中学生数学思维方法丛书

10 建立对应

冯跃峰 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书介绍数学思维方法的一种形式:建立对应.其中一些内容是本书首次提出的.比如,基元列、主元列、复合列、生成元、减元派生、代换派生、分解派生、操作派生、派生排列、容量方程等.这是本书的特点之一.书中选用了一些数学原创题,有些问题还是第一次公开发表,这是本书的另一特点.此外,书中对每一个问题,并不是直接给出解答,而是详细分析如何发现其解法,这是本书的又一特点.

本书适合高等院校数学系师生、中学数学教师、中学生和数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

建立对应/冯跃峰著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2016.8
(中学生数学思维方法丛书)
ISBN 978-7-312-03962-1

Ⅰ.建…　Ⅱ.冯…　Ⅲ.中学数学课—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 141594 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com
印刷　合肥市宏基印刷有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　880 mm×1230 mm　1/32
印张　8.125
字数　211 千
版次　2016 年 8 月第 1 版
印次　2016 年 8 月第 1 次印刷
定价　28.00 元

序

问题是数学的心脏，学数学离不开解题.我国著名数学家华罗庚教授曾说过：如果你读一本数学书，却不做书中的习题，那就犹如入宝山而空手归.因此，如何解题也就成为了一个千古话题.

国外曾流传着这样一则有趣的故事，说的是当时数学在欧几里得的推动下，逐渐成为人们生活中的一个时髦话题（这与当今社会截然相反），以至于托勒密一世也想赶这一时髦，学点数学.虽然托勒密一世见多识广，但在学数学上却很吃力.一天，他向欧几里得请教数学问题，听了半天，还是云里雾里不知所云，便忍不住向欧几里得要求道："你能不能把问题讲得简单点呢？"欧几里得笑着回答："很抱歉，数学无王者之路."欧几里得的意思是说，要想学好数学，就必须扎扎实实打好基础，没有捷径可走.后来人们常用这一故事讥讽那些凡事都想投机取巧之人.但从另一个角度想，托勒密一世的要求也未必过分，难道数学就只能是"神来之笔"，不能让其思路来得更自然一些吗？

记得我少年时期上学，每逢学期初发新书的那个时刻是最令我兴奋的，书一到手，总是迫不及待地看看书中有哪些新的内容，一方面是受好奇心的驱使，另一方面也是想测试一下自己，看能不能不用老师教也能读懂书中的内容.但每每都是失望而终：尽管书中介绍的知识都弄明白了，书中的例题也读懂了，但一做书中的习题，却还是

不会.为此,我曾非常苦恼,却又万思不得其解.后来上了大学,更是对课堂中老师那些“神来之笔”惊叹不已,严密的逻辑推理常常令我折服.但我未能理解的是,为什么会想到这么做呢?

20世纪中叶,美国数学教育家G.Polya的数学名著《怎样解题》风靡全球,该书使我受益匪浅.这并不是说,我从该书中学到了“怎样解题”,而是它引发了我对数学思维方法的思考.

实际上,数学解题是一项系统工程,有许许多多的因素影响着它的成败.本质的因素有知识、方法(指狭义的方法,即解决问题所使用的具体方法)、能力(指基本能力,即计算能力、推理能力、抽象能力、概括能力等)、经验等,由此构成解题的基础;非本质的因素有兴趣、爱好、态度、习惯、情绪、意志、体质等,由此构成解题的主观状态;此外,还受时空、环境、工具的约束,这些构成了解题的客观条件.但是,具有扎实的解题基础,且有较好的客观条件,主观上也做了相应的努力,解题也不一定能获得成功.这是因为,数学中真正标准的、可以程序化的问题(像解一元二次方程)是很少的.解题中,要想把问题中的条件与结论沟通起来,光有雄厚的知识、灵活的方法和成功的解题经验是不够的.为了判断利用什么知识,选用什么方法,就必须对问题进行解剖、识别,对各种信息进行筛选、加工和组装,以创造利用知识、方法和经验的条件.这种复杂的、创造性的分析过程就是数学思维过程.这一过程能否顺利进行,取决于思维方法是否正确.因此,正确的思维方法亦是影响解题成败的重要因素之一.

