给出证明. (2013 年美国数学人才搜索竞赛试题)

30. 设 O 是原点, 点 A 是抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2 + 1$ 上的一个动点, 点 B 是抛物线 $y = x^2 + 4$ 上的一个动点, 求 $\triangle OAB$ 的面积的最小值. (2015 年天津市数学竞赛试题)

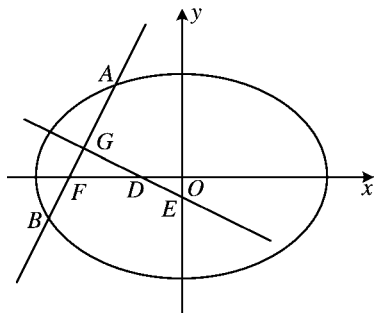


图 6.5

31. 如图 6.5 所示, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 过点 F 的直线交椭圆于 A, B 两点, AF 的最大值为 M , BF 的最小值为 m , 满足: $Mm = \frac{3}{4}a^2$.

(1) 求该椭圆的离心率;

(2) 设线段 AB 的中点为 G , AB 的垂直平分线与 x 轴和 y 轴分别交于 D, E 两点, O 是坐标原点, 记 $\triangle GFD$ 的面积为 S_1 , $\triangle OED$ 的面积为 S_2 , 求 $\frac{2S_1S_2}{S_1^2 + S_2^2}$ 的取值范围.

(2015 年黑龙江省数学竞赛试题)

32. 如图 6.6 所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是 x 轴正半轴上的一个动点. 以 F 为焦点、 O 为顶点作抛物线 C . 设 P 是第一象限内 C 上的一点, Q 是 x 轴负半轴上一点, 使得 PQ 是 C 的切线, 且 $|PQ| = 2$. 圆 C_1, C_2 的圆心分别为 O_1, O_2 , 它们均与直线 OP 相切于点 P , 且均与 x 轴相切, 切点分别为 M, N . 求点 F 的坐标, 使圆 C_1 与 C_2 的面积之和取得最小值. (2016 年全国高中数学联赛试题)

33. 如图 6.7 所示, F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的左、右焦点, 动点 $P(x_0, y_0)$ ($y_0 \geq 1$) 在双曲线 C 的右支上. 设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线交 x 轴于点 $M(m, 0)$, 交 y 轴于

点 N .

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 设过 F_1 、 N 的直线 l 交双曲线 C 于 D 、 E 两点, 求 $\triangle F_2DE$ 面积的最大值. (2016 年福建省数学竞赛试题)

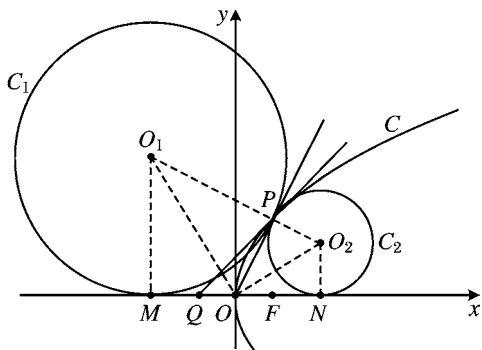


图 6.6

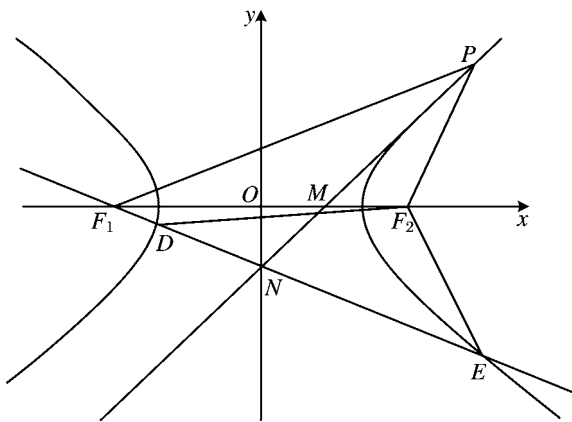


图 6.7

34. 已知椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点为 F , 过 F 的直线 $y = k(x - 2)$ ($k \neq 0$) 交椭圆于 P 、 Q 两点, 若 PQ 中点为 N , O 为原点, 直线 ON 交直线 $x = 3$ 于点 M .

