中学生数学思维方法丛书

9 图表转换

冯跃峰 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书介绍数学思维方法的一种形式:图表转换. 书中讨论了图表转换的目的、相关形式及其方法与技巧,其中一些内容是本书首次提出的. 例如,直观模拟、关系表辅助解题、度分析、边分析、圈链分析等,这些都是作者潜心研究的成果,也是本书的特点之一. 书中选用了一些数学原创题,这些问题难度适中而又生动有趣,有些问题还是第一次公开发表,这是本书的另一特点. 此外,书中对问题求解过程的剖析,能给读者以思维方法的启迪:对每一个问题,并不是直接给出解答,而是详细分析如何发现其解法,这是本书的又一特点.

本书首次对"图表转换"进行比较完整而深入的研究,旨在对解题者在探索解题方法方面有所帮助.

图书在版编目(CIP)数据

图表转换/冯跃峰著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2016.1
(中学生数学思维方法丛书)
ISBN 978-7-312-03902-7

Ⅰ. 图…　Ⅱ. 冯…　Ⅲ. 中学数学课—教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 311441 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com
印刷　安徽国文彩印有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　880 mm×1230 mm　1/32
印张　9.5
字数　247 千
版次　2016 年 1 月第 1 版
印次　2016 年 1 月第 1 次印刷
定价　28.00 元

序

问题是数学的心脏，学数学离不开解题.我国著名数学家华罗庚教授曾说过:如果你读一本数学书，却不做书中的习题，那就犹如入宝山而空手归.因此，如何解题，也就成为了一个千古话题.

国外曾流传着这样一则有趣的故事，说的是当时数学在欧几里得的推动下，逐渐成为人们生活中的一个时髦话题(这与当今社会截然相反)，以至于托勒密一世也想赶这一时髦，学点数学.虽然托勒密一世见多识广，但在学数学上却很吃力.一天，他向欧几里得请教数学问题，听了半天，还是云里雾里不知所云，便忍不住向欧几里得要求道:“你能不能把问题讲得简单点呢?”欧几里得笑着回答:“很抱歉，数学无王者之路.”欧几里得的意思是说，要想学好数学，就必须扎扎实实打好基础，没有捷径可走.后来人们常用这一故事讥讽那些凡事都想投机取巧之人.但从另一个角度想，托勒密一世的要求也未必过分，难道数学就只能是“神来之笔”，不能让其思路来得更自然一些吗?

记得我少年时期上学，每逢学期初发新书的那个时刻是最令我兴奋的，书一到手，总是迫不及待地看看书中有哪些新的内容，一方面是受好奇心的驱使，另一方面也是想测试一下自己，看能不能不用老师教也能读懂书中的内容.但每每都是失望而终:尽管书中介绍的知识都弄明白了，书中的例题也读懂了，但一做书中的练习题，却还

是不会.为此,我曾非常苦恼,却又万思不得其解.后来上了大学,更是对课堂中老师那些“神来之笔”惊叹不已,严密的逻辑推理常常令我折服.但我未能理解的是,为什么会想到这么做呢?

20世纪中叶,美国数学教育家G.Polya的数学名著《怎样解题》风靡全球,该书使我受益匪浅.这并不是说,我从书中学到了“怎样解题”,而是它引发了我对数学思维方法的思考.

实际上,数学解题是一项系统工程,有许许多多的因素影响着它的成败.本质的因素有知识、方法(指狭义的方法,即解决问题所使用的具体方法)、能力(指基本能力,即计算能力、推理能力、抽象能力、概括能力等)、经验等,由此构成解题基础;非本质的因素有兴趣、爱好、态度、习惯、情绪、意志、体质等,由此构成解题的主观状态;此外,还受时空、环境、工具的约束,这些构成了解题的客观条件.但是,具有扎实的解题基础,且有较好的客观条件,主观上也做了相应的努力,解题也不一定能获得成功.这是因为,数学中真正标准的、可以程序化的问题(像解一元二次方程)是很少的。解题中,要想把问题中的条件与结论沟通起来,光有雄厚的知识、灵活的方法和成功的解题经验是不够的.为了判断利用什么知识,选用什么方法,就必须对问题进行解剖、识别,对各种信息进行筛选、加工和组装,以创造利用知识、方法和经验的条件.这种复杂的、创造性的分析过程就是数学思维过程.这一过程能否顺利进行,取决于思维方法是否正确.因此,正确的思维方法亦是影响解题成败的重要因素之一.

