牛顿对偶

戴伍圣

天津大学理学院物理系

daiwusheng@tju.edu.cn

合作者：李文都

南开大学陈省身数学研究所

天津大学理学院物理系

经典牛顿对偶

经典牛顿对偶

牛顿对偶

- 牛顿在《原理》中就发现了经典力学中幂次势间一种对偶。杰出数学家Arnold特别强调了这一对偶的重要性。

- 牛顿对偶（也称牛顿-阿诺德对偶）：
两个幂次势

$$U(r) = \xi r^{a+1}$$
$$V(\rho) = \eta \rho^{A+1}$$

如果幂次满足

$$\frac{a+3}{2} = \frac{2}{A+3}$$

则它们互为牛顿对偶。

对偶变换：轨道方程

对偶势的轨道方程间有如下对偶关系：

- 能量和耦合常数

$$E \to -\eta$$
$$\xi \to -\mathcal{E}$$

- 坐标

$$r \to \rho^{(A+3)/2}$$
$$\theta \to \frac{A+3}{2}\phi$$

其中E是$U(r)$系统的能量；$\mathcal{E}$是$V(\rho)$系统的能量。

知道了一个势的解，对偶势的解可以直接由对偶变换得到。

经典牛顿对偶：广义多项式势

我们的工作

将幂次势的经典牛顿对偶

推广到

广义多项式势的经典牛顿对偶

广义多项式势

- 广义多项式势：

$$U\left(r\right)=Ar^{a}+Br^{b}+\cdots+Cr^{c}$$

幂次为任意实数（可正可负，不必须是整数）

广义多项式势的牛顿对偶

- 两个广义多项式势

$$U(r) = \xi r^{a+1} + \sum_n \mu_n r^{b_n+1}$$

$$V(\rho) = \eta \rho^{A+1} + \sum_n \lambda_n \rho^{B_n+1}$$

若幂次满足

$$\frac{a+3}{2} = \frac{2}{A+3}$$

$$\sqrt{\frac{2}{a+3}}(b_n+3) = \sqrt{\frac{2}{A+3}}(B_n+3)$$

则为对偶势。

对于广义多项式势，与其对偶的势会有多个。

对偶变换

对偶势的轨道方程可以由如下对偶关系互相变换得到

- 能量和耦合常数

$$E \to -\eta$$
$$\xi \to -\mathcal{E}$$
$$\mu_n \to \lambda_n$$

- 坐标

$$r \to \rho^{(A+3)/2}$$
$$\theta \to \frac{A+3}{2}\phi$$

量子牛顿对偶

我们的工作

将经典的牛顿对偶

推广到

量子力学中的牛顿对偶。

量子牛顿对偶

- 两个幂次势

$$U(r) = \xi r^{a+1}$$

$$V(\rho) = \eta \rho^{A+1}$$

若满足

$$\frac{a+3}{2} = \frac{2}{A+3}$$

则在Schrödinger方程意义下也是对偶势。

幂次满足的关系和经典力学是一样的。

对偶变换：本征值和耦合常数

- 量子力学中，本征值和耦合常数满足对偶关系

$$E \to -\eta \left(\frac{2}{A+3} \right)^2$$
$$\xi \to -\mathcal{E} \left(\frac{2}{A+3} \right)^2$$

其中E是$U(r)$系统的能量；$\mathcal{E}$是$V(\rho)$系统的能量。

- 角动量满足对偶关系

$$l + \frac{1}{2} \to \frac{2}{A+3} \left(\ell + \frac{1}{2} \right)$$

其中l是$U(r)$系统的角动量；ℓ是$V(\rho)$系统的角动量。

对偶变换：波函数

- 坐标的对偶关系

$$r \to \rho^{(A+3)/2}$$

其中r是$U(r)$系统的坐标，ρ是$V(\rho)$系统的坐标。

- 波函数的对偶关系

$$u(r) \to \rho^{(A+1)/4} v(\rho)$$

其中$u(r)$是$U(r)$系统的波函数；$v(\rho)$是$V(\rho)$系统的波函数。

对偶变换：本征值

对偶势的分立的束缚态能谱本征值间的变换关系：

- 若$U(r)=\xi r^{a+1}$的本征值为

$$E=f(n_r,l,\xi)$$

其中n_r是径向量子数，则对偶势$V(\rho)=\eta\rho^{A+1}$的本征值为

$$\mathcal{E}=-\left(\frac{A+3}{2}\right)^2 f^{-1}\left(n_r,\frac{2}{A+3}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2},-\left(\frac{2}{A+3}\right)^2\eta\right)$$