(1) 求 $\angle MFQ$ 的大小;

(2) 求 $\frac{|PQ|}{|MF|}$ 的最大值. (2017 年浙江省数学竞赛试题)

$$|OG| \geq \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{72}{\sin \theta} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 4\sqrt{\cot \frac{\theta}{2}}$$

且当 $a = b = \sqrt{\frac{72}{\sin \theta}}$ 时, 上式等号成立. 所以 $|OG|_{\min} = 4\sqrt{\cot \frac{\theta}{2}}$.

(2) 设 $M(x, y)$, 则由 $|OM| = \frac{3}{2}|OG|$, 得

$$x = \frac{3}{2}x_G = \frac{1}{2}(a+b)\cos \frac{\theta}{2}, \quad y = \frac{3}{2}y_G = \frac{1}{2}(a-b)\sin \frac{\theta}{2}$$

从而

$$a = \frac{x}{\cos \frac{\theta}{2}} + \frac{y}{\cos \frac{\theta}{2}}, \quad b = \frac{x}{\cos \frac{\theta}{2}} - \frac{y}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

代入 $ab = \frac{72}{\sin \theta}$, 并整理得 $\frac{x^2}{36\cot \frac{\theta}{2}} - \frac{y^2}{36\tan \frac{\theta}{2}} = 1 (x > 0)$.

这就是所求动点 M 的轨迹方程.

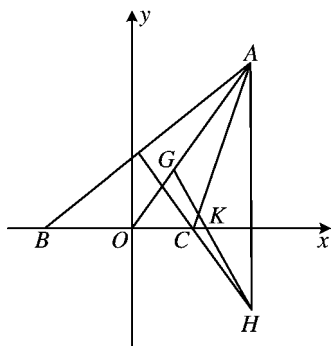


图 22

24. 建立如图 22 所示的直角坐标系 xOy , 其中坐标原点 O 为边 BC 的中点, 射线 BC 的方向为 x 轴正方向. 设边 BC 的长度为 $2a (a > 0)$, 则 $B(-a, 0)$ 、 $C(a, 0)$, 设点 $A(x, y) (y \neq 0)$, 则 $\triangle ABC$ 的垂心 $H(x_H, y_H)$ 满足方程组

$$\begin{cases} x_H = x \\ (x_H + a)(a - x) - y_H y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_H = x \\ y_H = \frac{a^2 - x^2}{y} \end{cases}$$

而重心 G 的坐标为 $(\frac{x}{3}, \frac{y}{3})$, 则线段 HG 的中点 K 的坐标为

$$(\frac{2x}{3}, \frac{3a^2 - 3x^2 + y^2}{6y})$$

于是, 点 K 在 BC 上的充要条件是 $3a^2 - 3x^2 + y^2 = 0$, 即 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1 (y \neq 0)$.

从而, 点 A 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$ (除去点 B, C).

第 6 章

1. (1) 易知圆心为 $(1, 1)$, 正方形 $DEFG$ 的外接圆方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

(2) (i) 设直线 $l: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, 即 $bx + ay - ab = 0$. 又圆方程 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$,

由圆心(1,1)到直线 l 的距离为 1, 即 $\frac{|b+a-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$, 两边平方并化简得 $ab-2a-2b+2=0$, 即 $(a-2)(b-2)=2$.

(ii) (解法一)

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &= \frac{ab}{2} = a+b-1 = (a-2) + (b-2) + 3 \\ &\geq 2\sqrt{(a-2)(b-2)} + 3 = 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

(解法二)

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &= \frac{a}{2} \left(\frac{2}{a-2} + 2 \right) = a \left(\frac{1}{a-2} + 1 \right) \\ &= [(a-2) + 2] \left(\frac{1}{a-2} + 1 \right) = 3 + \left[(a-2) + \frac{2}{a-2} \right] \\ &\geq 3 + 2\sqrt{(a-2) \frac{2}{a-2}} = 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=2+\sqrt{2}$ 时, $S_{\triangle AOB}$ 取到最小值 $3+2\sqrt{2}$.