经验不止一次地告诉我们:知识不足还可以补充,方法不够也可以积累,但若不善思考,即使再有知识和方法,不懂得如何运用它们解决问题,也是枉然.与此相反,掌握了正确的思维方法,知识就不再是孤立的,方法也不再是呆板的,它们都建立了有血有肉的联系,组成了生机勃勃的知识方法体系,数学思维活动也就充满了活力,得到了更完美的发挥与体现.

G. Polya 曾指出，解题的价值不是答案本身，而在于弄清“是怎样想到这个解法的”，“是什么促使你这样想、这样做的”. 这实际上都属于数学思维方法的范畴. 所谓数学思维方法，就是在基本数学观念系统作用下进行思维活动的心理过程. 简单地说，数学思维方法就是找出已有的数学知识和新遇的数学问题之间联系的一种分析、探索方法. 在一般情况下，问题与知识的联系并非是显然的，即使有时能在问题中看到某些知识的“影子”，但毕竟不是知识的原形，或是披上了“外衣”，或是减少了条件，或是改变了结构，从而没有现成的知识、方法可用，这就是我在学生时代“为什么知识都明白了，例题也看懂了，还是不会做习题”的原因. 为了利用有关的知识和方法解题，就必须创造一定的“条件”，这种创造条件的认识、探索过程，就是数学思维方法作用的过程.

但是，在当前数学解题教学中，由于“高考”指挥棒的影响，教师往往只注重学生对知识方法掌握的熟练程度，不少教师片面地强调基本知识和解决问题的具体方法的重要性，忽视思维方法方面的训练，造成学生解决一般问题的困难. 为了克服这一困难，各种各样的、非本质的、庞杂零乱的具体解题技巧统统被视为规律，成为教师谆谆告诫的教学重点，学生解题也就试图通过记忆、模仿来补偿思维能力的不足，利用胡猜乱碰代替有根据、有目的的探索. 这不仅不能提高学生的解题能力，而且对于系统数学知识的学习，对于数学思维结构的健康发展都是不利的.

数学思维方法通常又表现为一种解题的思维模式. 例如，G. Polya 就在《怎样解题》中列出了一张著名的解题表. 容许我们大胆断言，任何一种解题模式均不可能囊括人们在解题过程中表现出来的各种思维特征，诸如观察、识别、猜想、尝试、回忆、比较、直觉、顿悟、联想、类比、归纳、演绎、想象、反例、一般化、特殊化等. 这些思维特征充满解题过程中的各个环节，要想用一个模式来概括，那就像用

数以千计的思维元件来构造一个复杂而庞大的解题机器.这在理论上也许是可行的,但在实际应用中却很不方便,难以被人们接受.更何况数学问题形形色色,任何一个模式都未必能适用所有的数学问题.因此,究竟如何解题,其核心内容还是学会如何思考.有鉴于此,笔者想到写这样一套关于数学思维方法的丛书.

本丛书也不可能穷尽所有的数学思维方法,只是选用一些典型的思维方法为代表做些介绍.这些方法,或是作者原创发现,或是作者从一个全新的角度对其进行了较为深入的分析与阐述.

囿于水平,书中观点可能片面武断,错误难免,敬请读者不吝指正.

冯跃峰

2015 年 11 月

目　　录

1 几何模型

将题中的数学对象及其相互关系用一个图像或表格来描述，我们称这种分析方法为图表转换.