其中f^{-1}表示f的反函数。

任意维空间中的量子牛顿对偶

任意维空间中的量子牛顿对偶

任意维量子牛顿对偶

- 不同维空间中的幂次势

$$U(r) = \xi r^{a+1}, \qquad n\text{-维}$$
$$V(\rho) = \eta \rho^{A+1}, \qquad m\text{-维}$$

若满足

$$\frac{a+3}{2} = \frac{2}{A+3}$$

则互为对偶势。

对偶变换

- 本征值和耦合常数的对偶关系是

$$E \to -\eta \left(\frac{2}{A+3}\right)^2$$
$$\xi \to -\mathcal{E} \left(\frac{2}{A+3}\right)^2$$

- 角动量的对偶关系

$$l + \frac{n}{2} - 1 = \frac{2}{A+3}\left(\ell + \frac{m}{2} - 1\right)$$

- 坐标和波函数的对偶关系

$$r \to \rho^{(A+3)/2}$$
$$u(r) \to \rho^{(A+1)/4} v(\rho)$$

本征值的变换

- 若n维空间中的势$U(r)=\xi r^{a+1}$的本征值为

$$E=f\left(n_r,l,\xi,n\right)$$

其中n_r是径向量子数。

它的对偶势，m维空间中的对偶势$V(\rho)=\eta\rho^{A+1}$的本征值为

$$\mathcal{E}=-\frac{4}{(a+3)^2}f^{-1}\left(n_r,\frac{2}{A+3}\left(\ell+\frac{m}{2}-1\right)+1+\frac{n}{2},-\frac{(a+3)^2}{4}\eta,m\right)$$

其中f^{-1}是f的反函数。

广义多项式中心势的量子牛顿对偶

广义多项式势的量子牛顿对偶

广义多项式中心势的量子牛顿对偶

- 两个广义多中心势

$$U(r) = \xi r^{a+1} + \sum_n \mu_n r^{b_n+1}$$

$$V(\rho) = \eta \rho^{A+1} + \sum_n \lambda_n \rho^{B_n+1}$$

若满足

$$\frac{a+3}{2} = \frac{2}{A+3}$$

$$\sqrt{\frac{2}{a+3}}(b_n+3) = \sqrt{\frac{2}{A+3}}(B_n+3)$$

则互为对偶势。

幂次满足的关系和经典力学是一样的。

对偶变换

- 本征值和耦合常数的对偶关系是

$$E \to -\eta \left(\frac{2}{A+3}\right)^2$$
$$\xi \to -\mathcal{E} \left(\frac{2}{A+3}\right)^2$$
$$\mu_n \to \left(\frac{2}{A+3}\right)^2 \lambda_n$$

- 角动量的对偶关系 $l+\frac{1}{2} \to \frac{2}{A+3}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)$
- 坐标的对偶关系 $r \to \rho^{(A+3)/2}$
- 波函数的对偶关系 $u(r) \to \rho^{(A+1)/4} v(\rho)$

本征值的变换

- 势$U(r)=\xi r^{a+1}+\sum_n \mu_n r^{b_n+1}$的本征值为

$$E=f(n_r,l,\xi,\mu_n)$$

其中n_r是径向量子数。

则对偶势$V(\rho)=\eta\rho^{A+1}+\sum_n \lambda_n \rho^{B_n+1}$的本征值为

$$\mathcal{E}=-\left(\frac{A+3}{2}\right)^2 f^{-1}\left(n_r,\frac{2}{A+3}\left(\ell+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2},-\eta\left(\frac{2}{A+3}\right)^2,\left(\frac{2}{A+3}\right)^2\lambda_n\right)$$

其中f^{-1}是f的反函数。

对偶集：$N+1$个互为对偶的N项多项式势

- $N+1$个N项广义多项式势

$$\{V_1(r), \cdots, V_P(r), \cdots, V_Q(r), \cdots, V_{N+1}(r)\}$$

互为对偶势，那么任意选取其中两个势

$$V_P(r) = A_1 r^{\alpha_1+1} + \cdots + A_i r^{\alpha_i+1} + \cdots + A_N r^{\alpha_N+1}$$
$$V_Q(r) = B_1 r^{\beta_1+1} + \cdots + B_j r^{\beta_j+1} + \cdots + B_N r^{\beta_N+1}$$

满足

$$\frac{\alpha_i+3}{2} = \frac{2}{\beta_j+3}, \quad i,j = 1, \cdots, N$$

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha_i+3}}(\alpha_m+3) = \sqrt{\frac{2}{\beta_j+3}}(\beta_n+3), \quad m,n \neq i,j$$

其中$P, Q = 1, \cdots, N+1$ 以及$m, n = 1, \cdots, N$.