2. (解法一) 设抛物线方程为 $y^2=2px$, 则顶点及焦点坐标为 $O(0,0)$ 、 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 若设点 $M(x, y)$, 则 $x \geq 0$, 且 $y^2=2px$ ($p>0$).

$$\begin{aligned} \left(\frac{|OM|}{|FM|} \right)^2 &= \frac{x^2+y^2}{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} = \frac{x^2+2px}{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px} = \frac{x^2+2px}{x^2+px+\frac{p^2}{4}} \\ &= \frac{x^2+2px}{\frac{3x^2}{4}+px+\frac{x^2+p^2}{4}} \leq \frac{x^2+2px}{\frac{3x^2}{4}+px+\frac{2px}{4}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

故 $\frac{|MO|}{|MF|} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 当 M 坐标为 $(p, \pm\sqrt{2}p)$ 时取等号.

(解法二) 设抛物线方程为 $y^2=4ax$ ($a>0$), 则顶点为 $O(0,0)$, 焦点为 $F(a,0)$, 若抛物线上的动点为 $M(x, y)$, 则

$$\left(\frac{|MO|}{|MF|} \right)^2 = \frac{x^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} = \frac{x^2+4ax}{(x-a)^2+4ax} = \frac{x^2+4ax}{x^2+2ax+a^2}$$

令 $\frac{x^2+4ax}{x^2+2ax+a^2} = t$, 得

$$(t-1)x^2 + 2a(t-2)x + ta^2 = 0$$

若 t 使方程有实数解 x , 则

$$\Delta = 4a^2(t-2)^2 - 4a^2t(t-1) \geq 0 \Rightarrow 4-3t \geq 0 \Rightarrow t \leq \frac{4}{3}$$

当取等号时, 由 $\frac{x^2+4ax}{x^2+2ax+a^2} = \frac{4}{3}$ 解得 $x=2a$, $y=\pm 2\sqrt{2}a$. 此时, $M(2a, \pm 2\sqrt{2}a)$.

所以, $\left(\frac{|MO|}{|MF|} \right)^2 \leq \frac{4}{3}$, 即 $\frac{|MO|}{|MF|} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. (解法一) 设点 $P(x_0, y_0)$, 由对称性, 不妨设 $y_0>0$.

四边形 $OFMN$ 为平行四边形, 所以 $|PM|=|OF|=c$, 于是由 $|PM|=\frac{a^2}{c}-x_0=c$, 得 x_0

$$= \frac{b^2}{c}. \text{ 又 } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \text{ 得 } y_0^2 = b^2 \left(1 - \frac{b^4}{a^2 c^2} \right).$$

当 PF 垂直于 x 轴时, 有 $\frac{b^2}{c} = c$, 得 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 PF 不垂直于 x 轴时, 有

$$k_{PM} = 0, \quad k_{PN} = -\frac{b\sqrt{1 - \frac{b^4}{a^2 c^2}}}{c}, \quad k_{PF} = \frac{b\sqrt{1 - \frac{b^4}{a^2 c^2}}}{\frac{b^2}{c} - c}$$

于是

$$\tan \angle NPM = \left| \frac{k_{PM} - k_{PN}}{1 + k_{PM}k_{PN}} \right| = \frac{b\sqrt{1 - \frac{b^4}{a^2 c^2}}}{c}$$

$$\tan \angle NPF = \left| \frac{k_{PF} - k_{PN}}{1 + k_{PN}k_{PF}} \right| = b\sqrt{1 - \frac{b^4}{a^2 c^2}} \cdot \left| \frac{a^2 b^2 c}{a^2 c^4 - b^6} \right|$$

由 $\tan \angle NPM = \tan \angle NPF$ 得 $a^2 b^2 c^2 = a^2 c^4 - b^6$, 因此 $e^6 = (e^2 - 1)^2$, 即 $e^3 = 1 - e^2$, 得 $e^3 + e^2 = 1$. 因为函数 $f(t) = t^3 + t^2$ 在 $t > 0$ 时单调递增, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{20}{27} < 1 = f(e)$, 所以 $e > \frac{2}{3}$.

