本文档是对恽自求教授论文剽窃内容的详细说明。

由于恽自求教授等人涉嫌剽窃的两篇论文内容几乎完全一致，我只选择被 IEEE/ACM Transactions on Networking 录用的文章 Connected Optimal Two-Coverage of Sensor Networks 进行说明。

首先，该文章第一部分是 Introduction，第二部分是 Related Work，第三部分是 Model and Preliminaries，熟悉学术论文的人，或者仔细阅读完这三部分的人都会明白，这三部分只是论文的铺垫，不涉及主定理的证明。所以我们重点来看论文的第四部分。

首先我列出最显著的剽窃证据——8 个类似甚至完全一致的图，大部分甚至连顶点标号都没有做改变。

1. 下图是恽自求论文中的 Fig 3（第 4 页）

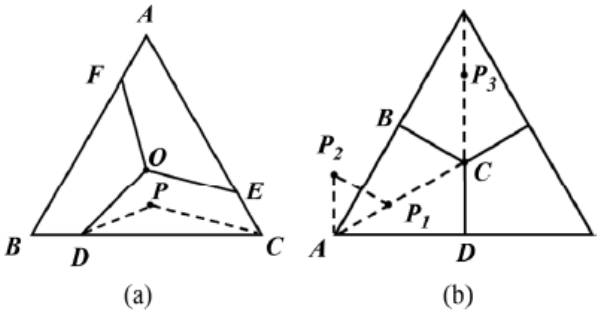

Fig. 3. (a) Type (b) and (b) type (c) Voronoi tessellation.

这其中的左右两个图分别来源于本人毕业论文的图 3.1 以及图 3.2（正文低 13 页（整个毕业论文 pdf 的 15 页，因封面和目录不计入正文页码）），显然，这是直接复制过去的。

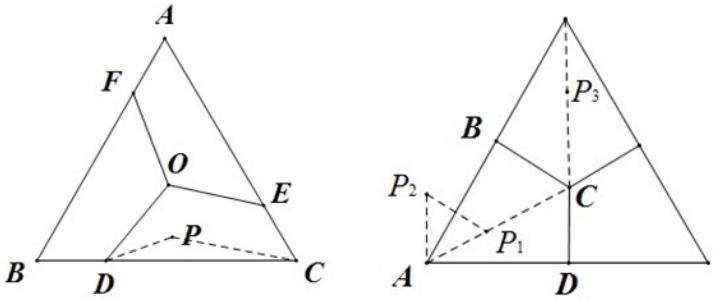

图 3.1- P_4-40 图 3.2- P_4-41

2. 下图是恽自求论文中的 Fig 4（第 5 页）

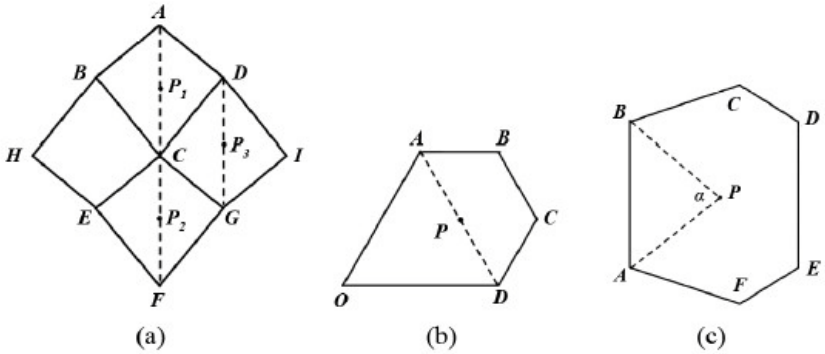

Fig. 4. Voronoi polygons illustration. These figures are also used in proofs later on. (a) Type (h). (b) Type (i). (c) Type (l).

