

高校核心课程学习指导丛书

◀ 徐森林 薛春华 / 编著

泛函分析学习指导

FANHAN FENXI
XUEXI ZHIDAO ▶

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是引导学生对泛函分析深入学习、研究的入门书,通过一系列例题论述了线性基的维数;描述了准赋范线性空间与赋范线性空间之间的差异;以及判断赋范线性空间为内积空间的平行四边形法则;给出了赋范线性空间有限维与无限维差异方面的一个判定准则.我们还证明了 $\mathbf{R}^n$ 是局部列紧的,而 $\mathcal{L}^p([0,1])$ ($p \geq 2$)不是局部列紧的,它们在拓扑上有本质的区别;论述了具有不动点性质的各种典型拓扑空间;详细证明了开映射定理、Banach 逆算子定理、共鸣定理和著名的闭值域定理;最后,还深入研究了全连续(紧)算子谱理论的 Riesz-Schauder 理论.

本书可作为理工科大学、师范大学、师范学院数学系学生的入门参考书,也可作为大学数学教师与数学工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析学习指导/徐森林,薛春华编著. —合肥:中国科学技术大学出版社, 2016.4

(高校核心课程学习指导丛书)

ISBN 978-7-312-03870-9

I. 泛… II. ① 徐… ② 薛… III. 泛函分析—高等学校—教学参考资料
IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 071644 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
印刷 合肥学苑印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×960 mm 1/16
印张 16
字数 305 千
版次 2016 年 4 月第 1 版
印次 2016 年 4 月第 1 次印刷
印数 1—2500 册
定价 35.00 元

前 言

我们知道,参考文献[2-5]都是国内各有特色的泛函分析教科书.这本《泛函分析学习指导》不是教科书,而是一本引导学生对泛函分析深入学习、研究的入门书,以例题的方式论述线性基的维数,描述赋范线性空间与赋范线性空间之间的差异,以及判断赋范线性空间为内积空间的平行四边形法则,并给出赋范线性空间的有限维与无限维差异方面的一个判定准则.题 1.4.17 指出 $\mathbf{R}^n$ 是局部列紧的,而 $\mathcal{L}^p([0,1])$ ($p \geq 2$) 不是局部列紧的,这表明 $\mathcal{L}^p([0,1])$ 与 $\mathbf{R}^n$ 在拓扑上有本质的区别.1.7 节给出了具有不动点性质的各种典型拓扑空间.2.2 节深入研究了开映射定理、Banach 逆算子定理和共鸣定理等重要定理.2.3 节详细论证了著名的闭值域定理.最后,在 2.5 节深入研究了全连续(紧)算子谱理论的 Riesz-Schauder 理论.本书在上述内容的各个点上吸收了文献[2-5]的优点,并给出了一种深入描述和补充,使读者阅读后能获得更多的知识,更清晰地理解有关的概念、定理与方法.在此基础上,读者定会培养出能力去进一步学习、探讨、研究泛函分析高层次的内容.

作者曾在中国科学技术大学数学系、少年班多次开设过“泛函分析”这门课,特别是受统计与金融系缪柏其主任的邀请,在该系讲授了这门重要的基础课,得到了全体学生的热烈欢迎.

徐森林

2015 年 12 月 12 日

中国科学技术大学数学系

目 次

前言	(i)
第 1 章 线性空间、赋范线性空间、Banach 空间与 Hilbert 空间	(1)
1.1 线性空间、线性基和维数	(1)
1.2 赋范线性空间、Banach 空间	(8)
1.3 内积空间、Hilbert 空间	(28)
1.4 $\mathcal{L}^p(E)$ 空间与 l^p 空间	(52)
1.5 $\mathcal{L}^2(E)$ 空间、 l^2 空间	(83)
1.6 A_2 空间、可分空间、Lindelöf 空间、紧性空间	(102)
1.7 不动点定理	(122)
第 2 章 连续(有界)线性算子、全连续(紧)算子的谱理论	(138)
2.1 连续(有界)线性算子与线性泛函	(138)
2.2 开映像定理、Banach 逆算子定理、共鸣定理	(158)
2.3 正规能解算子	(178)
2.4 线性算子的谱	(196)
2.5 全连续算子(致密算子、紧算子)及其谱	(222)
参考文献	(248)

第 1 章 线性空间、赋范线性空间、Banach 空间与 Hilbert 空间

本章主要引入线性空间、赋范线性空间、Banach 空间和 Hilbert 空间等重要而又抽象的概念;进而研究线性基及其维数;刻画由范数诱导的度量与一般度量之间的差异;继而又刻画有限维与无限维赋范线性空间各自的特性;证明重要的 F. Riesz 定理;描述模空间与内积空间的联系与差别(其差别在于是否满足平行四边形法则);证明了规范正交、封闭、完全、Parseval 等式成立的彼此等价性.

本章特别研究了两个重要的 $\mathcal{L}^p(E)$ 空间与 l^p 空间,给出了重要的 Hölder 不等式、Cauchy-Schwarz 不等式以及 Minkowski 不等式;还给出了 Hilbert 空间 $\mathcal{L}^2(E)$ 与 l^2 的完全规范正交系的各种等价条件;特别给出了 $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mathbf{R})$ 中实三角函数系 $T_{\mathbf{R}}$ 与 $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mathbf{C})$ 中复三角函数系 $T_{\mathbf{C}}$ 的相互关联的定理. 1.6 节还研究了赋范线性空间的拓扑性质(A_2 性、可分性及各种紧性). 1.7 节中展示了若干特殊空间中的不动点定理.

这一章列举了大量有用的正面的实例和反例,是为了让读者更好地理解上面提到的重要概念、定理及方法.

最后,要特别提到的是题 1.2.4 与题 1.2.5 中有限维赋范空间与无限维赋范空间的本质区别;题 1.4.7 表明 $\mathcal{L}^p([0, 1])$ 与 $\mathbf{R}^n$ 有明显的区别,前者不是局部列紧的,而后者却是局部列紧的. 对于这种区别的深入挖掘尤为重要!