经验不止一次地告诉我们:知识不足还可以补充,方法不够也可以积累,但若不善思考,即使再有知识和方法,不懂得如何运用它们解决问题,也是枉然.与此相反,掌握了正确的思维方法,知识就不再是孤立的,方法也不再是呆板的,它们都建立了有血有肉的联系,组成了生机勃勃的知识方法体系,数学思维活动也就充满了活力,得到了更完美的发挥与体现.

G. Polya 曾指出，解题的价值不是答案本身，而在于弄清“是怎样想到这个解法的”，“是什么促使你这样想、这样做的”. 这实际上都属于数学思维方法的范畴. 所谓数学思维方法，就是在基本数学观念系统作用下进行思维活动的心理过程. 简单地说，数学思维方法就是找出已有的数学知识和新遇的数学问题之间联系的一种分析、探索方法. 在一般情况下，问题与知识的联系并非是显然的，即使有时能在问题中看到某些知识的“影子”，但毕竟不是知识的原形，或是披上了“外衣”，或是减少了条件，或是改变了结构，从而没有现成的知识、方法可用，这就是我在学生时代“为什么知识都明白了，例题也看懂了，还是不会做习题”的原因. 为了利用有关的知识和方法解题，就必须创造一定的“条件”，这种创造条件的认识、探索过程，就是数学思维方法作用的过程.

但是，在当前数学解题教学中，由于“高考”指挥棒的影响，教师往往只注重学生对知识方法掌握的熟练程度，不少教师片面地强调基本知识和解决问题的具体方法的重要性，忽视思维方法方面的训练，造成学生解决一般问题的困难. 为了克服这一困难，各种各样的、非本质的、庞杂零乱的具体解题技巧统统被视为规律，成为教师谆谆告诫的教学重点，学生解题也就试图通过记忆、模仿来补偿思维能力的不足，利用胡猜乱碰代替有根据、有目的的探索. 这不仅不能提高学生的解题能力，而且对于系统数学知识的学习，对于数学思维结构的健康发展都是不利的.

数学思维方法通常又表现为一种解题的思维模式. 例如，G. Polya就在《怎样解题》中列出了一张著名的解题表. 容许我们大胆断言，任何一种解题模式均不可能囊括人们在解题过程中表现出来的各种思维特征，诸如观察、识别、猜想、尝试、回忆、比较、直觉、顿悟、联想、类比、归纳、演绎、想象、反例、一般化、特殊化等. 这些思维特征贯穿于解题过程中的各个环节，要想用一个模式来概括，那就像

用数以千计的思维元件来构造一个复杂而庞大的解题机器.这在理论上也许是可行的,但在实际应用中却很不方便,难以被人们接受.更何况数学问题形形色色,任何一个模式都未必能适用所有的数学问题.因此,究竟如何解题,其核心内容还是学会如何思考.有鉴于此,笔者想到写这样一套关于数学思维方法的丛书.

本丛书也不可能穷尽所有的数学思维方法,只是选用一些典型的思维方法为代表做些介绍.这些方法,或是作者原创发现的,或是由作者从一个全新的角度进行了较为深入的分析与阐述.

囿于水平,书中观点可能片面武断,错误难免,敬请读者不吝指正.

冯跃峰

2015 年 1 月

目　　录

1 要素列

设 f 是某个给定的法则，具有如下性质：对于集合 A 中每一个元素 a，通过法则 f，都有集合 B 中的若干个元素 $b_1, b_2, \cdots, b_t$（$t \in \mathbf{N}^+$）与 a 对应，记为 $f: a \to b_1, b_2, \cdots, b_t$，则称 f 是 A 到 B 的一个对应，并称 $b_1, b_2, \cdots, b_t$ 为元素 a 在对应 f 下的像.