这三个图分别来源于本人毕业论文的图 3.4（15 页）、图 3.6（17 页）以及图 3.8（18 页），显然，这也是直接复制过去的。

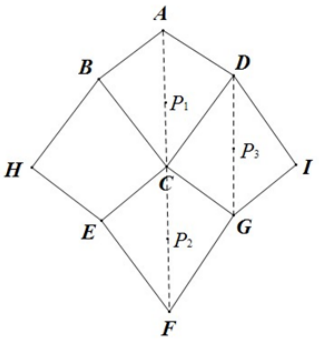

图 3.4- P_4-53

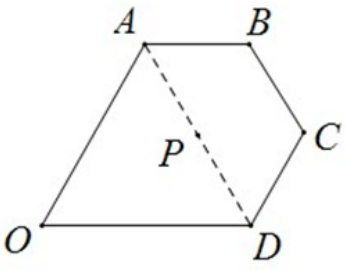

图 3.6- P_5-16

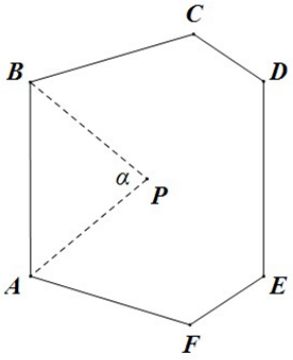

图 3.8- P_6-9

3. 下图是恽自求论文中的 Fig 5（第五页）

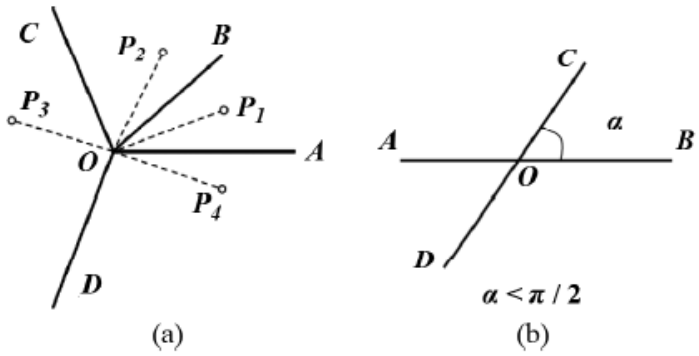

Fig. 5. (a) Impossible structure in a Voronoi tessellation when $\alpha < \pi/2$. (b) P_1, P_2, P_3 and P_4 are generating points. Solid lines are edges of Voronoi polygons generated by them.

这两个图的来源分别是本人毕业论文的图 2.4 以及图 2.3（第 9 页），图显然几乎是一样的，并且左图除了将我用的 V 改为 O 之外，其余 7 个顶点标号都完全一致。

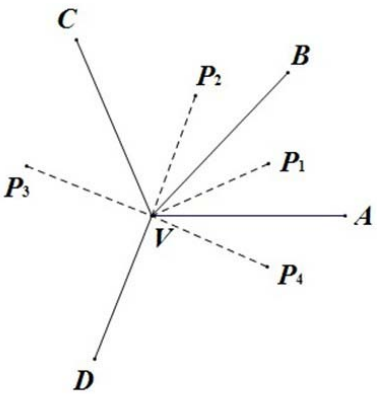

图 2.4

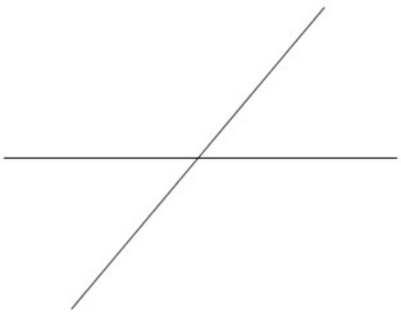

图 2.3

4. 下图是恽自求论文中的 Fig 6（第 6 页）

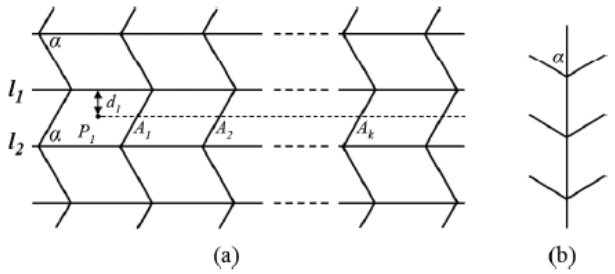

Fig. 6. Tessellation that consists of quadrilaterals where $l_1 \| l_2$ and $\alpha < \pi/2$.