1.1 线性空间、线性基和维数

有限维线性空间中的概念、定理和思考方法是继续深入研究的平台,我们将引进线性空间、线性基和维数等重要概念. 一方面,给出了一般(有限维和无限维)线性空间的一些定理,并应用与有限维线性空间相同或类似的方法加以详细的论述;另一方面,应用 Zorn 引理(等价于选择公理)证明了线性基的存在性;再根据无限集 B 关于势 $|B|$ 的重要性质 $|B| \cdot \aleph_0 = |B|$ (其中 $\aleph_0$ 为可数集的势),推出了任何

两个线性基的势是相等的,从而证明了线性空间维数的定义是合理的.

定义 1.1.1 设 $\mathcal{X}$ 为一个非空集, K 为实数域 ($K = \mathbf{R}$) 或复数域 ($K = \mathbf{C}$).

(1) $\mathcal{X}$ 为一个加群(即为交换群),即对 $\forall x, y \in \mathcal{X}, \exists u \in \mathcal{X}$, 记 $u = x + y$, 称之为 x 与 y 的和, 适合:

$$x + y = y + x \text{ (加法交换律),}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \text{ (加法结合律), } \forall z \in \mathcal{X},$$

$$\exists_1 \text{ (存在唯一) 零向量 } \theta \in \mathcal{X}, \text{ s.t. } x + \theta = \theta + x, \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

$$\text{对 } \forall x \in \mathcal{X}, \exists_1 y, \text{ s.t. } x + y = \theta, \text{ 记 } y = -x.$$

(2) 对 $\forall (\alpha, x) \in K \times \mathcal{X}, \exists u \in \mathcal{X}$, 记 $u = \alpha \cdot x$, 称之为 x 对 α 的数乘(常省去“ $\cdot$ ”), 适合:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in \mathcal{X},$$

$$1 \cdot x = x,$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in \mathcal{X},$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall x, y \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in K,$$

如果 $\mathcal{X}$ 满足(1)和(2), 则称 $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ 为线性(或向量或矢量)空间. 元素 $x \in \mathcal{X}$ 称为向(或矢)量.

设 $E \subset \mathcal{X}$. 若 E 按 $\mathcal{X}$ 上的加法与数乘仍构成一个线性空间, 则称 $(E, +, \cdot)$ 为 $(\mathcal{X}, +, \cdot)$ 的一个线性(或向量或矢量)子空间.

$\mathcal{X}$ 与 $\{\theta\}$ 都是 $\mathcal{X}$ 的线性子空间, 称它们为平凡子空间. 而称其他的子空间为真子空间.

设有一组向量 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{X}$. 如果存在 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset K$ 且 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 不全为零, 使得

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0,$$

则称 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是线性相关的; 否则(即若 $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0$, 则 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 必全为 0) 称 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 是线性无关的.

设 $A \subset \mathcal{X}$ 为一个极大线性无关向量组, 即 A 中任意有限个向量是线性无关的, 而且 $\forall x \in \mathcal{X}$ 都是 A 中若干有限个向量的线性组合, 则称 A 为 $\mathcal{X}$ 的一组线性基. 线性基又称为 Hamel 基. 题 1.1.2 表明线性空间总存在线性基.

线性空间 $\mathcal{X}$ 中的线性基的元素个数(势或基数), 称为该线性空间的维数, 记作 $\dim \mathcal{X}$. 仅由 θ 组成的线性空间, 称为零维线性空间, 即 $\dim \{\theta\} = 0$. 题 1.1.3 表明线性基的维数是确定的, 不因选取不同的线性基而改变. 如果线性基的个数有限(如 n

维), 则称它为有限维(n 维)线性空间. 显然, 同维的两个线性空间 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 是彼此线性同构的: 设 $\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 与 $\{y_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 分别为 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 的线性基, 令 $\varphi(x_\lambda) = y_\lambda$,

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^n a_{x_j} y_{\lambda_j}\right) = \sum_{j=1}^n a_{x_j} y_{\lambda_j},$$

则

$$\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$$

为一一映射, 且

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2),$$

$$\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x),$$

其中 $x_1, x_2, x \in \mathcal{X}, \alpha \in K$, 即 φ 为线性同构.

设 $\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ (Λ 为指标集) 为 $\mathcal{X}$ 中的向量族. 一切由 $\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 的有限线性组合构成的向量族

$$\left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j x_{\lambda_j} \mid \lambda_j \in \Lambda, \alpha_j \in K, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

称为 $\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 的**线性包**, 它是 $\mathcal{X}$ 的一个线性子空间. 显然, 它是包含 $\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 的一切线性子空间的交. 因此, 称该线性包为由 $\{x_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 张成的线性子空间, 记作

$$\text{Span}\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

设 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 为 $\mathcal{X}$ 的线性子空间, 我们称集合

$$\{x_1 + x_2 + \dots + x_n \mid x_j \in E_j, j = 1, 2, \dots, n\}$$

为 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 的**线性和**, 记为 $E_1 + E_2 + \dots + E_n$.

如果 $\forall x \in E_1 + E_2 + \dots + E_n$ 都有唯一的分解:

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

其中 $x_j \in E_j (j = 1, 2, \dots, n)$, 则称线性和 $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ 为**直接和**, 记作 $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$. 直和的等价定义见题 1.1.1.

设 $E \subset \mathcal{X}$. 若存在 $x_0 \in \mathcal{X}$ 及线性子空间 $E_0 \subset \mathcal{X}$, s. t. $E = E_0 + x_0 = \{x + x_0 \mid x \in E_0\}$, 则称 E 为**线性流形**. 几何上, 线性流形就是线性子空间对某个向量的平移.