本章介绍一种图表转换方式：几何模型.

所谓几何模型，就是将若干数学对象的相互关系，用一个几何图形来描述.

1.1 函数图像

在有些代数问题中，用纯代数的方法解答较为困难或过程烦琐，如果恰当地引入相关函数，借助函数图像的直观及相关性质，常常能得到非常简单的解法.

利用函数图像解题的关键，是确定图像的存在区域，并判断有关点与图像的关系：在图像上或在图像划分的某个区域内.

特别值得注意的是，不能用直观代替推理.必须通过严密的代数分析，确定相关图像的特征与变化趋势，如分布范围、切线、渐近线、单调性、凹凸性、最高(低)点、曲线间的交点等，才能由图像得到相关结论.因此，一些代数变形与数值计算通常都是必不可少的.

例 1　设 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，求证$\frac{2x}{\pi}\leqslant\sin x\leqslant x$.(约当不等式)

分析与证明　注意到不等式中的式子$\frac{2x}{\pi}$、$\sin x$、x 都是关于x 的基本函数，从而可以用图像来证明.

如图 1.1 所示，在同一个坐标系中作出 $f(x)=\frac{2x}{\pi}$，$g(x)=\sin x$，$h(x)=x$ 的图像，易知 $f(x)=\frac{2x}{\pi}$，$g(x)=\sin x$ 的图像交于点 $A(\frac{\pi}{2},1)$.

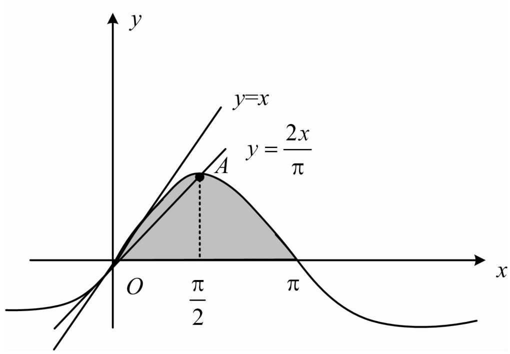

图 1.1

因为 $g'(x)=\cos x$，所以 $g'(0)=1$，即 $g(x)=\sin x$ 的图像在点 $O(0,0)$处的切线的斜率为 1，从而直线 $h(x)=x$ 是$g(x)=\sin x$ 的图像在点$O(0,0)$处的切线. 于是，在$[0,\frac{\pi}{2}]$上 $g(x)=\sin x$ 的图像在直线 $h(x)=x$ 的下方，所以 $\sin x\leqslant x$.

因为 $g''(x)=-\sin x\leqslant 0(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$，所以 $g(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上是凹函数，于是在$[0,\frac{\pi}{2}]$上 $g(x)=\sin x$ 的图像在直线$f(x)=\frac{2x}{\pi}$的上方，所以$\frac{2x}{\pi}\leqslant\sin x$.

综上所述,不等式获证.

例 2 若关于 x 的方程 $\lg(x-1)+\lg(3-x)=\lg(a-x)$ 有唯一的实根,求实数 a 的取值范围.

分析与解 原方程等价于

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{13}{4}-a, & ①\\ 1<x<3, & ②\\ x<a, & ③\end{cases}$$

由方程①可知,$a\leqslant\dfrac{13}{4}$.

当 $a=\dfrac{13}{4}$ 时,方程变为 $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2=0$,方程①恰有一个根 $x=\dfrac{5}{2}$,它合乎后面的不等式,所以 $a=\dfrac{13}{4}$ 合乎要求.

当 $a<\dfrac{13}{4}$ 时,在同一坐标系中作函数 $y=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2(1<x<3)$ 和 $y=\dfrac{13}{4}-a$ 的图像(图 1.2).