如果 $t=1$，我们称对应 f 为单值对应，也称为映射，此时，元素 a 在对应 f 下的像记为 $f(a)$. 如果 $t>1$，则称对应 f 为多值对应.

设 f 是 A 到 B 的映射，如果对 A 中任何两个不同元素 a, b，它们在 B 中对应的像 $f(a), f(b)$ 都不同，则称 f 是单射；如果对 B 中任何元素 b，它在 A 中都可找到一个元素 a，使 a 与 b 对应，即 $b=f(a)$，则称 f 是满射；如果 f 既是单射又是满射，则称 f 是 A 到 B 的一一映射.

设 f 是 A 到 B 的一个映射，如果 f 是单射，那么，$|A| \leqslant |B|$；如果 f 是满射，那么，$|A| \geqslant |B|$；如果 f 是一一映射，那么，$|A|=|B|$.

利用上述结论，可以得到估计具有某种性质的对象个数的一种思考方法：建立所计数的对象与一组新对象之间的对应，然后估计新对象的个数，由此得到原来对象个数的范围.

显然，建立对应的关键，是找到一组适合的新对象. 本章介绍一

种建立对应的方法:建立计数对象与其“要素列”之间的对应.

一般来说,我们计数的对象通常包含多种变化因素.如果某些因素被确定后,计数对象被唯一确定,则称这些因素组成了该计数对象的要素.

所谓要素列,就是由计数对象的若干个要素组成的一个列.如果减少计数对象要素列中的任何一个要素,则计数对象便不确定,那么,我们称此时的要素列为该计数对象的最简要素列.

计数对象的要素列并不是唯一的,可能有不同的表现形式.比如,三角形的要素列可以是3个顶点组成的点列,也可以是3条边组成的线段列.又比如,正方形的要素列可以是3个顶点组成的点列,也可以是2条相邻边组成的线段列,还可以是一个顶点、边的长度、边的方向组成的混合列.

显然,如果计数对象的每一个要素可用一个相应的符号来表示,那么,计数对象便与相应的符号列形成一一对应.

1.1 基元列

如果计数对象的各个要素恰好是构成计数对象的基本元素,则称这样的要素列为基元列.最常见的基元列为元素基元列和位置基元列.

基元列可以表示为$(a_1,a_2,\cdots,a_r)$,其中r称为基元列的长度.因为不同的对象对应的基元列的长度可能不同,所以计算过程中常常需要对r的取值进行分类讨论.

例1 设m是给定的正整数,将m封信丢入3个不同的邮筒,有多少不同的方法?其中两封信丢入同一个邮筒时,不同的顺序看作同一种方法.

分析与解 设m封信的代号为$1,2,3,\cdots,m$,3个不同的邮筒

为 A,B,C. 对每一个投递方法,令其对应一个位置要素列(x_A,x_B,x_C),其中 x_A,x_B,x_C 分别为邮筒 A,B,C 所收到的信的集合,则$|x_A|+|x_B|+|x_C|=m$.

(1) 先考虑$|x_A|=0$的情形,此时$|x_B|+|x_C|=m$.

当$|x_B|=i(0\leqslant i\leqslant m)$时,$|x_C|=m-i$,在 m 封信中选取 i 封信投入邮筒 B,有 C_m^i 种方法,又 $i=0,1,2,\cdots,m$,所以,当$|x_A|=0$时共有$\sum\limits_{i=0}^{m}C_m^i=2^m$种方法.

(2) 当$|x_A|=j(1\leqslant j\leqslant m)$时,在 m 封信中选取 j 封信投入邮筒 B,有 C_m^j 种方法. 又$|x_B|+|x_C|=m-j$,由上面的结论可知,将 $m-j$ 封信丢入两个邮筒 B,C 共有 2^{m-j} 种方法. 所以,由乘法原理,当$|x_A|=j(1\leqslant j\leqslant m)$时,共有 $C_m^j2^{m-j}$ 种方法.