习 题

【1.1.1】 以下四条等价:

- (1) 线性和 $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ 为直和 $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$;
- (2) 零向量 $\theta \in E_1 + E_2 + \dots + E_n$ 有唯一分解: $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n$, 其中 $\theta_j = \theta \in E_j (j = 1, 2, \dots, n)$;

(3) 对 $\forall \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, \{j_1, j_2, \dots, j_l\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, 且 $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_l\} = \emptyset (k \geq 1, l \geq 1)$, 有

$$(E_{i_1} + E_{i_2} + \dots + E_{i_k}) \cap (E_{j_1} + E_{j_2} + \dots + E_{j_l}) = \{\theta\}.$$

(4) 对 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中任何 $k \geq 1$ 个元素 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 以及 $x_{i_j} \in E_{i_j} - \{\theta\} (j = 1, 2, \dots, k)$, $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ 必线性无关. 特别地, 当 $n = 2$ 时, 对 $\forall x_1 \in E_1 - \{\theta\}, x_2 \in E_2 - \{\theta\}$, x_1 与 x_2 必线性无关.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 根据直和的定义与 $\theta \in E_1 + E_2 + \dots + E_n$, 有

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n, \quad \theta_j = \theta, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

(1) $\Leftarrow$ (2) 对 $\forall x \in E_1 + E_2 + \dots + E_n$, 设

$y_1 + y_2 + \dots + y_n = x = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \quad x_j, y_j \in E_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$
则

$$(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \dots + (y_n - x_n) = \theta.$$

根据(2), 零向量 θ 有唯一分解: $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n, \theta_j = \theta \in E_j (j = 1, 2, \dots, n)$, 故

$$y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \dots = y_n - x_n = \theta,$$

即

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n.$$

这就证明了 x 有唯一分解, 从而线性和 $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ 为直和, 即 $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$.

(1) $\Rightarrow$ (3) (反证) 假设 $\exists x \in (E_{i_1} + E_{i_2} + \dots + E_{i_k}) \cap (E_{j_1} + E_{j_2} + \dots + E_{j_l})$, 且 $x \neq \theta$, 而 $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_l\} = \emptyset$, 则

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} = x = x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_l},$$

其中, $x_{i_s} \in E_{i_s} (s = 1, 2, \dots, k), x_{j_t} \in E_{j_t} (t = 1, 2, \dots, l)$. 这就表明了 x 有两个不同的分解, 它与(1)中 $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ 为直和 $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ 相矛盾.

(1) $\Leftarrow$ (3) (反证) 假设 $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ 不为直和, 则必有 $x \in E_1 + E_2 + \dots + E_n$, 它有两种不同的分解:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = x = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

而 $y_{i_0} \neq x_{i_0}, i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$. 于是

$$(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \dots + (y_{i_0} - x_{i_0}) + \dots + (y_n - x_n) = \theta,$$

$$y_{i_0} - x_{i_0} = -[(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \dots + (y_{i_0-1} - x_{i_0-1})$$

$$+ (y_{i_0+1} - x_{i_0+1}) + \dots + (y_n - x_n)]$$

$$\in E_{i_0} \cap (E_1 + E_2 + \dots + E_{i_0-1} + E_{i_0+1} + \dots + E_n),$$

且 $y_{i_0} - x_{i_0} \neq 0$, 这与(3)相矛盾.

(1) $\Rightarrow$ (4) (反证)假设 $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ 线性相关, 则有不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in K, s. t.$

$$\alpha_1 x_{i_1} + \alpha_2 x_{i_2} + \dots + \alpha_k x_{i_k} = \theta.$$

根据(1)与(2)(θ 分解的唯一性)立知 $\alpha_j x_{i_j} = \theta, \alpha_j = 0 (j = 1, 2, \dots, k)$, 这与上述 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 不全为零相矛盾.

(1) $\Leftarrow$ (4) (反证)假设线性和 $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ 不为直和, 则 $\exists x \in E_1 + E_2 + \dots + E_n$, 它的分解不唯一, 即 x 有两种不同的分解:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = x = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

故

$$(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \dots + (y_n - x_n) = \theta,$$

且恰有

$$y_{i_1} - x_{i_1} \neq \theta, y_{i_2} - x_{i_2} \neq \theta, \dots, y_{i_k} - x_{i_k} \neq \theta, \quad k \geq 2.$$

于是, 这 $k \geq 2$ 个非零向量线性相关, 它与(4)矛盾. $\square$

定义 1.1.2 设 X 为非空集合, $\leq$ 为一个关系. 对 $\forall x, y, z \in X$, 如果满足:

- (1) $x \leq x, \forall x \in X$ (自反性);
- (2) $x \leq y$, 且 $y \leq x \Rightarrow x = y$ (反对称性);
- (3) $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (传递性),

则称 $\leq$ 为 X 上的一个偏(半)序关系, $(X, \leq)$ 称为偏(半)序集. 如果该偏序关系还满足: 对 $\forall x, y \in X, x \leq y$ 与 $y \leq x$ 中至少有一个成立, 则称 $\leq$ 为序关系, 而 $(X, \leq)$ 为全序集.

设 $x \leq y$, 且 $x \neq y$, 则称 $x < y$. 设 $Y \subset X, y_0 \in X$. 如果对 $\forall y \in Y$, 必有 $y \leq y_0$, 则称 y_0 为 Y 的一个上界. 如果 $y_0 \in Y$, 则称 y_0 为 Y 的最大元. 类似可定义下界与最小元.

【1.1.2】 任何非 $\{\theta\}$ 的线性空间 $\mathcal{X}$ 必有线性基.

证明 因为 $\mathcal{X} \neq \{\theta\}$, 所以 $\mathcal{X}$ 中的线性无关组族 $\mathcal{A}$ 依包含关系构成一个偏(半)序线性无关组族, 并且每个全序线性无关组族有一个上界(这些无关组族的并). 依 Zorn 引理, 这个偏(半)序线性无关组族 $\mathcal{A}$ 有最大元, 最大元 S 就是 $\mathcal{X}$ 的线性基. 事实上, 显然 S 中任何有限个向量必定线性无关, 故 S 为线性无关集. 此外, 假设有 $x \in \mathcal{X}$, 使得 x 与 S 中任何有限线性无关组都线性无关, 则 $S \cup \{x\}$ 为包含 S 的更大的线性无关组, 这与 S 为极大元相矛盾. 这就表明: $\forall x \in \mathcal{X}$ 必与 S 中有限个向量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性相关, 即存在不全为零的 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K, s. t.$

$$\lambda_0 x + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0.$$

因为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 线性无关, 故 $\lambda_0 \neq 0$. 于是

$$x = - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_0} x_i,$$

这表明, S 为 $\mathcal{X}$ 的线性基. □

【1.1.3】 线性空间 $\mathcal{X}$ 的任何两个线性基是一一对应的, 即线性基的维数是确定的.

