

关于哥德巴赫猜想的再猜想

提要：两位数及两位数以上的素数，可分为个位数为 1、3、7、9 四种类型。两位数及两位数以上的偶数，可分为个位数为 2、4、6、8、0 五种类型。不小于两位数、个位数为 2 的偶数，可以表示为且仅能表示为如下两种形式的素数和：两个个位数为 1 的素数和，以及个位数为 3 及 9 的素数和。例如 $72=11+61$ 及 $72=13+59$ （简记为 $2=1+1$ 及 $2=3+9$ ）。同理，个位数为 4、6、8、0 每一类偶数，皆可表示为且仅能表示为两种形式的素数和。依据这一简单事实，结合哥德巴赫猜想，不难提出进一步的猜想：任何一个大偶数可以表示为至少两对素数之和。

素数是构成自然数的基本材料，每一个素数似乎都对应于大自然中的某个奥秘。哥德巴赫猜想是关于素数与偶数关系的猜想，自 1742 年提出，数学家们曾以接力的方式接近它，至今尚未找到抵达终点的途径。看不见的接力依然在进行，这是更重要的接力。哥猜，这个看似简单的猜想何以如此困难，原因在于素数如此“随意”地散落在自然数列中，不可穷尽，它们不被完全归纳，如同大自然的本质不被完全归纳一样。没有一个公式能将素数一网打尽。在数论中，像哥德巴赫猜想一样简洁的命题还有不少。可以说，越是具有一目了然美的命题越是难以证明。数学之美近乎于道，摘下一朵花不等于得到它的美。美的本质先于表达它的语言形式而存在，无论是文字语言、艺术语言还是数学语言。当我们难以描述尽在眼前的美，一个原因是我们缺少对于它的深入的认识，另一个原因我们用于描述它的语言还没有准备好，也可能是语言之间微妙的关系还没有被清晰看见。

1-1 小于两位数的素数只有 2、3、5、7 四个，它们每一个都与其他三个不同。2 是偶数中唯一的素数。在个位数为 3 的奇数中，3、13、23 连续三个皆为素数，这在全部奇数中是唯一的。在个位数为 5 的奇数中，只有 5 为素数。大于两位数、个位数为 1、3、7、9 的奇数，连续三个必有一个为 3 的倍数，例如 11、21、31 或 37、47、57

1-2 两位数及两位数以上的素数，可表示为四种类型： $10n+1$ 、 $10n+3$ 、 $10n+7$ 、 $10n+9$ （ n 为正整数）

1-3 两位数及两位数以上的偶数，可表示为五种类型： $10n+2$ 、 $10n+4$ 、 $10n+6$ 、 $10n+8$ 、

$10(n+1)$ (n 为正整数)

2-1 偶数 $10n+2$, 即个位数为 2 的偶数, 可表示为且仅能表示为两种形式的奇数和(简

记为: $2=3+9$ 及 $2=1+1$):

$10n+2=[10(n-i)+3]+[10(i-1)+9]$ (n 为正整数, i 依次取 1 至 n 每一个值)

一共可表示为 n 对奇数和。在这 n 对奇数和中, 必有一对是素数和, 正是本文提出的猜想。

$10n+2=[10(n-i)+1]+(10i+1)$ (n 为正整数, i 依次取 1 至 n 每一个值)

一共可表示为 n 对奇数和, 在这 n 对奇数和中, 当 n 为偶数时, 有 $n/2$ 项和是相同的; 当 n 为奇数时, 有 $(n-1)/2$ 项和是相同的。

如下左列: 3、13、23、...、299、309, 两列首尾相加, 和 312 (共 30 项和)

右列: 11、21、31、...、291、301, 两列首尾相加, 和 312 (共 30 项, 其中 15 项相同)

3	309	11	301
13	299	21	291
23	289	31	281
33	279	41	271
43	269	51	261
53	259	61	251
63	249	71	241
73	239	81	231
83	229	91	221
93	219	101	211
103	209	111	201
113	199	121	191
123	189	131	181
133	179	141	171
143	169	151	161
153	159	161	151
163	149	171	141
173	139	181	131
183	129	191	121
193	119	201	111
203	109	211	101
213	99	221	91
223	89	231	81
233	79	241	71
243	69	251	61
253	59	261	51
263	49	271	41
273	39	281	31
283	29	291	21
293	19	301	11

从上表可以看出, 312 可以表示为 9 对 (3+9) 形式的素数和, 及 6 对 (1+1)

形式的素数和。

2-2 偶数 $10n+4$, 即个位数为 4 的偶数, 可表示为且仅能表示为两种形式的奇数和(简记为: $4=1+3$ 及 $4=7+7$):

$$10n+4=[10(n-i+1)+1]+[10(i-1)+3] \quad (n \text{ 为正整数, } i \text{ 依次取 } 1 \text{ 至 } n \text{ 每一个值})$$