注意(2)的结论在 $j=0$ 时也成立,于是,由加法原理,所有不同的方法数为

$$\sum_{j=0}^{m}C_m^j2^{m-j}=(1+2)^m=3^m$$

本题如果我们选择元素要素列,则可得如下一个简单解法.

对每一个投递方法,令其对应一个元素要素列($x_1,x_2,\cdots,x_m$),其中 $x_i(1\leqslant i\leqslant m)$表示第 i 封信投入的邮筒代号.

显然,每一个 $x_i(1\leqslant i\leqslant m)$都有 3 种可能,从而由乘法原理,所有不同的方法数为 3^m.

解答是如此出人意料地简单! 由此可见,对同一个问题,选用不同形式的要素列,得到的解答其繁简可能截然不同.

例 2 有 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 依次排列在直线 l 上,现将这 n 个点染上红色或蓝色,每个点恰染其中一种颜色. 若相邻两点 A_i,A_{i+1}的颜色不同,则称线段 A_iA_{i+1}为一条标准线段. 已知 A_1,A_n 异色,证明:l 上的标准线段有奇数条.

分析与证明　每个点只有两种颜色:红色或蓝色.我们分别用两个数1和-1表示这两种颜色.这样,n个点得到n个数:$x_1,x_2,\cdots,x_n$.

令每一条线段对应一个要素列(x_i,x_j),其中x_i,x_j分别是线段A_iA_j两端点的标数.

显然,线段A_iA_{i+1}为一条标准线段,等价于其要素列(x_i,x_{i+1})满足:$x_ix_{i+1}=-1$.于是,我们只需证明:满足$x_ix_{i+1}=-1$的数对(x_i,x_{i+1})的个数为奇数.

为了利用$x_ix_{i+1}=-1$,从整体上考察

$$T=(x_1x_2)(x_2x_3)\cdots(x_{n-1}x_n)$$

有

$$\begin{aligned}T&=(x_1x_2)(x_2x_3)\cdots(x_{n-1}x_n)\\&=x_1\cdot(x_2^2x_3^2\cdots x_{n-1}^2)\cdot x_n=x_1x_n\end{aligned}$$

因为A_1,A_n异色,从而$x_1x_n=-1$,所以$T=-1$.

由此可见,$x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{n-1}x_n$中共有奇数个为$-1$,从而标准线段有奇数条.

例3(1986年上海市数学奥林匹克试题)　设A,B,C,D是空间中给定的不共面的任意4点,它们到平面α的距离的比为$1:1:1:2$,问这样的平面α有多少个?

分析与解　设A,B,C,D到平面α的距离分别为a,b,c,d,则一个合乎条件的平面α,对应一个元素基元列(a,b,c,d),其中

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}=\frac{d}{2}$$

即$a=b=c$,且$d=2a$.

先退一步,考虑满足$a=b$的平面α,这样的平面α可分为两类:一是平面α与直线AB平行;二是平面α过线段AB的中点.

现在,我们来调整α的位置,使$c=a=b$.

(1) 当平面 α 与 AB 平行时，由 $c=a$ 可知，α 与 CA 又有两种位置关系：平面 α 与其平行或过其中点，由此得到如下两种情况：

(ⅰ) 平面 α 与直线 AC 平行，此时平面 α 与直线 AB，BC，CA 都平行(图 1.1).

(ⅱ) 平面 α 过线段 AC 的中点 P，此时，平面 α 也同时过线段 BC 的中点 Q(图 1.2).