证明 设 B 和 H 是 $\mathcal{X}$ 的任何两个基.

如果 B 是有限的, 设 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, 则任何 $n+1$ 个向量是线性相关的. 若 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ 是这样一个集合, 每个 a_k 是 B 的线性组合, 记 $a_k = \sum_{r=1}^n t_{kr} b_r$. 考虑不全为 0 的数 $s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$, 满足方程

$$\sum_{k=1}^{n+1} s_k a_k = 0.$$

代替每个 a_k 的表示, 考查 B 的线性组合的方程:

$$\sum_{k=1}^{n+1} s_k a_k = \sum_{k=1}^{n+1} s_k \sum_{r=1}^n t_{kr} b_r = \sum_{r=1}^n b_r \left(\sum_{k=1}^{n+1} t_{kr} s_k \right) = 0.$$

为达到此目的, 寻找关于 $n+1$ 个未知量 $s_1, s_2, \dots, s_{n+1}$ 的 n 个方程:

$$\sum_{k=1}^{n+1} t_{kr} s_k = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n$$

就足够了. 但这总是有非零解的 (注意, 此处我们未用到 B 的线性无关性).

因此, 多于 n 个向量的集合总是线性相关的. 可见 H 至多是 n 维的. 如果在上面的论证中, 我们交换 B 和 H , 则 $\dim H \geq n$. 于是, $\dim H = n = \dim B$.

如果 B 是无限的, 每个 $b \in B$ 是 H 的一个线性组合, 因此, 有 H 的有限子集 H_b , 使得 b 是 H_b 的线性组合. H 的每个元素至少出现在一个 H_b 中, 即有 $\bigcup_{b \in B} H_b = H$. (若相反, 我们可以找到一个 $h \in H$, 它不在任何 H_b 中, 将得到下面的谬论: h 为 B 的线性组合, 设 $h = \sum_{k=1}^n t_k b_k$. 每个 b_k 为 H_{b_k} 的线性组合, 故每个 b_k 为 $\bigcup_{b \in B} H_b$ 的线性组合. 因此, h 为 $\bigcup_{b \in B} H_b$ 的线性组合. 这使得 h 为 $H - \{h\}$ 的线性组合, 它与 H 线性无关相矛盾.)

我们已证明了 H 为 B 的每个元素 b 相应的有限集合 H_b 的类的并, 即 $H = \bigcup_{b \in B} H_b$ (注意, B 的两个不同元素可以导致相同的集合 H_b , 但这不是实质的). 用

$|H|$ 表示 H 的势, 则有 $|H| = |\bigcup_{b \in B} H_b| \leq |B| \cdot \aleph_0$ (因为每个 H_b 是有限的, 故 $|H_b| < \aleph_0$, 其中 $\aleph_0$ 为可数集的势). 因为 B 为无限集, 故 $|B| \cdot \aleph_0 = |B|$ (参阅文献[7]69~71 页). 于是, $|H| \leq |B| \cdot \aleph_0 = |B|$. 再由对称性, 有 $|B| \leq |H|$. 根据参考文献[6]定理 1.2.5, 可知 $|B| = |H|$. $\square$

【1.1.4】 设 $\mathcal{X}$ 为线性空间, B 为其基, H_0 为 $\mathcal{X}$ 的任一线性无关的子集. 则势 $|H_0| \leq |B|$.

证明 当 $|B|$ 有限时, 由题 1.1.2 与 1.1.3 的证明, 知 $|H_0| \leq \dim B = |B|$. 当 $|B|$ 无限时, 令 $\mathcal{P}$ 为 $\mathcal{X}$ 的含 H_0 的线性无关的子集族, 它构成族 $\mathcal{A}$, 依包含关系取偏序集. 设 H 为 $\mathcal{A}$ 中的最大元. 显然, H 为 $\mathcal{A}$ 中所有集合的并. 则 H 为 $\mathcal{X}$ 的一个线性基 (参阅题 1.1.2 中的证明). 再根据题 1.1.3, 有

$$|H_0| \leq |H| = |B|. \quad \square$$

【1.1.5】 (1) $K^0 = \{\theta\}$, 则 $\mathcal{X}$ 的所有线性无关子集族 $\mathcal{P}$ 为空的, 因此, K^0 的线性基的维数零, 即 $\dim K^0 = 0$.

(2) 设 $K^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K, i = 1, 2, \dots, n\}$, $H = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 其中 $e_i = (0, 0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) (i = 1, 2, \dots, n)$. 显然, H 为 $\mathcal{X}$ 的线性无关子集, 且 $\forall x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$, 有

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

这表明 H 为 K^n 的一个基. 因此, $\dim K^n = n$.

(3) 设

$$e_i = (0, 0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots), \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$K^\infty = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \dots) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \mid \alpha_i \in K, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

显然, $H = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ 线性无关, 且 H 为 K^∞ 的一个线性基, $\dim K^\infty = \aleph_0$ (可数集的势).

如果视 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 为 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \dots)$, 则可视

$$K^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in K, i = 1, 2, \dots, n\}$$

为

$$\{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \dots) \mid \alpha_i \in K, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

并仍记后者为 K^n , 则 $K^n \subset K^\infty$.