一共可表示为 n 对奇数和。

$$10n+4=[10(n-i)+7]+[10(i-1)+7] \quad (n \text{ 为正整数, } i \text{ 依次取 } 1 \text{ 至 } n \text{ 每一个值})$$

一共可表示为 n 对奇数和, 在这 n 对奇数和中, 当 n 为偶数时, 有 $n/2$ 项和是相同的; 当 n 为奇数时, 有 $(n+1)/2$ 项和是相同的。

2-3 偶数 $10n+6$, 即个位数为 6 的偶数, 可表示为且仅能表示为两种形式的奇数和(简记为: $6=7+9$ 及 $6=3+3$):

$$10n+6=[10(n-i)+7]+[10(i-1)+9] \quad (n \text{ 为正整数, } i \text{ 依次取 } 1 \text{ 至 } n \text{ 每一个值})$$

一共可表示为 n 对奇数和。

$$10n+6=[10(n-i+1)+3]+[10(i-1)+3] \quad (n \text{ 为正整数, } i \text{ 依次取 } 1 \text{ 至 } n \text{ 每一个值})$$

一共可表示为 n 对奇数和, 在这 n 对奇数和中, 当 n 为偶数时, 有 $n/2$ 项和是相同的; 当 n 为奇数时, 有 $(n+1)/2$ 项和是相同的。

2-4 偶数 $10n+8$, 即个位数为 8 的偶数, 可表示为且仅能表示为两种形式的奇数和(简记为: $8=1+7$ 及 $8=9+9$):

$$10n+8=[10(n-i+1)+1]+[10(i-1)+7] \quad (n \text{ 为正整数, } i \text{ 依次取 } 1 \text{ 至 } n \text{ 每一个值})$$

一共可表示为 n 对奇数和。

$$10n+8=[10(n-i)+9]+[10(i-1)+9] \quad (n \text{ 为正整数, } i \text{ 依次取 } 1 \text{ 至 } n \text{ 每一个值})$$

一共可表示为 n 对奇数和, 在这 n 对奇数和中, 当 n 为偶数时, 有 $n/2$ 项和是相同的; 当 n 为奇数时, 有 $(n+1)/2$ 项和是相同的。

2-5 偶数 $10(n+1)$, 即个位数为 0 的偶数, 可表示为且仅能表示为两种形式的奇数和(简记为: $0=1+9$ 及 $0=3+7$):

$$10(n+1)=[10(n-i+1)+1]+[10(i-1)+9] \quad (n \text{ 为正整数, } i \text{ 依次取 } 1 \text{ 至 } n \text{ 每一个值})$$

一共可表示为 n 对奇数和。

$10(n+1)=[10(n-i+1)+3]+[10(i-1)+7]$ (n 为正整数, i 依次取 1 至 n 每一个值)

一共可表示为 n 对奇数和。

综上所述, 五种类型的偶数 $10n+2$ 、 $10n+4$ 、 $10n+6$ 、 $10n+8$ 、 $10(n+1)$ (n 为正整数), 每一种皆可以表示为且仅能表示为两种形式的素数和, 故本文提出如下猜想: 任何一个大偶数可以表示为至少两对素数之和。

在本文逻辑的基础上做一些讨论。我们将看到: 个位数为 3 或 7 的素数的密度, 是个位数为 1 或 9 的素数密度的 1.5 倍。

3-1 两位数及两位数以上的奇数, 可分为 $10n+1$ 、 $10n+3$ 、 $10n+7$ 、 $10n+9$ 四种类型 (n 为正整数)。

3-1-1 奇数 $10n+1$ 要么为合数, 要么为素数。如果它是合数, 由于它的个位数是 1, 显然, 它或者是两个个位数为 1 的奇数的乘积, 或者是两个个位数为 9 的奇数的乘积, 或者是一个个位数为 3 与一个个位数为 7 的奇数的乘积

(换一个表述: 个位数为 1 的合数, 能够且仅能够由三种形式奇数的乘积得到, 这三种形式奇数的乘积可简记为: $1=1\times 1$, 或 $1=9\times 9$, 或 $1=3\times 7$)

判断奇数 $10n+1$ 是否是素数, 让它除以 $(10n+1)$ 的平方根以内的个位数分别为 1、3、7、9 的所有素数, 能整除即为合数, 否则为素数。这个方法与我们熟悉的方法没有不同, 可是思路不一样。

用这个思路, 我们可以计算出 1000 以内、个位数是 1 的素数的个数:

从 11 至 1000, 个位数为 1 的奇数的个数, 一共 99 个;

从 11 至 1000, 个位数为 1 的合数的个数 (详见附后的计算表), 一共 59 个;

从 11 至 1000, 个位数为 1 的素数的个数, 一共 40 个;

从 11 至 1000, 个位数为 1 的奇数的个数, 减去合数的个数, 等于素数的个数:

$$99-59=40$$

用这样的方法, 借助计算机我们容易计算出任意给定正整数 N 以内的素数的个数。也可计算出任意给定的两个正整数 N_1 、 N_2 ($N_2 > N_1$) 之间的素数的个数。