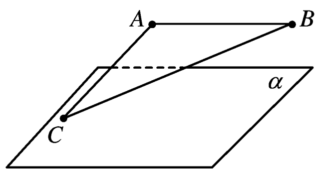

图 1.1

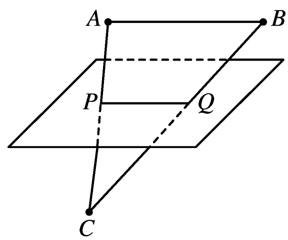

图 1.2

(2) 当平面 α 过直线 AB 的中点时，由 $c=a$ 可知，α 与 CA 又有两种位置关系：平面 α 与其平行或过其中点，由此得到如下两种情况：

(ⅰ) 平面 α 与直线 AC 平行，由于平面 α 过线段 AB 的中点，从而平面 α 也同时过线段 BC 的中点.

(ⅱ) 平面 α 过线段 CA 的中点，由于平面 α 过线段 AB 的中点，从而平面 α 与直线 BC 平行.

综上可知，平面 α 与 $\triangle ABC$ 的位置关系只有以下两种情况：一是平面 α 与平面 ABC 平行，二是平面 α 过 $\triangle ABC$ 的一条中位线.

最后，调整 α 的位置，使 $d=2a$.

当 $\alpha /\!/ \triangle ABC$ 时，若 D 与 $\triangle ABC$ 在平面 α 同侧，则平面 α 过 DA 延长线上一点 M，其中 $DA=AM$，且与平面 ABC 平行的平面 α 唯一确定(图 1.3)；若 D 与 $\triangle ABC$ 在平面 α 异侧，则平面 α 过线段 DA 的靠近 A 的三等分点，且与平面 ABC 平行的平面 α 也唯一确定

(图 1.4).此时一共得到两个合乎条件的平面.

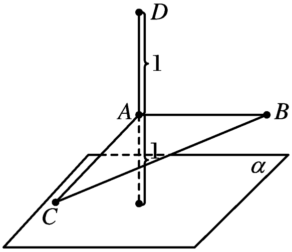

图 1.3

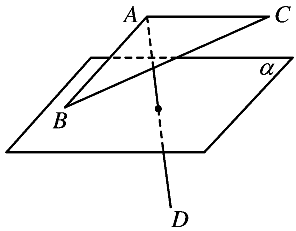

图 1.4

当 α 过△ABC 的一条中位线时,不妨设 α 过与 BC 平行的中位线 EF,则 $\alpha /\!/ BC$.

若 D 与线段 BC 在 α 的同侧,则平面 α 过 DB 延长线上一点 M,其中 $DB=BM$,且过 EF 的平面 α 唯一确定(图 1.5);若 D 与线段 BC 在 α 的异侧,则平面 α 过线段 DB 的靠近 B 的三等分点,且过 EF,这样的平面 α 唯一确定(图 1.6).此时一共得到两个合乎条件的平面.

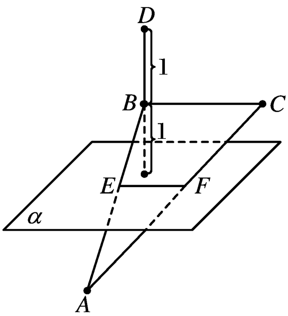

图 1.5

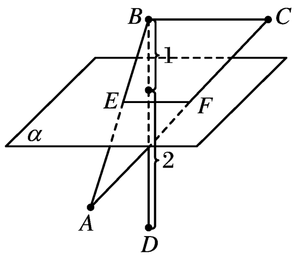

图 1.6

同样,当 α 过△ABC 的其他中位线时,也可得到两个合乎条件的平面.

综上所述,合乎条件的平面共有 $2+2\times3=8$ 个.

另解 如果我们建立计数对象与位置基元列的对应,则解答非常简单.

设 A,B,C,D 到平面 α 的距离分别为 a,b,c,d,其中 $a=b=c,d=2a$.

先考虑条件 $d=2a$,显然,合乎条件的平面 α 与直线 DA 不平行,否则 $d=a$,矛盾.