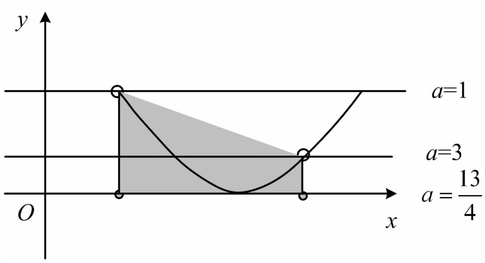

图 1.2

由图像可知,$1<a\leqslant3$ 时,两个图像恰有一个交点,所以实数 a 的取值范围是 $1<a\leqslant3$ 或 $a=\dfrac{13}{4}$.

注 这个图像不是"最好"的,若将 a 单独放一边,则解答更简单

(图 1.3).

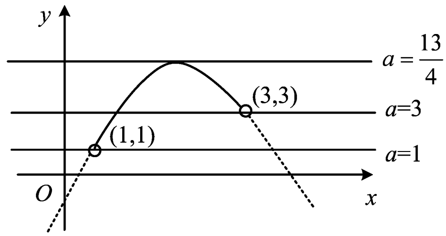

图 1.3

实际上,先将方程变为 $-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{4}=a$,在同一坐标系中作函数 $y=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{13}{4}(1<x<3)$ 和 $y=a$ 的图像,它过(1,1)和(3,3),由此可知实数 a 的取值范围是 $1<a\leqslant 3$ 或 $a=\frac{13}{4}$.

例 3 设 $p=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$, $q=\log_2\frac{1}{3}$, $r=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$,试比较 p、q、r 的大小.

分析与解 首先,取中间量 0,则

$$q=\log_2\frac{1}{3}<\log_2 1=0,$$

$$p=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}>\log_{\frac{1}{3}}1=0,\quad r=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>0,$$

所以 q 最小,以下只需比较 p、r 的大小.

因为 $r^3=\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{3}\right)^p$,此式可看作是两个函数在不同点 r、p 处的值相等.

于是,在同一个坐标系中作出 $y_1=x^3$、$y_2=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图像(图 1.4),设它们的交点为 $A(a,b)$,则 $a^3=b=\left(\frac{1}{3}\right)^a$.

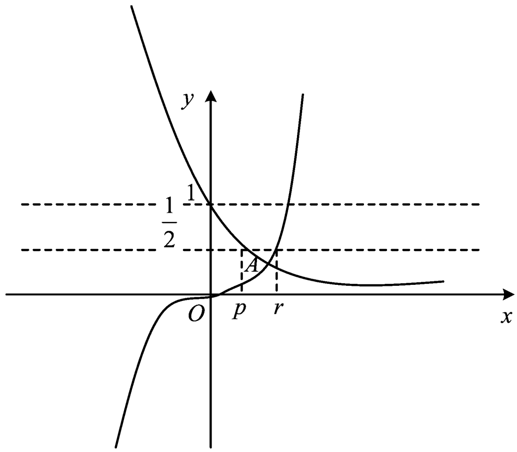

图 1.4

如果 $a\leqslant\frac{2}{3}$,则

$$b = a^3 \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} < \frac{1}{2}.$$

如果 $a>\frac{2}{3}$,则

$$b = \left(\frac{1}{3}\right)^a < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}.$$

所以,恒有 $b<\frac{1}{2}$.

从而点 $A(a,b)$位于直线 $y=\frac{1}{2}$的下方,由图像可知 $p<r$.故 $q<p<r$.

例 4 设 α、β 满足 $\lg\alpha+\alpha+4=0$,$10^\beta+\beta+4=0$,求 $\alpha+\beta$.

分析与解 两个方程都是超越方程,只能用图像方法求解.

为了使构造的函数图像简单,先将两个方程变为

$$\lg\alpha = -\alpha-4,\quad 10^\beta = -\beta-4.$$

于是 α 是 $y=\lg x$ 与 $y=-x-4$ 的交点横坐标，β 是 $y=10^x$ 与 $y=-x-4$ 的交点横坐标.