Fig 6 的(a)来源于本人毕业论文的图 2.5（第 10 页）。(b)是(a)的局部，其实并无意义。

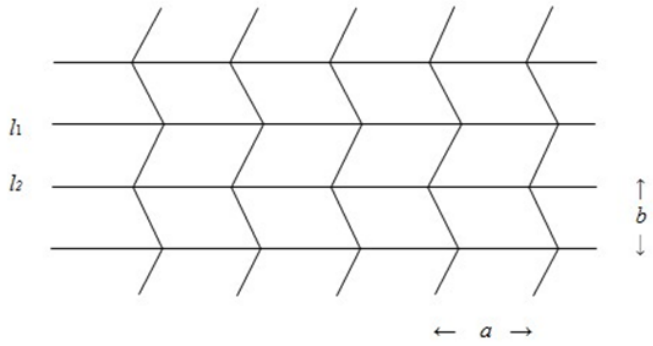

图 2.5- $P_4 - 51$

上面详细指出了恽自求论文中共 8 幅图剽窃于本人的毕业论文。如果严格按照学术规范来判断的话，只要有一副这样的图，就可以认定剽窃，何况是 8 幅。

关于论文中的图，这里附上一封恽自求教授 2010 年 7 月 14 日发给我的邮件：

Re: 论文初稿
发件人： ziqiu yun<ziqiuyun@gmail.com>
收件人：戈鋆<mathsgejun@163.com>
时间： 2010 年 07 月 14 日 12:31 (星期三)

戈鋆:

我想你已经毕业离校度暑假了吧。在澳门，有老师看到你的毕业论文，觉得你的图作得很漂亮，想问一下你的图是用 Word 中什么软件作的。你能不能告诉我？谢谢。

祝好！

恽自求

对照上面这些图来看这封邮件，别有一番风味。

该邮件截屏如下：

下面我们再来看最主要的剽窃部分：主定理、引理以及证明。

1. 下图是恽自求论文中的引理 4.2 及其证明（第 5 页）

Lemma 4.2: If a vertex O in a Voronoi tessellation is shared by four edges, the opposite angles with O as their vertex are complementary.

Proof: In Fig. 5(a), we have $\angle P_1OB = \angle P_2OB$, $\angle P_2OC = \angle P_3OC$, $\angle P_3OD = \angle P_4OD$, and $\angle P_4OA = \angle P_1OA$. Hence, $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle DOA$. Since $\angle AOB + \angle COD + \angle BOC + \angle DOA = 2\pi$, $\angle AOB + \angle COD = \angle BOC + \angle DOA = \pi$. ■

它们的出处分别是本人毕业论文中的引理 2.3 及其证明。它们需要指出的是其中提到的 Fig 5(a)以及图 2.4，在之前我们已经说明了它们之间的关系。

引理 2.3 若 Voronoi 图中的某个顶点 V 向外引出恰好四条边，则以 V 为顶点的四个角存在对角互补的关系.

如图 2.4 所示，以AV边及BV边为边的多边形内部必有且仅有一个生成点，记为P_1. 以BV边及CV边为边的多边形内部必有且仅有一个生成点，记为P_2. 以CV边及DV边为边的多边形内部必有且仅有一个生成点，记为P_3. 以DV边及AV边为边的多边形内部必有且仅有一个生成点，记为P_4.