(解法二) 因为 $\angle NPM = \angle NPF$, $\angle NPM = \angle PNF$, 所以 $\angle NPF = \angle PNF$, 得 $|PF| = |NF|$, 又四边形 $OFMP$ 为平行四边形, 所以 $|PM| = |OF|$, 且 $\frac{|PF|}{|PM|} = e$, 于是

$$e = \frac{|PF|}{|PM|} = \frac{|NF|}{|OF|} = \frac{|ON| - |OF|}{|OF|} = \frac{\frac{a^2}{c}}{c} - 1 = \frac{1}{e^2} - 1$$

从而 $e^3 + e^2 = 1$. (以下与解法一相同.)

4. 不妨设 AB 的方程 $y = kx + 1 (k > 0)$, 则 AC 的方程为 $y = -\frac{1}{k}x + 1$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } x_B = -\frac{2a^2 k}{a^2 k^2 + 1}. \text{ 由 } \begin{cases} y = -\frac{1}{k}x + 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } x_C = \frac{2a^2 k}{a^2 + k^2}.$$

从而有

$$|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_B| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{2a^2 k}{a^2 k^2 + 1}$$

$$|AC| = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{k}\right)^2} |x_C| = \frac{1}{k} \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{2a^2 k}{a^2 + k^2}$$

于是

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| = 2a^4 \cdot \frac{2k(k^2 + 1)}{(a^2 k^2 + 1)(a^2 + k^2)}$$

$$= 2a^4 \cdot \frac{k + \frac{1}{k}}{a^2 \left(k^2 + \frac{1}{k^2}\right) + a^4 + 1}$$

令 $t = k + \frac{1}{k} \geq 2$, 有

$$S_{\triangle ABC} = \frac{2a^4}{a^2 t + \frac{(a^2 - 1)^2}{t}}$$

因为

$$a^2 t + \frac{(a^2 - 1)^2}{t} \geq 2a(a^2 - 1)$$

当且仅当 $t = \frac{a^2 - 1}{a}$ 时等号成立.

因此当 $t = \frac{a^2 - 1}{a}$ 时, $(S_{\triangle ABC})_{\max} = \frac{a^3}{a^2 - 1}$, 令 $\frac{a^3}{a^2 - 1} = \frac{27}{8}$, 得 $(a - 3)(8a^2 - 3a - 9) = 0$, 解得 $a = 3$ 或者 $a = \frac{3 + \sqrt{297}}{16}$, 由 $\frac{a^2 - 1}{a} > 2$ 解得 $a > 1 + \sqrt{2}$, 则 $a = \frac{3 + \sqrt{297}}{16}$ 不合题意, 舍去, 所以 $a = 3$.

5. 如图 23 所示, 由题意知点 A, B 在椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (C, D 恰为椭圆的左、右焦点) 上运动. 设直线 MA 的方程为 $l_{MA}: y = kx$, 由

$$\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A^2 = \frac{25 \times 16}{16 + 25k^2} \\ y_A^2 = \frac{25 \times 16k^2}{16 + 25k^2} \end{cases}$$

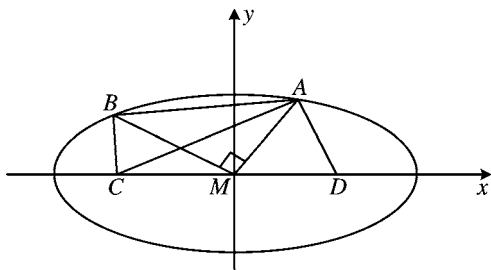


图 23

则 $|MA|^2 = x_A^2 + y_A^2 = (1 + k^2) \frac{25 \times 16}{16 + 25k^2}$, 以 $-\frac{1}{k}$ 代替 k 得

$$|MB|^2 = x_B^2 + y_B^2 = \left[1 + \left(-\frac{1}{k}\right)^2\right] \frac{25 \times 16}{16 + 25\left(-\frac{1}{k}\right)^2} = (1 + k^2) \frac{25 \times 16}{16k^2 + 25}$$