在同一坐标系内作出 $y=\lg x$、$y=-x-4$ 和 $y=10^x$ 的图像，设 $y=-x-4$ 与 $y=\lg x$、$y=10^x$ 的交点分别为 A、B，则 $x_A=\alpha$，$x_B=\beta$（图 1.5）.

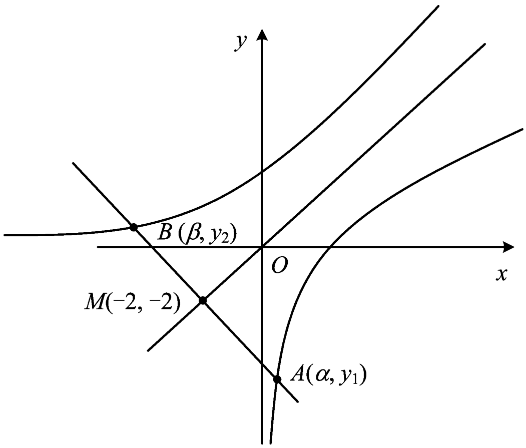

图 1.5

因为 $y=\lg x$ 与 $y=10^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，所以点 A、B 关于直线 $y=x$ 对称.

易知直线 $y=x$ 与直线 $AB(y=-x-4)$ 的交点为 $M(-2,-2)$，由 $x_A+x_B=2x_M$ 得

$$\alpha+\beta=2\times(-2)=-4.$$

例 5 设 k 为自然数，若 $(x-2k)^2=ax$ 在区间 $(2k-1,2k+1]$ 上有两个不相等的实根，求实数 a 的取值范围.

分析与解 在同一坐标系内作出抛物线弧 $y=(x-2k)^2(x\in(2k-1,2k+1])$ 和直线 l：$y=ax$ 的图像（图 1.6）.

设 $A(2k,0)$、$B(2k+1,1)$，则原方程在 $(2k-1,2k+1]$ 上有两个不同实根的充要条件是上述抛物线弧与直线 l 有两个不同的

交点.

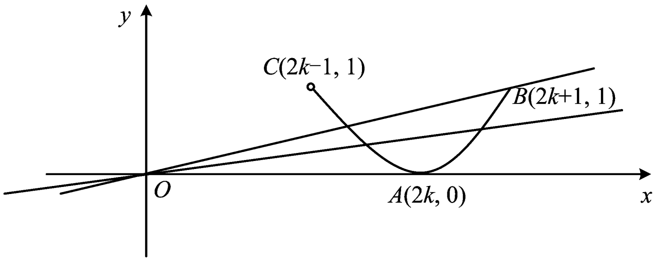

图 1.6

由图像可知,这等价于直线 l 介于直线 OA 与 OB(包括 OB)之间.

又直线 OA、OB 的斜率分别为 0、$\frac{1}{2k+1}$,故 a 的取值范围是 $0<a\leqslant\frac{1}{2k+1}$.

例 6 设实数 $a>0$,若 $x>1$ 时,不等式 $a^x-2^x-1>0$ 恒成立,求 a 的取值范围.(原创题)

分析与解 本题是涉及超越函数的不等式,而 a^x、2^x 等都是熟悉的函数,从而可利用函数的图像求解.但如果直接令

$$f(x)=a^x-2^x-1,$$

则 $f(x)$ 并不是常见的基本函数,难以作出其图像,由此想到将不等式变为

$$a^x-1>2^x,$$

再令

$$f(x)=a^x-1,\quad g(x)=2^x,$$

这样,原不等式变为对一切 $x>1$,有

$$f(x)>g(x).$$

在同一个坐标系内作出

$$y = f(x) = a^x - 1, \quad y = g(x) = 2^x$$

的图像,设两图像的交点为 $P(x_0, y_0)$,则不等式 $f(x) > g(x)$ 的解集为 $(x_0, +\infty)$.

依题意,有

$$(1, +\infty) \subseteq (x_0, +\infty),$$

所以 $x_0 \leqslant 1$(图 1.7).

