

华中师范大学

二〇〇九年研究生入学考试试题

院系、招生专业：数学与统计学学院各专业

考试时间：元月 11 日下午

考试科目代码及名称：829, 高等代数

1. (20分) 设 a_1, \dots, a_n 是 n 个复数, x 是复变元. 求解: x 取哪些复数值时下述等式 (等式左边是 $n+1$ 阶行列式) 成立:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n & a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

2. (20分) 设 $f(x)$ 是 n 次实系数多项式, $n > 1$; 设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数多项式. 证明:
- (1) 如果 r 是 $f(x)$ 的 m 重根, $m > 0$, 则 r 是 $f'(x)$ 的 $m-1$ 重根 (若 r 是 $f'(x)$ 的零重根则表示 r 不是 $f'(x)$ 的根).
 - (2) 如果 $f(x)$ 的根都是实数, 则 $f'(x)$ 的根也都是实数.
3. (20分) 设 A 是秩为 r 的 $m \times n$ 阶矩阵, B 是非零的 $m \times 1$ 阶矩阵. 考虑线性方程组 $AX = B$, 其中 X 是变元 x_1, \dots, x_n 的列向量. 证明:
- (1) 线性方程组 $AX = B$ 的任意有限个解向量 X_1, \dots, X_k 的向量组的秩 $\leq n - r + 1$.
 - (2) 若线性方程组 $AX = B$ 有解, 则它有 $n - r + 1$ 个解向量是线性无关的.
4. (30分) 设 A, B, C 都是 n 阶方阵, 令 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ 是分块构成的 $2n$ 阶方阵, 其中右下块 0 表示 n 阶零方阵.
- (1) 证明: $\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \geq \text{rank}(B) + \text{rank}(C)$, 这里 $\text{rank}(B)$ 表示矩阵 B 的秩.
 - (2) 举例说明: (1) 中的等号和不等号都可能成立.
5. (30分) 设 V 是有限维向量空间, 设 U, W 是 V 的两个子空间.
- (1) 什么是 U 与 W 的和子空间 $U + W$? 请叙述关于 $U + W$ 的维数公式.
 - (2) 证明关于和子空间的维数公式.
6. (30分) 设 A 为 n 阶实矩阵, $\lambda_t = r + si$ 是 A 的特征根, 其中 r, s 是实数, i 是虚数单位.
- (1) 证明: $\frac{1}{2}(A + A')$ 的特征根都是实数; 令 $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$ 是 $\frac{1}{2}(A + A')$ 的全部特征根;
 - (2) 证明: $\mu_1 \leq r \leq \mu_n$.
 - (3) 你有类似的估计 s 的办法吗?