微分中值与积分中值关系定理

微分学中有微分中值定理，积分学中有积分中值定理，很自然会想到，微分中值定理与积分中值定理有没有什么联系呢？

首先来回顾这两个中值定理。

微分中值定理（拉格朗日中值定理）：如果函数 F（x）在[a 、b]上连续，在（a、b）内具有导数；那么在（a、b）内至少有一点 ξ_1（$a<\xi_1<b$），使得：

$$F'(\xi_1)=\frac{1}{b-a}[F(b)-F(a)]$$

积分中值定理：如果函数 f（x）在区间[a 、b]上连续，则在 [a 、b]上至少有一点 ξ_2（$a\leqslant\xi_2\leqslant b$），使得：

$$f(\xi_2)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

比较以上两式，进一步将前面提到的问题表述为：如果函数 F（x）与 f（x）具有某种联系，在同一闭区间[a 、b]上，F（x）的微分中值 ξ_1 与 f（x）的积分中值 ξ_2 会有什么关系呢？这便是

微分中值与积分中值关系定理：如果函数 f（x）在区间[A 、B]上连续且单调，F（x）是它在该区间上的原函数；将区间[A 、B]划分为多个这样的区间，在每一个这样的区间[a 、b]中 F（x）也是单调的；那么，f（x）在区间[a 、b]上的积分中值与其原函数 F（x）在同一区间上的微分中值相等。

证明如下：

首先，F（x）在[a 、b]上连续，在（a、b）内具有导数（其导函数为 f（x）），运用微分中值定理有

$$F'(\xi_1)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=f(\xi_1)\cdots\cdots①$$

由于 F（x）在[a 、b]单调，故 ξ_1（$a<\xi_1<b$）是唯一的。

其次，f（x）在区间[a 、b]上连续，运用积分中值定理有

$$f(\xi_2)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

同样，由于 f（x）在区间[a 、b]上单调，故 ξ_2（$a\leqslant\xi_2\leqslant b$）也是唯一的。

又，F（x）是 f（x）的原函数，根据牛顿—莱布尼兹公式有

$$f(\xi_2)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{b-a}[F(b)-F(a)]\cdots\cdots②$$

比较①、②两式可知，有唯一的 ξ_1、ξ_2 使：$F'(\xi_1)=f(\xi_1)=f(\xi_2)$

由于 f（x）及 F（x）在区间[a 、b]上均单调，故有：$\xi_1=\xi_2$

证毕。

王平

2003 年 11 月 4 日