$N+1$个互相对偶的N项多项式势的对偶

- 两个N项多项式势的对偶关系

$$E_P \to -B_j\left(\frac{2}{\beta_j+3}\right)^2$$

$$A_i \to -E_Q\left(\frac{2}{\beta_j+3}\right)^2$$

$$A_m \to B_n\left(\frac{2}{\beta_j+3}\right)^2$$

- 角动量的对偶关系 $$l_P+\frac{1}{2}=\frac{2}{\beta_j+3}\left(l_Q+\frac{1}{2}\right)$$
- 坐标的对偶关系 $$r_P \to r_Q^{(\beta_j+3)/2}$$
- 波函数的对偶关系 $$u_P\left(r_P\right) \to r_Q^{(\beta_j+1)/4} u_Q\left(r_Q\right)$$

例：3个两项多项式势的对偶

$$V_1(r) = A_1 r^{\alpha_1+1} + B_1 r^{\beta_1+1}$$
$$V_2(r) = A_2 r^{\alpha_2+1} + B_2 r^{\beta_2+1}$$
$$V_3(r) = A_3 r^{\alpha_3+1} + B_3 r^{\beta_3+1}$$

互为对偶，它们的幂次满足对偶关系

$$\frac{\alpha_1+3}{2} = \frac{2}{\alpha_2+3}, \quad \frac{\beta_1+3}{2} = \frac{2}{\beta_3+3}, \quad \frac{\beta_2+3}{2} = \frac{2}{\alpha_3+3}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\alpha_1+3}}(\beta_1+3) = \sqrt{\frac{2}{\alpha_2+3}}(\beta_2+3)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\beta_1+3}}(\alpha_1+3) = \sqrt{\frac{2}{\beta_3+3}}(\alpha_3+3)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\beta_2+3}}(\alpha_2+3) = \sqrt{\frac{2}{\alpha_3+3}}(\beta_3+3)$$

例：3个两项多项式势的对偶

- 本征值和耦合常数的对偶关系

$$E_1 = -A_2 \left(\frac{2}{\alpha_2+3}\right)^2, \quad A_1 = -E_2 \left(\frac{2}{\alpha_2+3}\right)^2, \quad B_1 = B_2 \left(\frac{2}{\alpha_2+3}\right)^2$$

$$E_1 = -B_3 \left(\frac{2}{\beta_3+3}\right)^2, \quad B_1 = -E_3 \left(\frac{2}{\beta_3+3}\right)^2, \quad A_1 = A_3 \left(\frac{2}{\beta_3+3}\right)^2$$

$$E_2 = -A_3 \left(\frac{2}{\alpha_3+3}\right)^2, \quad B_2 = -E_3 \left(\frac{2}{\alpha_3+3}\right)^2, \quad A_2 = B_3 \left(\frac{2}{\alpha_3+3}\right)^2$$

- 角动量的对偶关系

$$l_1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{\alpha_2+3}\left(l_2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$l_1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{\beta_3+3}\left(l_3 + \frac{1}{2}\right)$$

$$l_2 + \frac{1}{2} = \frac{2}{\alpha_3+3}\left(l_3 + \frac{1}{2}\right)$$

例：3个两项多项式势的对偶

- 坐标的对偶关系

$$r_1 \to r_2^{\frac{\alpha_2+3}{2}}$$
$$r_1 \to r_3^{\frac{\beta_3+3}{2}}$$
$$r_2 \to r_3^{\frac{\alpha_3+3}{2}}$$

- 波函数的对偶关系

$$u_1\left(r_1\right) \to r_2^{(\alpha_2+1)/4} u_2\left(r_2\right)$$
$$u_1\left(r_1\right) \to r_3^{(\beta_3+1)/4} u_2\left(r_3\right)$$
$$u_2\left(r_2\right) \to r_3^{(\alpha_3+1)/4} u_3\left(r_3\right)$$

两项都是牛顿对偶势的多项式势

- 一种特殊的情况:

$$U(r) = \xi r^{a+1} + \mu r^{2\left(\sqrt{\frac{a+3}{2}}-1\right)}$$

$$V(\rho) = \eta\rho^{A+1} + \mu\left(\frac{A+3}{2}\right)^2 \rho^{2\left(\sqrt{\frac{A+3}{2}}-1\right)}$$