于是,由对称性可知,合乎条件的平面 α 与直线 DA,DB,DC 都相交,设3个交点分别为 P,Q,R,则合乎条件的平面 α 对应一个位置基元列(P,Q,R).

先考虑平面 α 与直线 AD 的交点 P,由于 $d=2a$,于是点 P 内分或外分线段 AD 的比为 $1:2$,从而点 P 有2个不同取值(图1.7).

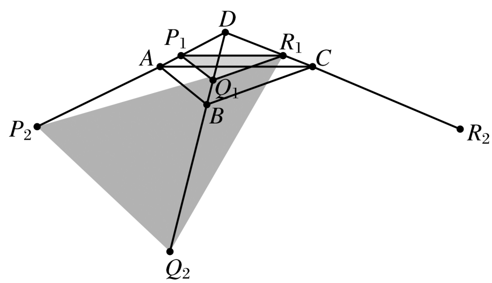

图 1.7

同样,点 Q,R 都分别有2个不同取值,于是,这样的点基元列(P,Q,R)共有 $2^3=8$ 个.

反之,对任何一个上述点基元列(P,Q,R),显然3点 P,Q,R 不共线,否则直线 DP,DQ,DR 共面,从而4点 A,B,C,D 共面,矛盾.于是,三点组(P,Q,R)确定唯一一个平面,所以上述对应是一一对应,故合乎条件的平面共有 $2^3=8$ 个.

例 4 有一条折线,它的顶点都在棱长为2的正方体的表面上,每一段的长度都为3,它的两个端点正好是正方体相距最远的两个顶

点，试问：这样的折线有多少段？

分析与解　设正方体为 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，不妨设折线的一个端点为 A，另一个端点为 C_1.

因为折线由若干条线段组成，我们称相邻两条线段的公共端点为该折线的“节点”. 这样，每一条合乎条件的折线都对应一个位置基元列$(A,P_1,P_2,\cdots,P_r,C_1)$，其中 $AP_1,P_1P_2,\cdots,P_rC_1$ 是折线的各段，$P_1,P_2,\cdots,P_r$ 为节点.

考察第一个节点 P_1 的位置，因为各段的长为 3，所以 $AP_1=3$，从而 P_1 在以 A 为圆心，3 为半径的球面与正方体表面的交线上.

设该球面交棱 B_1C_1,CC_1,D_1C_1 于点 L,M,K，则 L,M,K 为相应棱的中点.

显然，球面与正方体的侧面 $BCC_1B_1,CDD_1C_1,A_1B_1C_1D_1$ 的交线为 3 段弧 KL,LM,MK（图 1.8），于是，P_1 在这 3 段弧上.

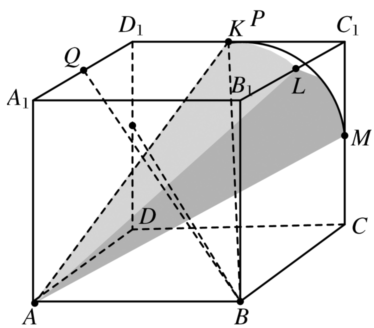

图 1.8

若 P_1 不是其中任何一段弧的端点，则 P_1 到正方体表面上所有非 A 的点之距都小于 3，从而下一个节点 P_2 不存在，矛盾.

不妨设 P_1 为点 K，我们将该点重新命名为 P，注意到正方体表面上与 P 距离为 3 的点只有 A 和 B，从而下一个节点 $P_2=B\neq C_1$，所以 $r\geqslant 3$.

考虑第 3 个节点 P_3 的位置,同上面的分析,P_3 只能是 A_1D_1,D_1C_1 及 D_1D 的中点,但 $P_3 \neq P_1 = P$,由对称性,不妨设 P_3 为 A_1D_1 的中点 $Q \neq C_1$,从而 $r \geqslant 4$.

考虑第 4 个节点 P_4,同上面的理由,只能是 $P_4 = C \neq C_1$,从而 $r \geqslant 5$.