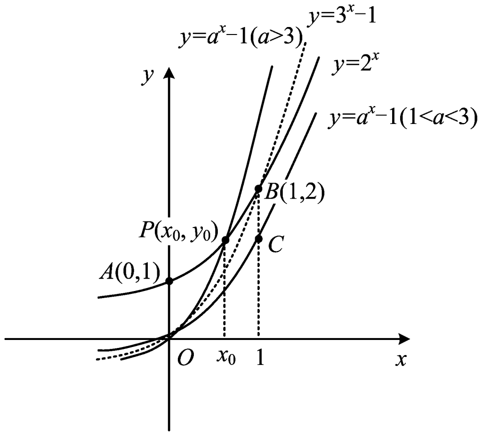

图 1.7

因为 $y = 3^x - 1$ 与 $y = 2^x$ 的图像相交于点 $B(1,2)$,于是对所有 $x > 1$,有 $3^x - 1 > 2^x$,所以 $a = 3$ 合乎条件.

当 $a > 3$ 时,对所有 $x > 1$,有 $a^x > 3^x$,于是

$$a^x - 1 > 3^x - 1 > 2^x,$$

所以 $a > 3$ 也合乎条件.

当 $1 < a < 3$ 时,$a^1 - 1 < 3^1 - 1$,于是 $y = a^x - 1(1 < a < 3)$ 的图像与直线 $x = 1$ 的交点 C 位于点 B 的下方,从而 $y = a^x - 1(1 < a < 3)$ 与 $y = 2^x$ 的图像的交点横坐标 $x_1 > 1$,所以 $1 < a < 3$ 不合乎条件.

最后,$0 < a \leqslant 1$ 显然不合乎条件,故 a 的取值范围是 $[3, +\infty)$.

例 7 设 $a > 0$,a、b、c 为实数,且 $a^2 - 2ab + c^2 = 0$,$bc > a^2$,求

证 $b>c>a$.

分析与解 视 a 为参数(未定常数),b、c 为变量(主元),则由

$$a^2-2ab+c^2=0,$$

得

$$b=\frac{c^2}{2a}+\frac{a}{2},$$

由此可知,点 $A(c,b)$在抛物线 $y=\frac{x^2}{2a}+\frac{a}{2}$上.

又由 $bc>a^2$可知,点 $A(c,b)$在双曲线 $xy=a^2$的上方.

因为抛物线与双曲线相交于点 $P(a,a)$,所以点 $A(c,b)$在抛物线位于点 P 上方的一段弧上(图 1.8).

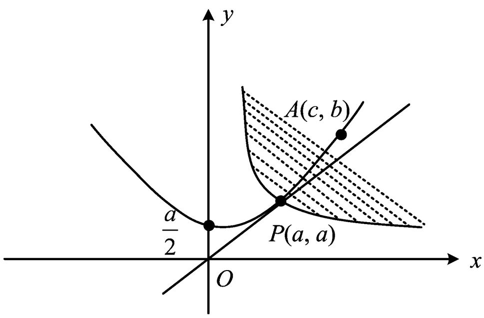

图 1.8

因为点 A 在P 上方,所以 $b=y_A>y_P=a$,又 $y=\frac{x^2}{2a}+\frac{a}{2}$在$(0,+\infty)$上是增函数,所以 $c=x_A>x_P=a$.

此外,方程 $x=\frac{x^2}{2a}+\frac{a}{2}$有两个相等的实根,所以直线 $y=x$ 与抛物线$y=\frac{x^2}{2a}+\frac{a}{2}$相切于点 P,故点 A 在直线$y=x$ 的上方,从而有 $b>c$,故 $b>c>a$.

下面介绍一个纯代数方法:先判断符号,由 $a^2-2ab+c^2=0$,

$a>0$,可知 $b>0$,再由 $bc>a^2$ 知 $c>0$.

由 $a^2-2ab+c^2=0$ 得 $2ab=a^2+c^2\geqslant 2ac$,可知 $b\geqslant c$.