互为对偶。其中

$$\frac{a+3}{2} = \frac{2}{A+3}$$

则

$$\xi r^{a+1} \text{ 和} \eta\rho^{A+1}$$

$$\mu r^{2\left(\sqrt{\frac{a+3}{2}}-1\right)} \text{ 和} \mu\left(\frac{A+3}{2}\right)^2 \rho^{2\left(\sqrt{\frac{A+3}{2}}-1\right)}$$

分别是牛顿对偶。

超越函数对偶势

- 超越函数势

$$U(r)=\xi e^{\sigma r}$$

和

$$V(\rho)=\frac{\eta}{(\rho\ln\alpha\rho)^{2}}$$

互为对偶。

超越函数对偶势

本征值、耦合常数和角动量的对偶关系

$$E \to -\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 \left[\ell\left(\ell+1\right)+\frac{1}{4}\right]$$

$$\xi \to -\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 \frac{\mathcal{E}}{\alpha^2}$$

$$l\left(l+1\right) \to \eta$$

或者等价写成

$$\mathcal{E} \to -\left(\frac{2}{\sigma}\right)^2 \alpha^2 \xi$$

$$\eta \to l\left(l+1\right)$$

$$\ell\left(\ell+1\right) \to -\left(\frac{2}{\sigma}\right)^2 E - \frac{1}{4}$$

- 坐标的对偶关系 $r \to \dfrac{2}{\sigma} \ln \alpha\rho$
- 波函数的对偶关系 $u\left(r\right) \to \rho^{-1/2} v\left(\rho\right)$

谐振子势和Coulomb势的对偶

谐振子势$U(r)=\xi r^2$和Coulomb势$V(\rho)=\frac{\eta}{\rho}$，对应于$a=1$和$A=-2$，满足对偶势的关系

$$\frac{a+3}{2}=\frac{2}{A+3}$$

- 能量和耦合常数的对偶关系

$$E\to -4\eta$$
$$\xi\to -4\mathcal{E}$$

- 角动量对偶关系 $$l+\frac{1}{2}\to 2\left(\ell+\frac{1}{2}\right)$$
- 坐标的对偶关系 $$r\to\rho^{1/2}$$
- 波函数的对偶关系 $$u(r)\to\rho^{-1/4}v(\rho)$$

由谐振子的解得到Coulomb势的解

- 谐振子的波函数

$$u_l(r) = A_l e^{-\frac{\sqrt{\xi}r^2}{2}} \xi^{(l+1)/4} r^{l+1} \, {}_1F_1\left(\frac{l}{2}+\frac{3}{4}-\frac{E}{4\sqrt{\xi}}, \frac{3}{2}+l, \sqrt{\xi}r^2\right)$$

本征值

$$E = 2\sqrt{\xi}\left(2n_r + l + \frac{3}{2}\right), \quad n_r = 0, 1, 2, \ldots$$

- 由对偶变换，可以得到Coulomb势的波函数

$$v(\rho) = A_\ell e^{-\sqrt{-\mathcal{E}}\rho}\left(2\sqrt{-\mathcal{E}}\right)^{\ell+1} \rho^{\ell+1}$$
$$\times \, {}_1F_1\left(\ell+1+\frac{\eta}{2\sqrt{-\mathcal{E}}}, 2(\ell+1), 2\sqrt{-\mathcal{E}}\rho\right)$$

和本征值

$$\mathcal{E} = -\frac{\eta^2}{4}\frac{1}{(n_r+\ell+1)^2}, \quad n_r = 0, 1, 2, \ldots$$

对偶集：例子

- 单项的幂次势 $(\alpha r^{2/3}, \dfrac{\alpha}{\sqrt{r}})$，$(\alpha r^6, \dfrac{\alpha}{r^{3/2}})$，$(\beta e^{\alpha r}, \dfrac{\beta}{(r\ln\alpha r)^2})$
- 两项幂次势

$$(\xi r^2+\frac{\mu}{r}, \frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}}, \xi r^6+\mu r^2)\text{，}(\xi r^2+\mu r, \frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{\sqrt{r}}, \frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3})$$

$$(\frac{\xi}{\sqrt{r}}+\frac{\mu}{r^{3/2}}, \xi r^{2/3}+\frac{\mu}{r^{4/3}}, \xi r^6+\mu r^4)\text{，}$$

- 三项的幂次势

$$(\xi r^2+\frac{\mu}{r}+\kappa r, \frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}}+\frac{\kappa}{r^{1/2}}, \xi r^2+\mu r^6+\kappa r^4, \frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3}+\frac{\kappa}{r^{4/3}})$$

