

华南理工大学
2013年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(请在答题纸上做答, 试卷上做答无效, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 数学分析

适用专业: 基础数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 应用数学, 运筹学与控制论

共2页

1. (12分) 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1} \right).$$

2. (12分) 确定函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n}$ 的收敛域, 并求其和函数.

3. (12分) 设函数 $f \in C^2(R)$, 且

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \leq 0, \quad \forall x \in R, \quad \forall h > 0,$$

证明: 对 $\forall x \in R$, 有 $f''(x) \leq 0$.

4. (12分) 设 $\beta > 0$, 且

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{\beta}{2} \right), \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\beta}{x_n} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

试证数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

5. (12分) 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n x dx.$$

6. (12分) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{1 + x \tan x} - \sqrt{\cos x}}.$$

7. (13分) 设函数 $g(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微且在该点的函数值及微分均为零, 定义函数

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

试证 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微.

8. (13分) 计算曲面积分

$$\int \int_S y dx dz,$$

其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的上半部分, 并取外侧为正向.

9. (13分) 计算曲线积分

$$\int_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

其中 C 是以 $(0, 1)$ 为圆心, R ($R \neq 1$)为半径的圆周, 方向为逆时针方向.

10. (13分) 计算曲面积分

$$\int \int_{\Sigma} \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 2)^2}},$$

其中 Σ 是以原点 $(0, 0, 0)$ 为球心, 2 为半径的球面被 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所截的上部分.

11. (13分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且有唯一的最大值点 $x_0 \in [a, b]$. 试证: 若 $x_n \in [a, b]$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

12. (13分) 设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$ 上连续, 函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在闭区间 $[x_0 - a, x_0 + a]$ 上一致收敛于函数 $\varphi(x)$, 且对任意的 n 及 $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ 有 $|\varphi_n(x) - y_0| \leq b$. 试证:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt, \quad \text{这里 } |x - x_0| \leq a.$$