由Voronoi多边形的定义可知，P_1与P_2关于BV所在直线对称，因而有$\angle P_1VB=\angle P_2VB$. 同理可得，$\angle P_2VC = \angle P_3VC$，$\angle P_3VD = \angle P_4VD$，$\angle P_4VA = \angle P_1VA$. 因此$\angle AVB + \angle CVD = \angle BVC + \angle DVA$. 由于$\angle AVB + \angle CVD + \angle BVC + \angle DVA = 2\pi$，因此$\angle AVB + \angle CVD = \angle BVC + \angle DVA = \pi$. □

2. 下图是恽自求论文中的引理 4.3（第 5 页）

Lemma 4.3: In a Voronoi tessellation, the structure shown in Fig. 5(b) cannot exist unless two line segments are perpendicular to each other.

显然这是本人毕业论文中推论 2.2（第 8 页）的直译。

推论 2.2 Voronoi 图中不存在图 2.3 中的结构，除非两条线段相互垂直.

3. 下图是恽自求论文中的引理 4.5（第 5 页）

Lemma 4.5: The tessellation shown in Fig. 6(a) is not a congruent Voronoi tessellation. [Any congruent Voronoi tessellation will not contain the structure shown in Fig. 6(b).]

此引理的出处是本人毕业论文中的命题 2.1（第 10 页）

命题 2.1 P_4-51 不可能是Voronoi图.

注：P_4-51 就是本人论文中的图 2.5。之前已经举证过，恽自求文中的 Fig 6(a)来源于本人论文中的图 2.5。

4. 下图是恽自求论文中的引理 4.5 的证明（第六页）

Proof: Assume the tessellation shown in Fig. 6 is a congruent Voronoi tessellation. Take a Voronoi parallelogram between lines l_1 and l_2 and assume its generating point is P_1. Denote the dashed line that goes through P_1 and is parallel to l_1 by l. l intersects edges to the right side of P_1 at points $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Denote the edges on which A_k is by e_k. We can then denote a point that is the symmetry point of P_1 about edge e_1 by P_2, a point that is the symmetry point of P_2 about edge e_2 by P_3, $\cdots$, and a point that is the symmetry point of P_k about edge e_k by P_{k+1}. From the definition of Voronoi polygon, P_k, $k \geq 2$, are the generating points of Voronoi parallelogram with edges e_{k-1} and e_k. Now we have $|P_1P_{2n+1}| = 2na\sin\alpha$. Denote the distance between P_k and l_1 as d_k. Then, $d_{2n+1} = |P_1P_{2n+1}|\cos\alpha + d_1 = d_1 + na|\sin 2\alpha|$. Notice $d_{2n+1} \to \infty$ as $n \to \infty$. Hence, there is some n that places P_n outside of the area between l_1 and l_2. This contradicts to P_k being a generating point for any $k \geq 2$. ■

很显然，这翻译自本人论文中命题 2.1 的证明（第 10 页）

假设$P_4 - 51$ 是Voronoi图. 考虑直线l_1与l_2之间的部分. 任取一个四边形, 设该四边形内部的生成点为P_1. 设该四边形中不在l_1及l_2上的边与l_2的夹角为φ, φ ≠ 0, π / 2.

取定一个方向, 不妨取图中从左至右的方向. 考虑过P_1且平行于l_1的直线l, 设其与Voronoi图中P_1右侧的边依次交于$A_1, A_2, \ldots$, 设A_k所在的边为e_k. 设P_1关于e_1的对称点为P_2, P_2关于e_2的对称点为$P_3, \ldots$, P_k关于e_k的对称点为P_{k+1}. 由Voronoi多边形的定义可知, P_k, k ≥ 2 均为Voronoi图中以e_{k-1}与e_k为边的Voronoi多边形的生成点.

容易知道$|P_1P_{2n+1}| = 2na\sin\varphi$. 设$P_k$与$l_1$的距离为$d_k$, 因此

$$d_{2n+1} = |P_1P_{2n+1}| \cdot |\cos\varphi| + d_1 = d_1 + na|\sin 2\varphi| \to \infty, n \to \infty.$$

因此总有充分大的n, 使得P_n不在l_1与l_2之间, 与P_k, $k \geq 2$ 均为l_1与l_2之间的Voronoi多边形的生成点矛盾. 因而假设不成立, $P_4 - 51$ 不可能是Voronoi图. □

4. 下图是恽自求论文中的引理 4.6 及其证明（第 6 页）

Lemma 4.6: If a vertex O in a Voronoi tessellation is shared by three edges OA, OB, and OC, then $\angle P_1OA + \angle BOC = \pi$, where P_1 is the generating point for the Voronoi polygon that consists of edges OA and OB.