对偶集（$\alpha r^{2/3}, \frac{\alpha}{\sqrt{r}}$）

$V(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}$

- 根号反比势$V(r) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{r}}$的波函数

$$u(r) = A_l \exp\left(-\sqrt{-E}r + \frac{\alpha}{\sqrt{-E}}\sqrt{r}\right)\left[2(-E)^{1/2}r\right]^{l+1}$$
$$\times N\left(4l+2, -\frac{\sqrt{2}\alpha}{(-E)^{3/4}}, \frac{\alpha^2}{2(-E)^{3/2}}, 0, \sqrt{2(-E)^{1/2}r}\right)$$

其中$N(\alpha, \beta, \gamma, \delta, z)$是双合流Heun函数。

对偶集 $\left(\alpha r^{2/3}, \frac{\alpha}{\sqrt{r}}\right)$

$$V(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}$$

- 根号反比势 $V(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}$ 的束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(4l+2, -\frac{\sqrt{2}\alpha}{(-E)^{3/4}}, \frac{\alpha^2}{2(-E)^{3/2}}, 0\right) = 0$$

其中

$$K_2(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma((\alpha-\gamma)/2)\,\Gamma(1+(\alpha+\gamma)/2)} \times J_{1+(\alpha+\gamma)/2}\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}, \beta, \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma, \delta - \frac{\alpha-\gamma}{2}\beta\right)$$

以及 $J_\lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-\beta x - x^2} N(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x)\, dx$

对偶集 $\left(\alpha r^{2/3}, \frac{\alpha}{\sqrt{r}}\right)$

$V(r) = \alpha r^{2/3}$

- $V(r) = \alpha r^{2/3}$的波函数

$$u_l(r) = A_l \exp\left(-\frac{3}{4}\alpha^{1/2} r^{4/3} + \frac{3E}{4\alpha^{1/2}} r^{2/3}\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\alpha^{1/4}\right)^{3(l+1)/2}$$
$$\times\, r^{l+1} N\left(3l + \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{6}E}{2\alpha^{3/4}}, \frac{3E^2}{8\alpha^{3/2}}, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\alpha^{1/4} r^{2/3}\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(3l + \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{6}E}{2\alpha^{3/4}}, \frac{3E^2}{8\alpha^{3/2}}, 0\right) = 0$$

对偶集（$\alpha r^6, \frac{\alpha}{r^{3/2}}$）

$V(r) = \frac{\alpha}{r^{3/2}}$

- $V(r) = \dfrac{\alpha}{r^{3/2}}$的波函数

$$u(r) = A_l e^{-\sqrt{-E}r} r^{l+1} N\left(4l+2, 0, 0, -\frac{4\sqrt{2}\alpha}{(-E)^{1/4}}, \sqrt{2(-E)^{1/2}}\, r\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(2(2l+1), 0, 0, -\frac{4\sqrt{2}\alpha}{(-E)^{1/4}}\right) = 0$$

对偶集 $\left(\alpha r^6, \frac{\alpha}{r^{3/2}}\right)$

$V(r) = \alpha r^6$

- $V(r) = \alpha r^6$的波函数

$$u_l(r) = A_l \left(\frac{\alpha^{1/2}}{2}\right)^{(l+1)/4} \exp\left(-\frac{1}{4}\alpha^{1/2} r^4\right) r^{l+1}$$
$$\times N\left(l+\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{E}{\sqrt{2}\alpha^{1/4}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha^{1/4} r^2\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(l+\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{E}{\sqrt{2}\alpha^{1/4}}\right) = 0$$

对偶集 $\left(\xi r^2+\frac{\mu}{r},\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}},\xi r^6+\mu r^2\right)$

$V(r)=\xi r^2+\frac{\mu}{r}$

- $V(r)=\xi r^2+\frac{\mu}{r}$的波函数

$$u_l(r)=A_l\exp\left(\frac{\xi^{1/2}r^2}{2}\right)r^{l+1}N\left(2l+1,0,\frac{-E}{\sqrt{\xi}},\frac{-2i\mu}{\xi^{1/4}},i\xi^{1/4}r\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(2l+1,0,\frac{-E}{\sqrt{\xi}},-\frac{2i\mu}{\xi^{1/4}}\right)=0$$

对偶集 $\left(\xi r^2+\frac{\mu}{r},\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}},\xi r^6+\mu r^2\right)$