若 $b=c$,则 $a=b=c$,与 $bc>a^2$ 矛盾,所以 $b>c$.再结合 $bc>a^2$,有 $b^2>bc>a^2$,所以 $b>a$.

下面判断 a、c 的大小.由两式消去 b(利用 $b>a$ 放缩消元),有 $0=a^2-2ab+c^2<a^2-2a^2+c^2=-a^2+c^2$,可知 $c>a$,故 $b>c>a$.

例 8 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant -1),\\ -\dfrac{1}{x} & (x<-1).\end{cases}$$

方程 $(f(x))^2+af(x)+b=0$ 恰有 3 个互异的实根,求 a 的取值范围和点 (a,b) 的轨迹.(原创题)

分析与解 对于方程

$$(f(x))^2+af(x)+b=0, \qquad ①$$

令 $t=f(x)$,则

$$g(t)=t^2+at+b=0, \qquad ②$$

于是 $\Delta=a^2-4b\geqslant 0$.

(1) 若 $\Delta=a^2-4b=0$,则方程②有两个相等的实根 $t=t_0$,但方程①有 3 个互异的实根,从而方程 $f(x)=t_0$ 有 3 个互异的实根.

作出 $y=f(x)$ 的图像(图 1.9).

显然,要使直线 $y=t_0$ 与 $y=f(x)$ 的图像有 3 个不同的交点,则 $0<t_0<1$.

因为 $t_0=-\dfrac{a}{2}$,得 $0<-\dfrac{a}{2}<1$,所以 $-2<a<0$.

(2) 若 $\Delta=a^2-4b>0$,则方程②有两个不相等的实根 $t=t_1$、t_2,但方程①有 3 个互异的实根,从而方程 $f(x)=t_1$ 与方程 $f(x)=t_2$ 共有 3 个互异的实根.

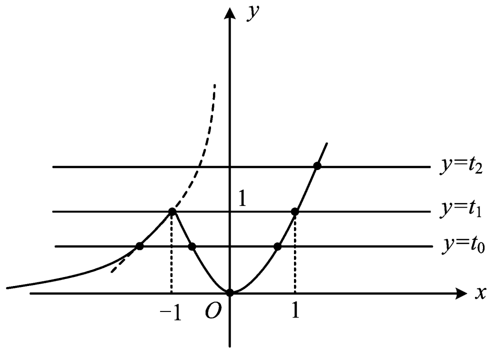

图 1.9

由图形可知，要使两直线 $y=t_1$、$y=t_2$ 与 $y=f(x)$ 的图像有 3 个不同的交点，则 $t_1=1$，$t_2=0$ 或 $t_1=1$，$t_2>1$.

由 $t_1=1$ 得 $g(1)=0$，所以 $a+b=-1$.

① 若 $t_2=0$，则 $g(0)=0$，所以 $b=0$，此时 $a=-1$；

② 若 $t_2>1$，由于 $g(t)$ 图像的开口朝上，且 $g(1)=0$，所以 $-\dfrac{a}{2}>1$，此时 $a<-2$.

综上所述，a 的取值范围是 $a<0$ 且 $a\neq-2$.

点 (a,b) 的轨迹（图 1.10）为

$$b=\frac{a^2}{4}(-2<a<0),\ a+b=-1(a<-2)\text{ 及点}(-1,0).$$

例 9 设 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒成立不等式：$\left|\sqrt{1-x^2}-px-q\right|\leqslant\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，求实数 p、q.