3-1-2 奇数 $10n+3$ 要么为合数, 要么为素数。如果它是合数, 由于它的个位数是 3,

显然，它或者是一个个位数为 1 与一个个位数为 3 的奇数的乘积，或者是一个个位数为 7 与一个个位数为 9 的奇数的乘积（简记为： $3=1\times 3$ ，或 $3=7\times 9$ ）

3-1-3 奇数 $10n+7$ 要么为合数，要么为素数。如果它是合数，由于它的个位数是 7，显然，它或者是一个个位数为 1 与一个个位数为 7 的奇数的乘积，或者是一个个位数为 3 与一个个位数为 9 的奇数的乘积（简记为： $7=1\times 7$ ，或 $7=3\times 9$ ）

3-1-4 奇数 $10n+9$ 要么为合数，要么为素数。如果它是合数，由于它的个位数是 9，显然，它或者是一个个位数为 1 与一个个位数为 9 的奇数的乘积，或者是两个个位数为 3 的奇数的乘积，或者是两个个位数为 7 的奇数的乘积（简记为： $9=1\times 9$ ，或 $9=3\times 3$ ，或 $9=7\times 7$ ）

3-2 个位数为 1 的奇数，如果是合数可以表示为三对奇数的乘积

（简记为 $1=1\times 1$ ，或 $1=9\times 9$ ，或 $1=3\times 7$ ）

个位数为 9 的奇数，如果是合数可以表示为三对奇数的乘积

（简记为 $9=1\times 9$ ，或 $9=3\times 3$ ，或 $9=7\times 7$ ）

个位数为 3 的奇数，如果是合数可以表示为两对奇数的乘积

（简记为 $3=1\times 3$ ，或 $3=7\times 9$ ）

个位数为 7 的奇数，如果是合数可以表示为两对奇数的乘积

（简记为 $7=1\times 7$ ，或 $7=3\times 9$ ）

在自然数中，个位数为 1、3、7、9 的奇数分布的密度完全相同。个位数为 1 或 9 的合数对应于三种形式的奇数的乘积，而个位数为 3 或 7 的合数对应于两种形式的奇数的乘积，由此得知：个位数为 3 或 7 的素数的密度，是个位数为 1 或 9 的素数密度的 1.5 倍。

王平

初稿写于 2001 年

2016 年 5 月整理

从11至1000，个位数为1的合数的个数

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A2
3	7	21	7	13	91	13	17	221	17	23	391	23	27	621	11	11	121	31	31	961	19	19	361	29	29	841
3	17	51	7	23	161	13	27	351	17	33	561	23	37	851	11	21	231			1个	19	29	551			1个
3	27	81	7	33	231	13	37	481	17	43	731			1个	11	31	341				19	39	741			
3	37	111	7	43	301	13	47	611	17	53	901				11	41	451				19	49	931			
3	47	141	7	53	371	13	57	741			3个				11	51	561						2个			
3	57	171	7	63	441	13	67	871							11	61	671									
3	67	201	7	73	511			4个							11	71	781									
3	77	231	7	83	581										11	81	891									
3	87	261	7	93	651												5个									
3	97	291	7	103	721																					
3	107	321	7	113	791																					
3	117	351	7	123	861																					
3	127	381	7	133	931																					
3	137	411			9个																					
3	147	441																								
3	157	471																								
3	167	501																								
3	177	531																								
3	187	561																								
3	197	591																								
3	207	621																								
3	217	651																								
3	227	681																								
3	237	711																								
3	247	741																								
3	257	771																								
3	267	801																								
3	277	831																								
3	287	861																								
3	297	891																								
3	307	921																								
3	317	951																								
3	327	981																								
		33个																								

注1：A列与B列对应项相乘，乘积为C（C=A*B），如3×37=111，共33个乘积。F=D*E，共9个乘积，绿色部分是重复的乘积，在C列中已经计算过。以下同。

注2：从11至1000，个位数为1的合数的个数=33+9+4+3+1+5+1+2+1=59

从11至1000，个位数为1的奇数的个数

11	111	211	311	411	511	611	711	811	911
21	121	221	321	421	521	621	721	821	921
31	131	231	331	431	531	631	731	831	931
41	141	241	341	441	541	641	741	841	941
51	151	251	351	451	551	651	751	851	951
61	161	261	361	461	561	661	761	861	961
71	171	271	371	471	571	671	771	871	971
81	181	281	381	481	581	681	781	881	981
91	191	291	391	491	591	691	791	891	991
101	201	301	401	501	601	701	801	901	

- 注1：从11至1000，个位数为1的奇数的个数，一共99个。
- 注2：红色字体为素数，共40个。
- 注3：从11至1000，个位数为1的合数的个数，一共59个。
- 注4：从11至1000，个位数为1的奇数的个数，减去合数的个数，等于素数的个数：99-59=40
- 注5：形如（P，P+10）的孪生素数对，应当有无穷多对，很值得研究。例如31、41，及37、47等等