$V(r)=\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}}$

- $V(r)=\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}}$的波函数

$$u_l(r)=A_l\exp\left((-E)^{1/2}r\right)r^{l+1}$$
$$\times N\left(4l+2,0,\frac{2\xi}{\sqrt{-E}},\frac{-i4\sqrt{2}\mu}{(-E)^{1/4}},(-E)^{1/4}(-2r)^{1/2}\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(4l+2,0,\frac{2\xi}{\sqrt{-E}},\frac{-i4\sqrt{2}\mu}{(-E)^{1/4}}\right)=0$$

对偶集 $\left(\xi r^2+\frac{\mu}{r},\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}},\xi r^6+\mu r^2\right)$

$V(r)=\xi r^6+\mu r^2$

- $V(r)=\xi r^6+\mu r^2$的波函数

$$u_l(r)=A_l\exp\left(\frac{\xi^{1/2}}{4}r^4\right)r^{l+1}N\left(l+\frac{1}{2},0,\frac{\mu}{2\sqrt{\xi}},\frac{iE\sqrt{2}}{2\xi^{1/4}},\frac{i\sqrt{2}}{2}\xi^{1/4}r^2\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(l+\frac{1}{2},0,\frac{\mu}{2\sqrt{\xi}},\frac{iE\sqrt{2}}{2\xi^{1/4}}\right)=0$$

对偶集 $(\xi r^2+\frac{\mu}{r},\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}},\xi r^6+\mu r^2)$

$\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}}$ 和 $\xi r^6+\mu r^2$

- 值得注意的是

$$V(r)=\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}}$$

$$V(r)=\xi r^6+\mu r^2$$

中的

$$\frac{\xi}{r} \text{ 和 } \quad \mu r^2$$

以及

$$\frac{\mu}{r^{3/2}} \text{ 和 } \quad \xi r^6$$

分别是牛顿对偶的关系，正如我们前边所提到的。

对偶集 $\left(\xi r^2+\mu r, \frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{\sqrt{r}}, \frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3}\right)$

$V(r)=\xi r^2+\mu r$

- $V(r)=\xi r^2+\mu r$的波函数

$$u_l(r)=A_l \exp\left(\frac{\xi^{1/2}}{2}r^2+\frac{\mu}{2\xi^{1/2}}r\right)r^{l+1}$$
$$\times N\left(2l+1, \frac{i\mu}{\xi^{3/4}}, -\frac{E}{\xi^{1/2}}-\frac{\mu^2}{4\xi^{3/2}}, 0, i\xi^{1/4}r\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(2l+1, \frac{i\mu}{\xi^{3/4}}, -\frac{E}{\xi^{1/2}}-\frac{\mu^2}{4\xi^{3/2}}, 0\right)=0$$

对偶集 $\left(\xi r^2+\mu r, \frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{\sqrt{r}}, \frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3}\right)$

$V(r)=\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{\sqrt{r}}$

- $V(r)=\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{\sqrt{r}}$的波函数

$$u_l(r)=A_l\exp\left((-E)^{1/2}r+\frac{\mu}{(-E)^{1/2}}\sqrt{r}\right)r^{l+1}$$
$$\times N\left(4l+2,\frac{i\sqrt{2}\mu}{(-E)^{3/4}},\frac{2\xi}{(-E)^{1/2}}-\frac{\mu^2}{2(-E)^{3/2}},0,i(-E)^{1/4}\sqrt{2r}\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(4l+2,\frac{i\sqrt{2}\mu}{(-E)^{3/4}},\frac{2\xi}{(-E)^{1/2}}-\frac{\mu^2}{2(-E)^{3/2}},0\right)=0$$

对偶集 $(\xi r^2+\mu r, \frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{\sqrt{r}}, \frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3})$

$V(r)=\frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3}$

- $V(r)=\frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3}$的波函数

$$
\begin{aligned}
u_l(r) &= A_l \exp\left(\frac{3}{4}\mu^{1/2}r^{4/3}-\frac{3E}{4}\mu^{-1/2}r^{2/3}\right) r^{l+1} \\
&\times N\left(3l+\frac{3}{2}, \frac{-i\sqrt{6}E}{2\mu^{3/4}}, \frac{3\xi}{2\mu^{1/2}}-\frac{3E^2}{8\mu^{3/2}}, 0, i\frac{\sqrt{6}}{2}\mu^{1/4}r^{2/3}\right)
\end{aligned}
$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$
K_2\left(3l+\frac{3}{2}, \frac{-i\sqrt{6}E}{2\mu^{3/4}}, \frac{3\xi}{2\mu^{1/2}}-\frac{3E^2}{8\mu^{3/2}}, 0\right)=0
$$