(4) 设 $K^\omega = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \mid \alpha_n \in K, n = 1, 2, \dots\}$. 由行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j),$$

可知当 $t_i \neq t_j (i \neq j)$ 时, 上述行列式不为 0. 因此

$$\begin{aligned} & \lambda_1(1, t_1, t_1^2, \dots, t_1^{n-1}, \dots) + \lambda_2(1, t_2, t_2^2, \dots, t_2^{n-1}, \dots) + \cdots \\ & + \lambda_n(1, t_n, t_n^2, \dots, t_n^{n-1}, \dots) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0. \end{aligned}$$

这表明 $\{(1, t_1, t_1^2, \dots, t_1^{n-1}, \dots), (1, t_2, t_2^2, \dots, t_2^{n-1}, \dots), \dots, (1, t_n, t_n^2, \dots, t_n^{n-1}, \dots)\}$ 是线性无关的. 于是

$$H = \{(1, t, t^2, \dots, t^{n-1}, \dots) \mid 0 < t < 1\}$$

为 K^ω 中的线性无关子集. 从而, 势

$$\aleph = |(0, 1)| = |H|,$$

其中 $\aleph$ 为连续统的势 (即直线上 $(0, 1)$ 的势). 由题 1.1.3 知, 必有包含 H 的线性基 B , 推得

$$\aleph = |H| \leq |B| \leq |K^\omega| = \aleph^{\aleph_0} = \aleph.$$

根据 Cantor-Bernstein 定理 (定理 1.2.5),

$$\dim K^\omega = |B| = \aleph. \quad \square$$

注 因为 $(1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}, \dots) \in H$, 且该点与 H 是线性无关的, 故 H 不为 K^ω 的线性基.

1.2 赋范线性空间、Banach 空间

众所周知, n 维 Euclid 空间中的模 $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 具有三条性质, 我们将这三条性质附加到一般的线性空间, 使其成为赋范 (模) 空间. 线性空间中有了范数 (模) 自然就诱导出一个度量 $\rho(x, y) = \|x - y\|$. 下面我们来研究附加范数 (模) 结构后赋范线性空间丰富多彩的性质, 并刻画由范数 (模) 诱导的度量与一般的度量之间的差异; 最后刻画赋范线性空间是有限维的充要条件 (单位球面为列紧空间). 换言之, 赋范线性空间是无限维的充要条件是单位球面为非列紧空间.

定义 1.2.1 设 $\mathcal{X}$ 为线性空间, 函数 $\rho: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$ 满足:

- (1) $\rho(x, y) \geq 0 (\forall x, y \in \mathcal{X}), \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (正定性);
 (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) (\forall x, y \in \mathcal{X})$ (对称性);
 (3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) (\forall x, y, z \in \mathcal{X})$ (三点不等式),

则称 ρ 为 $\mathcal{X}$ 上的一个度量(或距离), 而 $(\mathcal{X}, \rho)$ 称为 $\mathcal{X}$ 上的一个度量(距离)空间.

定义 1.2.2 设 $\mathcal{X}$ 为线性空间, 若函数 $\|\cdot\|: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$ 满足:

- (1) $\|x\| \geq 0 (\forall x \in \mathcal{X}), \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
 (2) $\|-x\| = \|x\| (\forall x \in \mathcal{X})$;
 (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| (\forall x, y \in \mathcal{X})$;
 (4) $\lim_{\|x_n\| \rightarrow 0} \|\alpha x_n\| = 0, \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \|\alpha_n x\| = 0 (\forall x \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in K)$,

则称 $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ 为赋准范(线性)空间, 也称为 F^* 空间, 此时, $\rho(x_n, x) = \|x_n - x\| \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$ 定义为 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow +\infty)$. 完备的 F^* 空间称为 Frechet 空间. $\|\cdot\|$ 称为 $\mathcal{X}$ 上的准范数(准模).

如果令 $\rho(x, y) = \|x - y\|$, 则由定义 1.2.2 中的条件(1)~(3), 立知 ρ 为 $\mathcal{X}$ 上的一个度量或距离, 且具有平移不变性和加法连续性. 再由(4), 立知它还具有数乘的连续性(参阅题 1.2.1).

定义 1.2.3 设 $\mathcal{X}$ 为线性空间, 若函数 $\|\cdot\|: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$ 满足:

- (1) $\|x\| \geq 0 (\forall x \in \mathcal{X}), \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (正定性);
 (2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| (\forall \alpha \in K, \forall x \in \mathcal{X})$ (齐次性);
 (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| (\forall x, y \in \mathcal{X})$ (三角不等式),

则称 $\|\cdot\|$ 为 $\mathcal{X}$ 上的一个范数(模), 而 $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ 称为 $\mathcal{X}$ 上的一个赋范(线性)空间. 或 B^* 空间. 完备的 B^* 空间称为 B 空间, 或 Banach 空间.

显然, 范数必为准范数 ($0 \leq \|\alpha x_n\| = |\alpha| \|x_n\| \rightarrow 0 (\|x_n\| \rightarrow 0), 0 \leq \|\alpha_n x\| = |\alpha_n| \|x\| \rightarrow 0 (\|\alpha_n\| \rightarrow 0)$), 赋范空间必为赋准范空间, Banach 空间必为 Frechet 空间.

题 1.2.19 指出任何线性空间 $\mathcal{X}$ 都可赋予范数而成为赋范线性空间.

定义 1.2.4 设 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 为线性空间 $\mathcal{X}$ 上的两个范数.

如果

$$\|x_n\|_2 \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty) \Rightarrow \|x_n\|_1 \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty),$$

则称 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强. 它等价于: $\exists C > 0, \text{ s. t. } \|x\|_1 \leq C \|x\|_2, \forall x \in \mathcal{X}$ (见题 1.2.17(1)).

如果 $\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强, 而 $\|\cdot\|_1$ 又比 $\|\cdot\|_2$ 强, 则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价的. 它等价于: $\exists C_1, C_2 > 0, \text{ s. t. } C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1, \forall x \in \mathcal{X}$ (见题 1.2.17(2)).

习 题

【1.2.1】 (1) 若 $\|\cdot\|: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$ 为线性空间 $\mathcal{X}$ 上的准范数(准模), 则

$$\rho: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \rho(x, y) = \|x - y\| = \rho(x - y, \theta)$$

为 $\mathcal{X}$ 上的一个度量(距离), 且满足:

(a) (距离的平移不变性) $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y) (\forall x, y, z \in \mathcal{X})$. 由此推得 ρ 对加法是连续的:

$$\left. \begin{array}{l} \rho(x_n, x) \rightarrow 0 \\ \rho(y_n, y) \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho(x_n + y_n, x + y) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

(b) (数乘的连续性)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x_n, x) \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(\alpha x_n, \alpha x) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty, \forall \alpha \in K; \\ \alpha_n \rightarrow \alpha (\text{在 } K \text{ 中}) \Rightarrow \rho(\alpha_n x, \alpha x) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty, \forall x \in \mathcal{X}. \end{array} \right.$$

(2) 反之, 一个度量 $\rho: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$ 满足距离的平移不变性和数乘的连续性, 则

$\|\cdot\|: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \|x\| = \rho(x, \theta) (\|x - y\| = \rho(x - y, \theta) \xrightarrow{\text{平移不变性}} \rho(x - y + y, \theta + y) = \rho(x, y))$ 必为 $\mathcal{X}$ 上的一个准范数.

