$\sqrt{2}$ 的连分数展开及其无理性

叶卢庆*

2014 年 12 月 6 日

由于
$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}, \tag{1}$$
因此
$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}.$$
这样不断地进行下去, 可得
$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}.$$
首先我们来证明表达式
$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$
确实有意义. 这化归为如下问题:

> **问题.** 已知 $p_{n+1}=\frac{1}{1+p_n}+1$, 且 $p_1=1$, 求证 $\lim_{n\to\infty}p_n$ 存在.

这是简单的不动点迭代问题. 容易证明极限是存在的, 且极限等于 $\sqrt{2}$.

下面我们将这个问题与 $\sqrt{2}$ 的无理性联系起来. 我们来证明 $\sqrt{2}$ 是无理数. 反证法. 假设其是有理数 $\frac{p}{q}$, 其中 p,q 都是正整数且 $\frac{p}{q}$ 既约. 由式(1)可得
$$\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-1,$$
即
$$\frac{p}{q}=\frac{1}{\frac{p}{q}-1}-1,$$
即
$$\frac{p}{q}=\frac{2q-p}{p-q}.$$
易得 $\frac{2q-p}{p-q}$ 的分子和分母都是正数, 且 $p-q<q$, 这与 $\frac{p}{q}$ 的既约性矛盾. 于是 $\sqrt{2}$ 不是有理数.

*叶卢庆 (1992—), 男, 杭州师范大学理学院数学与应用数学专业本科在读,E-mail:yeluqingmathematics@gmail.com