对偶集 $\left(\frac{\xi}{\sqrt{r}}+\frac{\mu}{r^{3/2}},\xi r^{2/3}+\frac{\mu}{r^{4/3}},\xi r^6+\mu r^4\right)$

$V(r)=\frac{\xi}{\sqrt{r}}+\frac{\mu}{r^{3/2}}$

- $V(r)=\frac{\xi}{\sqrt{r}}+\frac{\mu}{r^{3/2}}$的波函数

$$u_l(r)=A_l\left[(-E)^{1/2}r+\frac{\xi}{(-E)^{1/2}}\sqrt{r}\right]r^{l+1}$$
$$\times N\left(4l+2,\frac{i\sqrt{2}\xi}{(-E)^{3/4}},-\frac{\xi^2}{2(-E)^{3/2}},\frac{-i4\sqrt{2}\mu}{(-E)^{1/4}},i\sqrt{2r}(-E)^{1/4}\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(4l+2,\frac{i\sqrt{2}\xi}{(-E)^{3/4}},-\frac{\xi^2}{2(-E)^{3/2}},\frac{-i4\sqrt{2}\mu}{(-E)^{1/4}}\right)=0$$

对偶集 $\left(\frac{\xi}{\sqrt{r}}+\frac{\mu}{r^{3/2}}, \xi r^{2/3}+\frac{\mu}{r^{4/3}}, \xi r^6+\mu r^4\right)$

$V(r)=\xi r^{2/3}+\frac{\mu}{r^{4/3}}$

- $V(r)=\xi r^{2/3}+\frac{\mu}{r^{4/3}}$ 的波函数

$$u_l(r)=A_l\exp\left(\frac{3}{4}\xi^{1/2}r^{4/3}-\frac{3E}{4\xi^{1/2}}r^{2/3}\right)r^{l+1}$$
$$\times N\left(3l+\frac{3}{2},-\frac{i\sqrt{6}E}{2\xi^{3/4}},-\frac{3E^2}{8\xi^{3/2}},-\frac{i3\sqrt{6}\mu}{2\xi^{1/4}},i\frac{\sqrt{6}}{2}\xi^{1/4}r^{2/3}\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(3l+\frac{3}{2},-\frac{i\sqrt{6}E}{2\xi^{3/4}},-\frac{3E^2}{8\xi^{3/2}},-\frac{i3\sqrt{6}\mu}{2\xi^{1/4}}\right)=0$$

对偶集 $\left(\frac{\xi}{\sqrt{r}}+\frac{\mu}{r^{3/2}}, \xi r^{2/3}+\frac{\mu}{r^{4/3}}, \xi r^6+\mu r^4\right)$

$V(r)=\xi r^6+\mu r^4$

- $V(r)=\xi r^6+\mu r^4$的波函数

$$u_l(r)=A_l\exp\left(\frac{\xi^{1/2}}{4}r^4+\frac{\mu}{4\xi^{1/2}}r^2\right)r^{l+1}$$
$$\times N\left(l+\frac{1}{2},\frac{i\sqrt{2}\mu}{2\xi^{3/4}},-\frac{\mu^2}{8\xi^{3/2}},\frac{i\sqrt{2}E}{2\xi^{1/4}},i\frac{\sqrt{2}}{2}\xi^{1/4}r^2\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(l+\frac{1}{2},\frac{i\sqrt{2}\mu}{2\xi^{3/4}},-\frac{\mu^2}{8\xi^{3/2}},\frac{i\sqrt{2}E}{2\xi^{1/4}}\right)=0$$

对偶集 $\left(\xi r^2+\frac{\mu}{r}+\kappa r, \frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}}+\frac{\kappa}{r^{1/2}}, \xi r^2+\mu r^6+\kappa r^4, \frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3}+\frac{\kappa}{r^{4/3}}\right)$

$V(r)=\xi r^2+\frac{\mu}{r}+\kappa r$

- $V(r)=\xi r^2+\frac{\mu}{r}+\kappa r$的波函数

$$u_l(r)=A_l\exp\left(\frac{\xi^{1/2}}{2}r^2+\frac{\kappa}{2\xi^{1/2}}r\right)r^{l+1}$$
$$\times N\left(2l+1,\frac{i\kappa}{\xi^{3/4}},-\frac{E}{\xi^{1/2}}-\frac{\kappa^2}{4\xi^{3/2}},\frac{-i2\mu}{\xi^{1/4}},i\xi^{1/4}r\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(2l+1,\frac{i\kappa}{\xi^{3/4}},-\frac{E}{\xi^{1/2}}-\frac{\kappa^2}{4\xi^{3/2}},\frac{-i2\mu}{\xi^{1/4}}\right)=0$$