证明 (1) (a) 在准范数 $\|\cdot\|$ 下, 有

$$\begin{aligned} \rho(x + z, y + z) &= \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| \\ &= \rho(x, y), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

所以距离 ρ 具有平移不变性. 由

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho(x_n + y_n, x + y) \xrightarrow{\text{平移不变性}} \rho(x_n + y_n - x - y, \theta) \\ &= \|x_n + y_n - x - y\| = \rho(x_n - x, y - y_n) \\ &\leq \rho(x_n - x, \theta) + \rho(y - y_n, \theta) \\ &\xrightarrow{\text{平移不变性}} \rho(x_n, x) + \rho(y, y_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

再根据夹逼定理, 推得

$$\rho(x_n + y_n, x + y) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

这就证明了 ρ 对加法是连续的.

(b) 由 $\|x_n - x\| = \rho(x_n, x) \rightarrow 0$, 知

$$\rho(\alpha x_n, \alpha x) = \|\alpha x_n - \alpha x\| = \|\alpha(x_n - x)\| \xrightarrow{\text{准范数(4)}} 0, \quad \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

由 $\alpha_n \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$, 知

$$\rho(\alpha_n x, \alpha x) = \|\alpha_n x - \alpha x\| = \|(\alpha_n - \alpha)x\| \xrightarrow{\text{准范数(4)}} 0, \quad \alpha_n - \alpha \rightarrow 0.$$

从而得到数乘的连续性.

(2) 距离公理 $\Leftrightarrow$ 准范数 $\| \cdot \|$ 的条件:

$$\rho(x, y) \geq 0 (\forall x, y \in \mathcal{X}) \Leftrightarrow \|x\| \geq 0 (\forall x \in \mathcal{X}),$$

$$\rho(x, y) = 0 \text{ 当且仅当 } x = y \Leftrightarrow \|x\| = 0 \text{ 当且仅当 } x = \theta,$$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) \Leftrightarrow \| -x \| = \| x \|,$$

$$\begin{aligned} \| -x \| &= \rho(-x, \theta) \xrightarrow{\text{平移不变性}} \rho(-x + x, \theta + x) \\ &= \rho(\theta, x) = \rho(x, \theta) = \|x\|, \end{aligned}$$

$$\rho(x_n, x) \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(\alpha x_n, \alpha x) \rightarrow 0 (\forall \alpha \in K)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\|x_n\| \rightarrow 0} \|\alpha x_n\| = 0 (\forall x \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in K),$$

$$\alpha_n \rightarrow \alpha \Rightarrow \rho(\alpha_n x, \alpha x) \rightarrow 0 (\forall x \in \mathcal{X}) \Leftrightarrow \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \|\alpha_n x\| = 0.$$

这就证明了题中余下的结论. $\square$

【1.2.2】 (参阅参考文献[2]19 页定理 1) 如果线性空间 $\mathcal{X}$ 上的度量(距离) ρ 对加法和数乘连续(称 $(\mathcal{X}, \rho)$ 为度量(距离)线性空间), 则可以改赋一个等价的平移不变度量(距离) ρ_1 . 换句话说, 设 ρ 为原来的度量(距离), 可以找到一个新的度量(距离) ρ_1 , 使得

$$\rho(x_n, x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho_1(x_n, x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

而且

$$\rho_1(x + z, y + z) = \rho_1(x, y), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{X}.$$

证明 依加法的连续性可知, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 必有 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\rho(x, \theta) < \delta, \rho(y, \theta) < \delta \Rightarrow \rho(x + y, \theta) < \varepsilon.$$

这正表达了 $\rho(x_n, \theta) \rightarrow 0, \rho(y_n, \theta) \rightarrow 0 \Rightarrow \rho(x_n + y_n, \theta) \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$. 令

$$\delta_n = \min \left\{ \frac{\delta_{n-1}}{3}, \delta(\delta_{n-1}) \right\},$$

$$U_n = \{x \mid \rho(x, \theta) < \delta_n, \rho(-x, \theta) < \delta_n\},$$

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$

定义

$$U\left(\frac{1}{2^n}\right) = U_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则 $U_1 \supset U_2 \supset \dots$, 即 $U\left(\frac{1}{2}\right) \supset U\left(\frac{1}{2^2}\right) \supset \dots$. 并且递归地将 $U(\cdot)$ 的定义延拓到任意

二进分数上去. 为此, 设 $U\left(\frac{\tau}{2^m}\right)$ 已定义, 这里 τ 为正整数. 令

$$U\left(\frac{2\tau+1}{2^{m+1}}\right) = U\left(\frac{\tau}{2^m}\right) + U\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right).$$

又定义 $U(\tau) = \mathcal{D}(\forall \tau \geq 1)$. 于是, $U(s)$ 对于任意二进分数 s 有意义. 显然,

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n &\Leftrightarrow x \in U_n \quad (n = 1, 2, \dots) \\ &\Leftrightarrow \rho(x, \theta) < \delta_n, \rho(-x, \theta) < \delta_n \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

根据 $U(\cdot)$ 的定义及 $U_n = -U_n$, 立即可有

$$-U(\tau) = U(\tau);$$

进而, 对二进分数

$$\tau = \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_1}} + \dots + \frac{1}{2^{n_p}} \quad (n_0 < n_1 < \dots < n_p \text{ 都是正整数}),$$

由 $U(\cdot)$ 的定义, 得到

$$U(\tau) = U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) + U\left(\frac{1}{2^{n_1}}\right) + \dots + U\left(\frac{1}{2^{n_p}}\right).$$