Lemma 4.6 tells that the lines that go through generating points can be decided given the position of three edges that share a vertex. This lemma can be directly derived from the contents of [22, Section 2.3].

这部分的来源是本人毕业论文的引理 2.4 及其证明（第 11 页）

引理 2.4 若Voronoi图中的一个顶点V向外引出恰好三条边VA, VB, VC, 则以VA, VB为边的多边形中的生成点P_1满足$\angle P_1VA + \angle BVC = \pi$. 同理可确定另两个与$V$相关的生成点所在的直线.

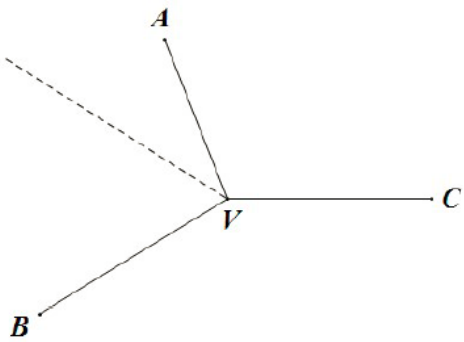

图 2.6

证明参见[11]的 2.3 节的相关部分.

5. 下面是恽自求文中的主定理（第 4 页）

Theorem 4.1: c-optimal deployment patterns have density $d^* = 4\pi/3\sqrt{3}$.

下面是本人毕业论文中的主定理（第 19 页）

定理 3.1 在等面布局的意义下, 平面的全等圆盘形成的最稀疏 2-覆盖的覆盖密度是 $4\pi/3\sqrt{3}$, 对应的覆盖布局是双层 Triangle Lattice Pattern 的组合, 并且第二层的每个节点都位于第一层 Triangle Lattice Pattern 的胞腔等边三角形的中心.

参考恽自求文中对 c-optimal deployment pattern 的定理，就会知道二者是同一个意思，甚至我的表示更精确。

接下来是第三部分，也就是对剩余情形的具体计算。对几何图形中一些量的初等计算往往会有多种方法，即使不同的人用同样的方法计算，由于个人习惯不同，书写的公式也会有各种差异，比如会产生不同的符号排列顺序（例如是 a+b 还是 b+a），比如加括号的方式不同，比如略去某些简单中间步骤的习惯方式等等，很难想象有两个人能列出完全一致的冗长的算式，更不用说许多个。下面我们将展示恽自求教授的特殊技巧，能列出众多与我论文中完全一致的长算式，甚至包括周边会经常出现惊人一致的文字说明。这部分就不做详细说明了，相信大家都能看懂。

1. 本人毕业论文：

$$r \ge \max\{PO, PD, PC, PE\} \ge \max\{PD, PC\} \ge \frac{1}{2}(PD + PC) > \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}a.$$

恽自求文：

$$r \geq \max\{PO, PD, PC, PE\} \geq \max\{PD, PC\}$$
$$\geq \frac{1}{2}(PD + PC) \geq \frac{1}{2}DC = \frac{a}{2}.$$

2. 本文论文：

$$d = \frac{\pi r^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3}} > \frac{\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{\frac{1}{4\sqrt{3}}} \geq 4\sqrt{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = d^*.$$

恽自求文：

$$d = \frac{\pi r^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3}} > \frac{\pi(\frac{a}{2})^2}{\frac{1}{4\sqrt{3}}} \geq 4\sqrt{3}\pi(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3})^2 = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3. 本人论文：

$$\frac{1}{2}x + \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2-x)\right)^2} - \frac{2-x}{2} \geq 2.$$