对偶集 $\left(\xi r^2+\frac{\mu}{r}+\kappa r, \frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}}+\frac{\kappa}{r^{1/2}}, \xi r^2+\mu r^6+\kappa r^4, \frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3}+\frac{\kappa}{r^{4/3}}\right)$

$V(r)=\frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}}+\frac{\kappa}{r^{1/2}}$

- $V(r)=\xi r^2+\frac{\mu}{r}+\kappa r$的波函数

$$u_l(r)=A_l\exp\left((-E)^{1/2}r+\frac{\kappa\sqrt{r}}{(-E)^{1/2}}\right)r^{l+1}$$
$$\times N\left(4l+2, \frac{i\sqrt{2}\kappa}{(-E)^{3/4}}, \frac{2\xi}{(-E)^{1/2}}-\frac{\kappa^2}{2(-E)^{3/2}}, \frac{-i4\sqrt{2}\mu}{(-E)^{1/4}}, i(-E)^{1/4}\sqrt{2r}\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(4l+2, \frac{i\sqrt{2}\kappa}{(-E)^{3/4}}, \frac{2\xi}{(-E)^{1/2}}-\frac{\kappa^2}{2(-E)^{3/2}}, \frac{-i4\sqrt{2}\mu}{(-E)^{1/4}}\right)=0$$

对偶集 $\frac{\left(\xi r^2+\frac{\mu}{r}+\kappa r, \frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}}+\frac{\kappa}{r^{1/2}}, \xi r^2+\mu r^6+\kappa r^4, \frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3}+\frac{\kappa}{r^{4/3}}\right)}{V(r)=\xi r^2+\mu r^6+\kappa r^4}$

- $V(r)=\xi r^2+\mu r^6+\kappa r^4$的波函数

$$u_l(r)=A_l\exp\left(\frac{\mu^{1/2}}{4}r^4+\frac{\kappa}{4\mu^{1/2}}r^2\right)r^{l+1}$$
$$\times N\left(l+\frac{1}{2},\frac{i\sqrt{2}\kappa}{2\mu^{3/4}},\frac{\xi}{2\mu^{1/2}}-\frac{\kappa^2}{8\mu^{3/2}},\frac{i\sqrt{2}E}{2\mu^{1/4}},i\frac{\sqrt{2}}{2}\mu^{1/4}r^2\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(l+\frac{1}{2},\frac{i\sqrt{2}\kappa}{2\mu^{3/4}},\frac{\xi}{2\mu^{1/2}}-\frac{\kappa^2}{8\mu^{3/2}},\frac{i\sqrt{2}E}{2\mu^{1/4}}\right)=0$$

对偶集 $\left(\xi r^2+\frac{\mu}{r}+\kappa r, \frac{\xi}{r}+\frac{\mu}{r^{3/2}}+\frac{\kappa}{r^{1/2}}, \xi r^2+\mu r^6+\kappa r^4, \frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3}+\frac{\kappa}{r^{4/3}}\right)$

$V(r)=\frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3}+\frac{\kappa}{r^{4/3}}$

- $V(r)=\frac{\xi}{r^{2/3}}+\mu r^{2/3}+\frac{\kappa}{r^{4/3}}$的波函数

$$u_l(r)=A_l \exp\left(\frac{3\mu^{1/4}}{4}r^{4/3}-\frac{3E}{4\mu^{1/2}}r^{2/3}\right)r^{l+1}$$
$$\times N\left(3l+\frac{3}{2}, -\frac{iE\sqrt{6}}{2\mu^{3/4}}, \frac{3\xi}{2\mu^{1/2}}-\frac{3E^2}{8\mu^{3/2}}, -\frac{i3\sqrt{6}\kappa}{2\mu^{1/4}}, i\frac{\sqrt{6}}{2}\mu^{1/4}r^{2/3}\right)$$

束缚态本征值的隐式表示式

$$K_2\left(3l+\frac{3}{2}, -\frac{iE\sqrt{6}}{2\mu^{3/4}}, \frac{3\xi}{2\mu^{1/2}}-\frac{3E^2}{8\mu^{3/2}}, -\frac{i3\sqrt{6}\kappa}{2\mu^{1/4}}\right)=0$$

展望

- Klein-Gordon方程、Dirac方程、规范场方程的对偶
- 场方程的对偶
- 流形间的对偶
- 随机过程的对偶

谢谢大家!