下证:

- (a) $\tau > \zeta$ (ζ 为二进分数) $\Rightarrow U(\tau) \supset U(\zeta)$;
 - (b) $U(\tau) + U(\zeta) \subset U(\tau + \zeta)$, 其中 τ, ζ 为二进分数.
- (a) 设

$$\tau = \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{1}{2^{n_1}} + \dots + \frac{1}{2^{n_p}}, \quad \zeta = \frac{1}{2^{m_0}} + \frac{1}{2^{m_1}} + \dots + \frac{1}{2^{m_q}},$$

这里 $n_0 < n_1 < \dots < n_p, m_0 < m_1 < \dots < m_q$ 都是正整数. 由于 $\tau > \zeta$, 故第一对不相同的 n_i, m_i 必满足 $m_i > n_i$. 从而

$$\begin{aligned} U(\tau) &= U\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) + U\left(\frac{1}{2^{n_1}}\right) + \dots + U\left(\frac{1}{2^{n_p}}\right) \\ &= U\left(\frac{1}{2^{m_0}}\right) + \dots + U\left(\frac{1}{2^{m_{i-1}}}\right) + U\left(\frac{1}{2^{n_i}}\right) + \dots + U\left(\frac{1}{2^{n_p}}\right) \\ &\supset U\left(\frac{1}{2^{m_0}}\right) + \dots + U\left(\frac{1}{2^{m_{i-1}}}\right) + U\left(\frac{1}{2^{n_i}}\right) \\ &\supset U\left(\frac{1}{2^{m_0}}\right) + \dots + U\left(\frac{1}{2^{m_{i-1}}}\right) + U\left(\frac{1}{2^{m_i}}\right) + \dots + U\left(\frac{1}{2^{m_q}}\right) = U(\zeta). \end{aligned}$$

- (b) 首先, 当正整数 $m > n$ 时, 必有

$$U\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m}\right) = U\left(\frac{1}{2^n}\right) + U\left(\frac{1}{2^m}\right);$$

其次, 对正整数 m ,

$$\begin{aligned}
 x, y \in U\left(\frac{1}{2^m}\right) = U_m &\Leftrightarrow \rho(x, \theta) < \delta_m, \rho(-x, \theta) < \delta_m, \\
 &\rho(y, \theta) < \delta_m, \rho(-y, \theta) < \delta_m \\
 &\Rightarrow \rho(x + y, \theta) < \delta_{m-1}, \rho(-x - y, \theta) < \delta_{m-1} \\
 &\Leftrightarrow x + y \in U_{m-1} = U\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right),
 \end{aligned}$$

即

$$U\left(\frac{1}{2^m}\right) + U\left(\frac{1}{2^m}\right) \subset U\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right) = U\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m}\right).$$

于是, 当

$$\begin{aligned}
 \tau &= \frac{1}{2^{n_0}} + \cdots + \frac{1}{2^{n_{p-1}}} + \frac{1}{2^{n_p}}, \\
 \zeta &= \frac{1}{2^{m_0}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_{q-1}}} + \frac{1}{2^{m_q}}, \quad m_q > n_p
 \end{aligned}$$

时, 必有

$$\begin{aligned}
 U(\tau + \zeta) &\stackrel{\text{定义}}{=} U\left(\tau + \zeta - \frac{1}{2^{m_q}}\right) + U\left(\frac{1}{2^{m_q}}\right) \\
 &\stackrel{\text{递归}}{\supset} U(\tau) + U\left(\zeta - \frac{1}{2^{m_q}}\right) + U\left(\frac{1}{2^{m_q}}\right) \\
 &= U(\tau) + U(\zeta);
 \end{aligned}$$

当 $m_q = n_p$ 时, 也有

$$\begin{aligned}
 U(\tau + \zeta) &= U\left(\tau + \zeta - \frac{1}{2^{m_q-1}} + \frac{1}{2^{m_q-1}}\right) \stackrel{\text{递归}}{\supset} U\left(\tau + \zeta - \frac{1}{2^{m_q-1}}\right) + U\left(\frac{1}{2^{m_q-1}}\right) \\
 &\stackrel{\text{递归}}{\supset} U\left(\tau - \frac{1}{2^{m_q}}\right) + U\left(\zeta - \frac{1}{2^{m_q}}\right) + U\left(\frac{1}{2^{m_q}}\right) + U\left(\frac{1}{2^{m_q}}\right) \\
 &= U(\tau) + U(\zeta).
 \end{aligned}$$

我们规定函数

$$f(x) = \inf\{\tau \mid U(\tau) \ni x\},$$

这里 τ 取遍二进分数. 于是 $0 \leq f(x) \leq 1, f(-x) = f(x), f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

对于 $\forall x, y \in \mathcal{X}$ 与 $\forall m \in \mathbf{N}^*$ (正整数集), 存在二进分数 τ, ζ , 使得

$$\begin{aligned}
 x \in U(\tau), \quad f(x) \leq \tau < f(x) + \frac{1}{2^{m+1}}, \\
 y \in U(\zeta), \quad f(y) \leq \zeta < f(y) + \frac{1}{2^{m+1}},
 \end{aligned}$$

从而

$$x + y \in U(\tau) + U(\zeta) \subset U(\tau + \zeta),$$

$$f(x + y) \leq \tau + \zeta < f(x) + f(y) + \frac{1}{2^m}.$$

由于 m 是任意的,我们就证明了

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

由上式及 $f(-x) = f(x)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$, 立即推得

$$\rho_1(x, y) = f(x - y)$$

在 $\mathcal{X}$ 上确定了一个度量(距离).