考虑第 5 个节点 P_5,因为 $CC_1 \neq 3$,所以 $P_5 \neq C_1$,从而 $r \geqslant 6$.

最后,当 $r = 6$ 时,如图 1.9 所示,存在合乎条件的折线(A,P,B,Q,C,R,C_1),其中 P,Q,R 分别是所在棱的中点,故折线的段数的最小值为 6.

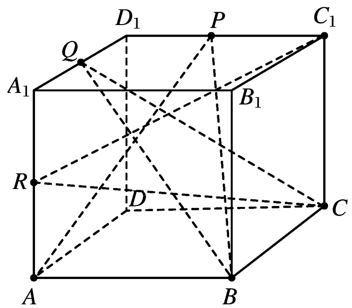

图 1.9

例 5 以正 $2n+1$ 边形的顶点为顶点的三角形中,包含正 $2n+1$ 边形的中心的三角形有多少个?

分析与解 设正 $2n+1$ 边形为 $A_1A_2\cdots A_{2n+1}$,其中心为 O,则 $A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}$都在以 O 为圆心,OA_1 为半径的圆上.

考察任意一个合乎条件的$\triangle PQR$,它对应一个位置基元列(P,Q,R),其中 $P,Q,R \in A = \{A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}\}$,$O \in \triangle PQR$.

先考虑点 P 的位置,由对称性,可先考察 $P = A_1$ 的情形,其他情形与之类似.现在我们考虑另两点 Q,R 在什么位置,方能保证 $O \in \triangle PQR$.

显然，$O\in\triangle PQR$ 等价于 Q,R 分别在直线 AO 的两侧，且弧 RPQ 上属于多边形顶点的个数不少于 n（Q,R 除外）.

实际上，对圆 O 的任意一条弦，它哪一侧的顶点多，则哪一侧含有多边形的中心 O. 又除 Q,R 外还有 $2n-1$ 个顶点，从而该弦至少有一侧不少于 n 个顶点.

如果直接设 $Q=A_i,R=A_j$，则上述条件难以表述为 i,j 满足的等式或不等式. 于是，我们将多边形的顶点重新编号：

从点 $P=A_1$ 开始，按逆时针方向将其余 $2n$ 个的顶点依次记为 $B_1,B_2,\cdots,B_n,C_n,C_{n-1},\cdots,C_2,C_1$（图 1.10），令 $B=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$，$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$. 这样，有

$$\begin{aligned}&O\in\triangle PQR\\ \Leftrightarrow\quad & Q\in B,R\in C,\text{且弧 }RPQ\text{ 上不少于 }n\text{ 个非 }Q,R\text{ 的顶点}\\ \Leftrightarrow\quad & Q=B_i,R=C_j,\text{且 }i+j\geqslant n+1(1\leqslant i,j\leqslant n)\end{aligned}$$

考察满足 $i+j\geqslant n+1(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 的有序对，当 $i=k$ 时，j 可取 $n,n-1,\cdots,n-k+1$ 这 k 个值，有 k 个有序对. 令 $k=1,2,\cdots,n$ 即得这样的有序对的个数为 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

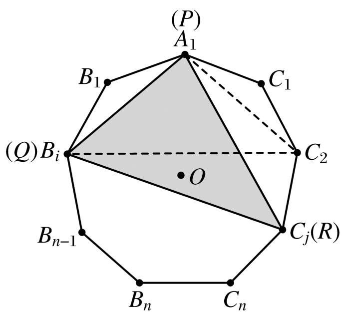

图 1.10

于是，以 A_1 为顶点之一的合乎条件的三角形有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个.

同样，以其他顶点 $A_i(1\leqslant i\leqslant 2n+1)$ 为顶点之一的合乎条件的三角形亦有 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个，再注意到每个三角形有 3 个顶点，被计数 3 次，从而合乎条件的三角形个数为

$$S=(2n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

另解 若选择三边为基元列，则有如下的解法.

