# 华中师范大学
# 二〇一二年研究生入学考试试题

**院系、招生专业：** 数学与统计学学院各专业　　**考试时间：** 1 月 8 日下午

**考试科目代码及名称：** 834，高等代数

**说明：本试卷共 2 页，共 8 个大题，满分 150 分.**

1．(15 分)　设 $\mathbb{F}$ 是任意数域，$\mathbb{F}[x]$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $\mathbb{F}$- 多项式的集合，设 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. 证明：$f(x)$ 是一个不可约多项式的幂当且仅当对任意互素的多项式 $g(x), h(x) \in \mathbb{F}[x]$，只要 $f(x) \mid g(x)h(x)$，则或者 $f(x) \mid g(x)$，或者 $f(x) \mid h(x)$.

2．(10 分)　计算行列式 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

3．(20 分)　设 $n, k$ 是整数，$n > 2$，$1 \le k \le n$. 设复数 $\omega$ 满足 $\omega^n = 1$ 但 $\omega^t \ne 1$ 对任 $t = 1, \cdots, n-1$ (称这样的 $\omega$ 为 $n$ 次本原单位根). 令 $A = (\omega^{ij})_{0 \le i,j \le n-1}$ 是一个 $n$ 阶方阵. 令 $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 是由 $A$ 的位于第 $i_1$ 行,$\cdots$, 第 $i_k$ 行和第 $j_1$ 列,$\cdots$, 第 $j_k$ 列的交叉位置的元素构成的 $k$ 阶子矩阵，这里 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$.

(1)　证明：对任意 $1 \le k \le n$, $A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵.

(2)　对任意 $1 \le k \le n$，以及对任意的 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$, $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$, $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$ 一定可逆吗？如果是，给出证明. 如果不是，给出反例.

4．(20 分)　设 $\mathbb{F}$ 是数域，$\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $m \times n$ 矩阵的集合，$A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$.

(1)　证明：矩阵 $A$ 是行满秩矩阵当且仅当 $m \le n$，并且存在可逆的 $n \times n$ 矩阵 $B$ 使得 $AB = (E \mid 0)$，这里 $E$ 表示 $m \times m$ 单位矩阵，0 表示 $m \times (n-m)$ 零矩阵.

(2)　矩阵 $A$ 是行满秩矩阵当且仅当矩阵 $A$ 有右逆.

5．(25 分)　(1)　设 $A$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上 $n$ 阶可逆矩阵，$P$ 为 $n$ 阶矩阵且使得 $A+P, A-P$ 均可逆. 证明：$X = (A+P)(A-P)^{-1}, Y = (A+P)^{-1}(A-P)$ 是矩阵方程 $XAY = A$ 的解.

(2)　设 $C \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$，设 $V$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间. 令 $\mathrm{rank}(C)$ 表示矩阵 $C$ 的秩，$\dim(V)$ 表示向量空间 $V$ 的维数. 设 $W$ 是齐次线性方程组 $CX = 0$ 的解子空间. 证明：如果 $W \cap V = 0$，则 $\mathrm{rank}(C) \ge \dim(V)$.

考生答题请一律写在答题纸上，在试卷上作答无效。

6．(20 分) 设 $A$ 为 $n$ 阶半正定矩阵. 用 $\det(A)$ 表示方阵 $A$ 的行列式.

(1) 证明：当 $B$ 是 $n$ 阶正定矩阵时, $\det(A+B)\geq\det(B)$, 等号成立当且仅当 $A=0$.

(2) 当 $A\neq 0$ 时, $\det(A+E)>1$.

7．(15 分) 令 $\mathbb{R}_2$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数不超过 2 次的多项式构成的实向量空间.

(1) 证明：对任意的 $p(x),q(x)\in\mathbb{R}_2$, $\langle p(x),q(x)\rangle=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx$ 是 $\mathbb{R}_2$ 上的一个内积.

(2) 将 $\mathbb{R}_2$ 的基底 $\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x,x^2\}$ 标准正交化，求出标准正交基.

8．(25 分) (1) 设 $\mathbb{F}$ 是任意数域, 设 $A\in M_{n\times m}(\mathbb{F}),B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. 证明：

$$\det(\lambda E_{n\times n}-AB)=\lambda^{n-m}\det(\lambda E_{m\times m}-BA).$$

(2) 设 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$ 是非零实向量, 令 $\alpha^T$ 表示向量 $\alpha$ 的转置. 求 $C=\alpha^T\alpha$ 的特征值和特征向量.

(3) 矩阵 $C$ 可以相似对角化吗？为什么?