华 中 师 范 大 学

二〇一一年研究生入学考试试题

院系、招生专业：数学与统计学学院　　考试时间：元月16日上午

考试科目代码及名称：617 数学分析

一、（24分）设 $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$，$x_{n+1} = \sin x_n$，证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin^2 x_n = 3$；

（3）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^p$，当 $p > 2$ 时收敛，而当 $p \le 2$ 时发散.

二、（20分）

（1）设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是有界数列，且 $\alpha a_{n+1} + \beta a_n = b_n$，其中 $\alpha \ne \beta$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

（2）设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是有界数列，且 $\alpha a_{n+1} + \beta a_n = b_n$，其中 $\alpha = \beta$，试问（1）的结论是否还成立，请据理说明你的结论.

三、（20分）据理说明下面的问题：

（1）是否存在 $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 的连续可微函数 $f(x)$ 满足：$f(x) > 0$，$f'(x) = f\big(f(x)\big)$？

（2）若将（1）中的条件“$f(x) > 0$”改为“$f(x) \ge 0$”，结论又如何？

四、（20分）设 $F(x, y) = y + \sin(|x| y)$，试问：

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。

（1） $F(x,y)$ 在 $(0,0)$ 附近是否满足 $F(x,y)=0$ 的隐函数存在定理的条件？

（2）在 $(0,0)$ 附近是否存在过点 $(0,0)$ 的惟一连续可微的函数 $y=f(x)$，使得

$$F(x,f(x))\equiv 0\,?$$

如果存在，请求出 $f(x)$ 和 $f'(x)$.

五、（24 分）设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处的连续性，偏导数的存在性以及可微性.

六、（12 分）证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+nx)}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上不一致收敛，但绝对收敛且内闭一致收敛.

七、（20 分）

（1）若 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调函数，则对任意固定 $a>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^a f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$；

（2）若 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$.

八、（10 分）设 Ω 是 xy 平面上具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$u\in C^2(\overline{\Omega})$，$u$ 为非常数值函数，且 $u|_{\partial\Omega}=0$，证明：

$$\iint_{\overline{\Omega}}u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0\,,$$

其中 $\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$，$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$.

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。