最后,如果 $\rho(x_k, x) \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$, 则由加法的连续性, 推出 $\rho(x_k - x, \theta) = \rho(x_k + (-x), x + (-x)) \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$. 再由数乘的连续性, 知 $\rho(-(x_k - x), \theta) \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$. 从而, 对 $\forall n \in \mathbf{N}, \exists k_0 \in \mathbf{N}, \text{ s. t. } k > k_0 \Rightarrow x_k - x \in U\left(\frac{1}{2^n}\right)$. 这就意味着

$$k > k_0 \Rightarrow \rho_1(x_k, x) < \frac{1}{2^{n-1}},$$

即 $\rho_1(x_k, x) \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$. 反之, 如果 $\rho_1(x_k, x) \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$,

$$k > k_0 \Rightarrow \rho_1(x_k, x) < \frac{1}{2^{n-1}},$$

则必存在 $\tau < \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ s. t. } x_k - x \in U(\tau)$. 从而

$$x_k - x \in U(\tau) \subset U\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = U_{n-1}.$$

因此

$$k > k_0 \Rightarrow \rho(x_k - x, \theta) < \delta_{n-1}.$$

即 $\rho(x_k, x) \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$. 这就证明了

$$\rho(x_k, x) \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow \rho_1(x_k, x) \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty),$$

即 ρ 与 ρ_1 为等价的度量.

由于 $\rho_1(x, y) = f(x - y)$, 所以显然

$$\rho_1(x + z, y + z) = f((x + z) - (y + z)) = f(x - y) = \rho_1(x, y),$$

即 $\mathcal{X}$ 上的原来度量(距离) $\rho(x, y)$ 等价于一个不变距离 $\rho_1(x, y)$.

根据题 1.2.1, 立即可定义一个准范数

$$\|x\| = \rho_1(x, \theta) = f(x - \theta) = f(x),$$

它满足准范数的那些条件. □

注 (1) 如果题 1.2.2 中的条件“ ρ 关于数乘连续”改为“ $\rho(x_n, \theta) \rightarrow 0 \Rightarrow$

$\rho(-x_n, \theta) \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$ ”,而其他条件不变,则按上面的证明题 1.2.2 中的结论仍成立,即 ρ 等价于一个平移不变距离 ρ_1 . 由此立即有

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x) \rightarrow 0 &\Rightarrow \rho_1(x_n, x) \rightarrow 0 \Rightarrow \rho_1(\alpha x_n, \alpha x) \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \rho(\alpha x_n, \alpha x) \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty), \forall \alpha \in K, \\ &\quad \alpha_n \rightarrow \alpha (\text{在 } K \text{ 中}) \\ &\Rightarrow \rho_1(\alpha_n x, \alpha x) \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \rho(\alpha_n x, \alpha x) \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty), \forall x \in \mathcal{X}.\end{aligned}$$

这就证明了 ρ 关于数乘连续.

(2) 设 ρ 为线性空间 $\mathcal{X}$ 上的度量(距离),且 ρ 关于加法连续,仅由此是否能推得“ $\rho(x_n, 0) \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty) \Rightarrow \rho(-x_n, 0) \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty)$ ”? 换句话说,题 1.2.2 中的条件只是“ ρ 关于加法连续”,结论成立吗? 即 ρ 等价于一个不变距离 ρ_1 吗?

【1.2.3】 设 $\mathcal{X} = \mathbf{R}$ 为实线性空间. 当 $x \leq y$ 时,令

$$\rho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & x, y \in [-1, 1], \\ 2|x - y|, & x, y \in (-\infty, -1) \text{ 或 } x, y \in (1, +\infty), \\ 2|x + 1| + |-1 - y|, & x \in (-\infty, -1), y \in [-1, 1], \\ |x - 1| + 2|1 - y|, & x \in [-1, 1], y \in (1, +\infty), \\ 2|x + 1| + |-1 - 1| + 2|1 - y|, & x \in (-\infty, -1), y \in (1, +\infty); \end{cases}$$

当 $x \geq y$ 时,再令 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

显然, ρ 为 $\mathcal{X} = \mathbf{R}$ 上关于加法和数乘都连续的度量(距离),而度量(距离)不是平移不变的,例如

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) &= \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{4} = 2 \left|\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right| \\ &= \rho\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) = \rho\left(\frac{1}{4} + 1, \frac{1}{2} + 1\right).\end{aligned}$$

但是,根据题 1.2.2 知,必有一个等价于 ρ 的平移不变距离 ρ_1 .

【1.2.4】 以下几条是等价的:

- (1) B^* 空间 $\mathcal{X}$ 是有限维的;
- (2) $\mathcal{X}$ 的单位球面

$$S_1 = \{x \in \mathcal{X} \mid \|x\| = 1\}$$

是列紧的;

- (3) $\mathcal{X}$ 的任一有界闭集 A 是列紧的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 因为 B^* 空间 $\mathcal{X}$ 是有限维的,根据题 1.2.6 知, $\mathcal{X}$ 与通常的

参 考 文 献

- [1] 关肇直. 泛函分析讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 1956.
- [2] 关肇直, 张恭庆, 冯德兴. 线性泛函分析入门[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1979.
- [3] 夏道行, 吴作人, 严绍宗, 等. 实变函数论与泛函数分析: 下册[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1985.
- [4] 江泽坚, 孙善利. 泛函分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994.
- [5] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义: 上册[M]. 北京: 北京大学出版社, 1995.
- [6] 徐森林, 薛春华. 实变函数论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- [7] Hausdorff F. 集论[M]. 张文良, 颜家驹, 译. 北京: 科学出版社, 1960.
- [8] 汪林. 泛函分析中的反例[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994.
- [9] 徐森林, 胡自胜, 金亚东, 等. 点集拓扑学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [10] 徐森林, 金亚东, 薛春华. 数学分析: 第 1~3 册[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [11] 江泽涵. 拓扑学引论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1978.
- [12] Л. Э. 艾利斯哥尔兹. 微分方程[M]. 南开大学数学系编译中队, 译; 崔士英, 校. 北京: 人民教育出版社, 1959.
- [13] Taylor A E, Halberg C J A, Jr. General theorems about a bounded linear operator and its conjugate [J]. J. Reine Angew. Math., 1957, 198:93 – 111.
- [14] Taylor A E, Lay D C. Introduction to Functional Analysis[M]. John Wiley & Sons, 1989.
- [15] Lorch E R. Spectral Theory [M]. Oxford University Press, 1962.
- [16] Wilansky A. Functional Analysis [M]. Blaisdell Publishing Company, 1964.
- [17] Olaguazu A. A note on closed operators[J]. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1961, 57:426.