解之得

$$r^2 \geq \left(\frac{x^2 - 9x + 12}{2(3-x)}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2.$$

恽自求文：

$$\frac{x}{2} + \sqrt{r^2 - (\frac{\sqrt{3}x}{2})^2} + \sqrt{r^2 - (\frac{\sqrt{3}(2-x)}{2})^2} - \frac{2-x}{2} \geq 2.$$

Then, we obtain

$$r^2 \geq (\frac{x^2 - 9x + 12}{2(3-x)})^2 + \frac{3}{4}x^2.$$

4. 本人论文：

不难知道不等式右侧在$\left[2 - \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$上是关于 x 的单调递增函数. 因此

$$r \geq \sqrt{\left(\frac{x^2 - 9x + 12}{2(3-x)}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\Bigg|_{x=2-\frac{2}{\sqrt{3}}}} \approx 1.3118 > \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

因此，无论 x 取何值，都有 $d_x > d^*$.

恽自求文：

The right side of the above inequation is a monotone increasing function of x in the range of $[2-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}]$. Hence

$$r \geq \sqrt{\left(\frac{x^2-9x+12}{2(3-x)}\right)^2 + \frac{3x^2}{4}\Big|_{x=2-2/\sqrt{3}}} \approx 1.3118 > \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Hence, $d > d^*$.

5. 本人论文：

设 P 为位于菱形 $ABCD$ 内部的圆盘的圆心，为达到 1-覆盖，圆盘半径 r 须满足

$$r \geq \max\{PA, PC\} \geq \frac{1}{2}(PA+PC) > \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

因此我们有

$$d = \frac{\pi r^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \geq \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi > \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = d^*.$$

恽自求文：

Consider type (d) shown in Fig. 2(d). $ABCD$ is a rhombus with $\angle BAD = \pi/3$. Let $AB = 1$. Let P be the center point of a disk that covers $ABCD$ and P be within $ABCD$. The radius r should satisfy

$$r \geq \max\{PA, PC\} \geq \frac{1}{2}(PA+PC) > \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Then, we have

$$d = \frac{\pi r^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \geq \frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} > \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = d^*.$$

6. 本人论文：

$$2\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2}\geq\sqrt{a^2+1},$$

从而

$$r^2\geq\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{a^2+1}{4},$$

因此我们有

$$d=\frac{\pi r^2}{a}\geq\pi\left(\frac{a}{a^2+1}+\frac{a^2+1}{4a}\right)\geq\pi>\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}=d^*$$

恽自求文：

$$2\sqrt{r^2-(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}})^2}\geq\sqrt{a^2+1}$$

then

$$r^2\geq\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{a^2+1}{4}.$$

We obtain

$$d=\frac{\pi r^2}{a}\geq\pi(\frac{a}{a^2+1}+\frac{a^2+1}{4a})\geq\pi>\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}=d^*.$$

7. 本人论文：

胞腔五边形 $OABCD$ 中，$\angle O = 60°$，$\angle B = 120°$，$OA = OD$.

利用引理 2.4 可以得到，若$P_5 - 16$ 为Voronoi图，则$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 120°$，$OA = OD = 2AB = 2BC = 2CD$，且五边形内部的圆盘圆心$P$位于$AD$中点处．不妨设$AB = 1$，则$AO = 2$.

因此我们有

$$d \geq \frac{\pi |PO|^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{7} > d^* . \qquad \square$$

恽自求文：

Consider type (i) shown in Fig. 2(i). From Lemma 4.6, in Fig. 4(b), $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 2\pi/3$, $OA = OD = 2AB = 2BC = 2CD$. The generating point, P, is the middle point of AD. To achieve two coverage, length of OP cannot be larger than r. It follows that the maximal measure of pentagon $OABCD$ is $\frac{4\sqrt{3}}{7}$. Therefore, we have

$$d \geq \frac{4\sqrt{3}\pi}{7} > d^*.$$