故

$$\begin{aligned} S_{\triangle MAB}^2 &= \frac{1}{4} |MA|^2 |MB|^2 = \frac{1}{4} \times 25 \times 16 \times \frac{25 \times 16 \times (1 + k^2)^2}{(16k^2 + 25)(25k^2 + 16)} \\ &= \frac{1}{4} \times 25 \times 16 \times \left[1 - \frac{81}{16 \times 25k^2 + \frac{25 \times 16}{k^2} + (25^2 + 16^2)}\right] \end{aligned}$$

中国科学技术大学出版社中学数学用书

全国高中数学联赛模拟试题精选/本书编委会

高中数学竞赛教程(第2版)/严镇军 单墀 苏淳 等

第51—76届莫斯科数学奥林匹克/苏淳 申强

解析几何竞赛读本/蔡玉书

平面几何题的解题规律/周沛耕 刘建业

从初等数学到高等数学.第1卷/彭翥成

高中数学进阶与数学奥林匹克.上册/马传渔 张志朝 陈荣华

高中数学进阶与数学奥林匹克.下册/马传渔 杨运新

名牌大学学科营与自主招生考试绿卡·数学真题篇(第2版)/李广明 张 剑

重点大学自主招生数学备考用书/甘志国

理科数学高考模拟试卷(全国卷)/安振平

亮剑高考数学压轴题/王文涛 薛玉财 刘彦永

同中学生谈排列组合/苏淳

趣味的图论问题/单墀

有趣的染色方法/苏淳

组合恒等式/史济怀

集合/冯惠愚

不定方程/单墀 余红兵

概率与期望/单墀

组合几何/单墀

解析几何的技巧(第4版)/单墀

重要不等式/蔡玉书

有趣的差分方程(第2版)/李克正 李克大

反射与反演(第2版)/严镇军

同中学生谈博弈/盛立人

趣味数学100题/单墀

向量几何/李乔

面积关系帮你解题(第3版)/张景中 彭翥成

磨光变换/常庚哲

周期数列(第2版)/曹鸿德

微微对偶不等式及其应用(第2版)/张运筹

递推数列/陈泽安

根与系数的关系及其应用(第2版)/毛鸿翔

怎样证明三角恒等式(第2版)/朱尧辰
帮你学几何(第2版)/臧龙光
帮你学集合/张景中
向量、复数与质点/彭翥成
漫话数学归纳法(第4版)/苏淳
从特殊性看问题(第4版)/苏淳
国际数学奥林匹克240真题巧解/张运筹
Fibonacci数列/肖果能
数学奥林匹克中的智巧/田廷彦
极值问题的初等解法/朱尧辰
巧用抽屉原理/冯跃峰
函数与函数思想/朱华伟 程汉波
美妙的曲线/肖果能
统计学漫话(第2版)/陈希孺 苏淳

学数学.第1卷/李潜
学数学.第2卷/李潜
学数学.第3卷/李潜
学数学.第4卷/李潜
学数学.第5卷/李潜

研究特例/冯跃峰
考察极端/冯跃峰
更换角度/冯跃峰
改造命题/冯跃峰
逐步逼近/冯跃峰
巧妙分解/冯跃峰
充分条件/冯跃峰
引入参数/冯跃峰
图表转换/冯跃峰
建立对应/冯跃峰
借桥过河/冯跃峰
递归求解/冯跃峰

天猫 Tmall.com
中国科大出版社旗舰店



搜索

编辑部联系方式

电话：(0551) 63606196；15055113738；18130468313

传真：(0551) 63602897 邮箱：edit@ustc.edu.cn

QQ：2102687242；731827650 QQ 群：283907286

出版社天猫店：<https://zgkxjsdxcbs.tmall.com>

编辑部直营微店：<http://weidian.com/s/327373220?wfr=qfriend>

（店内图书按用途分类展示，方便查找）

微信号：15055113738（专加教师）或 18130468313（专加家长）



中科优理



长按或扫描二维码进入店铺

编辑部微店二维码

微店



购买本书的二维码

天猫 TMALL.COM

中国科大出版社旗舰店



搜索