考察任意一个合乎条件的$\triangle PQR$，它对应一个由边组成的基元列(PQ,QR,RP)，其中 $P,Q,R\in A=\{A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}\}$，$O\in\triangle PQR$.

先考虑边 PQ 的位置，不妨设以 P,Q 为端点的劣弧上有 t 个顶点$P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_t}(0\leqslant t\leqslant n-1)$，我们称这样的边为“跨度”为 $t+1$ 的边.

设直线 PO,QO 与正多边形分别相交于另外两点 P',Q'（图 1.11），则 $O\in\triangle PQR$ 等价于顶点R 在以P',Q'为端点的劣弧上.

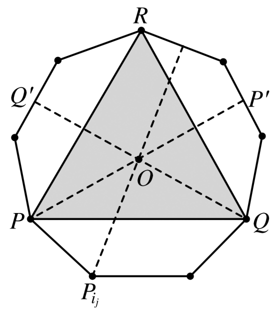

图 1.11

下面计算以 P',Q'为端点的劣弧上有多少个顶点. 因为以 P,Q 为端点的劣弧上有 t 个顶点$P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_t}$，对于其中任何一个顶点 $P_{i_j}(1\leqslant j\leqslant t)$，直线$OP_{i_j}$必定与多边形的某条边相交，令点$P_{i_j}$与该边对应，于是，$t$ 个顶点$P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_t}$对应多边形的 t 条边，这 t 条边共有$t+1$个端点，这 $t+1$ 个端点便是以 P',Q'为端点的劣弧上的所有顶点，于是共有 $t+1$ 个顶点，从而合乎条件的三角形恰有 $t+1$ 个$(0\leqslant t\leqslant n-1)$.

注意到“跨度”为 $t+1$ 的边$(0\leqslant t\leqslant n-1)$共有 $2n+1$ 条（每一条边可旋转出$2n+1$个位置），从而含有“跨度”为 $t+1$ 的边$(0\leqslant t\leqslant n-1)$的合乎条件的三角形有$(2n+1)(t+1)$个.

令 $t=0,1,2,\cdots,n-1$，得合乎条件的三角形共有

$$(1+2+\cdots+n)(2n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

个.又每个三角形有 3 条边,被计数 3 次,从而合乎条件的三角形个数为

$$S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

例 6 给定正整数 $n\geqslant4$,求以正 n 边形的顶点为顶点的互不全等的三角形的个数.

分析与解 设正 n 边形为 $A_1A_2\cdots A_n$,称以 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$为顶点的三角形为标准三角形.

设互不全等的标准三角形个数为 N,通过讨论 $n=4,5,6$ 等特殊情形,发现所求 N 为最接近$\frac{n^2}{12}$的整数.

对此,我们只需证明:

$$\left|N-\frac{n^2}{12}\right|<\frac{1}{2}$$

即$|12N-n^2|<6$.

考察任意一个标准$\triangle PQR$,其基元要素列为(P,Q,R),其中 P,Q,R 是正n 边形的 3 个顶点.

由对称性,不妨假定 $P=A_1$,则另外两个顶点 Q,R 可在 A_2,A_3,$\cdots$,A_n 中选取,有 C_{n-1}^2种取法,从而以 A_1 为顶点的所有标准三角形共有 $S=\mathrm{C}_{n-1}^2$个.

但其中有重复计算,有些三角形尽管其位置不同,但它们全等.由于不同类型的三角形重复次数不同,从而要分类去除重复的次数.

设其中正三角形有 N_1 个,等腰但不等边的三角形有 N_2 个,任何两条边都不相等的三角形有 N_3 个,则

$$N_1+N_2+N_3=\mathrm{C}_{n-1}^2$$

显然,N_1 中的每个三角形只计数一次(以 A_1 为顶点作圆内接正三角形最多有一个).

考察 N_2 中的一个$\triangle PQR$,设它的 3 边分别为 a,a,b,此时,以