分析与解 先去掉绝对值符号，将原不等式变形为

$$\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\leqslant px+q\leqslant\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

考察函数：

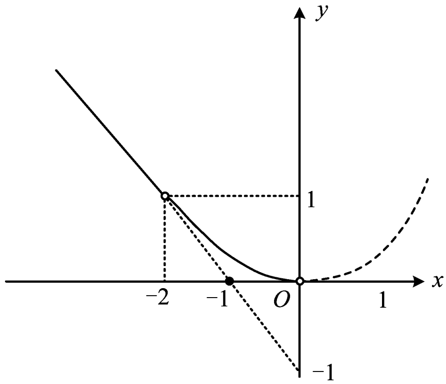

图 1.10

$$y_1 = \sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \quad y_2 = \sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2},$$

$$y_3 = px + q \quad (x \in [0,1]).$$

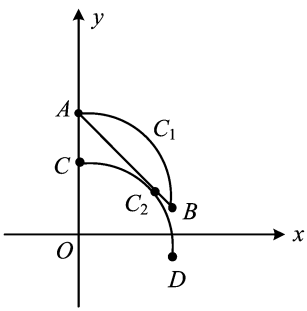

图 1.11

在同一坐标系内作出它们的图像(图 1.11),其中 y_1的图像 C_1是以 $A\left(0,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$, $B\left(1,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$为端点的$\frac{1}{4}$圆弧,$y_2$ 的图像 C_2 是以 $C\left(0,\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(1,\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$为端点的$\frac{1}{4}$圆弧,$y_3$的图像 C_3是以 $E(0,q)$,$F(1,p+q)$为端点的线段.

原问题等价于曲线 C_3介于曲线 C_1与 C_2之间,注意到线段 AB 与曲线C_2相切,但 AB 是介于C_1与 C_2之间的唯一线段,所以 E 与A 重合,F 与B 重合,即

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2} = q, \quad \frac{\sqrt{2}-1}{2} = p + q,$$

中国科学技术大学出版社中学数学用书

高中数学竞赛教程/严镇军　单墫　苏淳　等
中外数学竞赛/李炯生　王新茂　等
第 51—76 届莫斯科数学奥林匹克/苏淳　申强
全国历届数学高考题解集/张运筹　侯立勋
中学数学潜能开发/蒋文彬
名牌大学学科营与自主招生考试绿卡·数学真题篇/李广明　张剑
重点大学自主招生数学备考用书/甘志国

同中学生谈排列组合/苏淳
趣味的图论问题/单墫
有趣的染色方法/苏淳
组合恒等式/史济怀
集合/冯惠愚
不定方程/单墫　余红兵
概率与期望/单墫
组合几何/单墫
算两次/单墫
几何不等式/单墫
解析几何的技巧/单墫
构造法解题/余红兵
重要不等式/蔡玉书
高等学校过渡教材读本:数学/谢盛刚
有趣的差分方程(第 2 版)/李克正　李克大
抽屜原则/常庚哲
母函数(第 2 版)/史济怀

从勾股定理谈起(第 2 版)/盛立人　严镇军
三角恒等式及其应用(第 2 版)/张运筹
三角不等式及其应用(第 2 版)/张运筹
反射与反演(第 2 版)/严镇军
数列与数集/朱尧辰
同中学生谈博弈/盛立人
趣味数学 100 题/单墫
向量几何/李乔
面积关系帮你解题(第 2 版)/张景中
磨光变换/常庚哲
周期数列(第 2 版)/曹鸿德
微微对偶不等式及其应用(第 2 版)/张运筹
递推数列/陈泽安
根与系数的关系及其应用(第 2 版)/毛鸿翔
怎样证明三角恒等式(第 2 版)/朱尧辰
帮你学几何(第 2 版)/臧龙光
帮你学集合/张景中
向量、复数与质点/彭翕成
初等数论/王慧兴
漫话数学归纳法(第 4 版)/苏淳
从特殊性看问题(第 4 版)/苏淳
凸函数与琴生不等式/黄宣国
国际数学奥林匹克 240 真题巧解/张运筹
Fibonacci 数列/肖果能
数学奥林匹克中的智巧/田廷彦
极值问题的初等解法/朱尧辰
巧用抽屉原理/冯跃峰

学数学.第 1 卷/李潜
学数学.第 2 卷/李潜
学数学.第 3 卷/李潜