第三章 Subordinators

Edit: zhangwei

Subordinator[1]是一类轨道上升的 Lévy 过程.第2节讨论它越过一个水平线首达时的分布,由此第三节我们得到被称为反正弦律(arcsine law)的一族重要的极限定理.第四节讨论它的样本轨道的增长速度，特别地，我们将得到相应的重对数律.最后讨论由其特征指数所决定的 Hausdofff 维数的范围.

§3.1 定义和性质

定义 3.1.1 称取值于 $[0,\infty)$ 的 Lévy 过程为 *从属过程*.这蕴含着它的轨道是单调上升的.所以有些书把轨道上升也加入定义中.

★ 从属过程的轨道[2]是单调上升的.

证明 $\forall t > s \geqslant 0, \mathbb{P}(X_t - X_s < 0) = \mathbb{P}(X_{t-s} < 0) = 0$. 故$X_t \geqslant X_s$,a.s. 注意这里只是证明了任意给定两个点几乎必然单调递增，这并不能得到单调递增性,因为每给定两个点就有零测集可能不成立，所以需要找到公共的零测集. 对于所有的有理点我们得到零测集的并仍为零测集，而从属过程轨道是右连续的,对于无理点由右连续性可以用有理点列下降逼近，故得证. □

从属过程不但是一类重要的 Lévy 过程，在马氏过程的研究中也起到重要的作用，这将在下一章看到.从属过程的由来基于以下事实: 用一个独立于马氏过程 $(M_t)_{t\geqslant 0}$ 的从属过程 $(T_t)_{t\geqslant 0}$ 做时间变换后得到的过程 $(M_{T_t})_{t\geqslant 0}$ 仍然为马氏过程.证明可见 [Feller]1971,P 346-347.这种变换由 Bochner 引进，他称为 *Subordination*.在练习 1 中我们看到将马氏过程换成 Lévy 过程相应的结果仍然成立且特征指数为 $\Psi_{X\circ T}(\lambda) = \Phi_T \circ \Psi_X(\lambda)$，证明可见 [SATO]P 199-200 或 [D.Applebaum]P 53-55.

一些作者将从属过程定义为更一般的过程，而我们这里将更一般的从属过程称为 killed subordinator.若 X 是一个从属过程，$\tau = \tau(q), (q > 0)$ 服从独立于 X 的指数分布.过程 $X^{(q)}$ 取值于 $[0,\infty]$,

$$X_t^{(q)} = \begin{cases} X_t, & t \in [0,\tau); \\ \infty, & t \in [\tau,\infty). \end{cases}$$

称为 subordinator killed at rate q(以速率 q 杀死的从属过程).若我们约定 $q = 0$ 时，$\tau = \infty$ 则显然 killed subordinator 更广泛,其包含从属过程,只是这里要注意只有当 $q = 0$ 时，

[1]通常译为从属过程.

[2]几乎必然意义下.

killed subordinator 才是从属过程，当 $q>0$ 时，它仅是马氏过程.

★ 很容易验证一个右连续取值于 $[0,\infty]$ 的过程 $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ 为 subordinator killed at rate q 当且仅当 $\mathbb{P}(Y_t<\infty)=\mathrm{e}^{-qt}$,在 $Y_t<\infty$ 条件下,增量 $Y_{t+s}-Y_t$ 和 $\sigma(Y_v, 0\leqslant v\leqslant t)$ 相互独立且和 Y_s 有相同的分布.

证明 $\mathbb{P}(Y_t<\infty)=\mathbb{P}(t<\tau)=\mathrm{e}^{-qt}$. 余者显然. □

从现在开始本章假设 X 是从属过程.稍后再给出例子.

我们可以用 Laplace 变换来分析和从属过程相关的函数和测度的性质，这里不采用 Fourier 变换主要是因为从属过程仅取值于 $[0,\infty)$.

★ X 的无穷可分性蕴含着它的 Laplace 变换可以表示为:

$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\lambda X_t}=\exp\{-t\Phi(\lambda)\}\ (\lambda\geqslant 0), \tag{3.1.1}$$

这里 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 称为 Laplace 指数或者称为累积量.

证明 $\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\lambda X_1}=\exp\{-\Phi(\lambda)\}$,这里的 Φ 即是 (3.1.1) 的 Φ. 由 X 的独立平稳增量性显然对任意的有理数有: $\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\lambda X_t}=\exp\{-t\Phi(\lambda)\}$. 对于无理数利用 X 的右连续性，(3.1.1)式对于 t 为无理数也成立. □

★ X 是有界变差的(指在有界闭区间上几乎必然具有有界变差)且几乎必然没有向下的跳.进而跳测度 Π 支撑在 $[0,\infty)$ 上且满足

$$\int_0^\infty (1\wedge x)\Pi(\mathrm{d}x)<\infty. \tag{3.1.2}$$

证明 由于 X 单调递增，而单调函数在闭区间上具有有界变差，故 X 具有有界变差.由单增性还可得到 X a.s. 没有向下的跳，故 $\Pi(-\infty,0)=0$，即 Π 支撑在 $[0,\infty)$ 上.再根据 X 具有有界变差以及第一章 §1 P 15 知，Π 满足

$$\int_0^\infty (1\wedge x)\Pi(\mathrm{d}x)<\infty.$$

□

★ X 的特征指数可以表示为

$$\Psi(\lambda)=-\mathrm{i}\mathrm{d}\lambda+\int_0^\infty(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x})\Pi(\mathrm{d}x)\ (\lambda\in\mathbb{R}), \mathrm{d}\ \text{称为漂移系数}.$$

函数 $\lambda\to\Psi(\lambda)$ 和 $\lambda\to\mathbb{E}(\exp(\mathrm{i}\lambda X_t))$ 可以解析延拓到上半平面，因此 $\mathbb{E}(\exp(\mathrm{i}\lambda X_t))=\exp(-t\Psi(\lambda)), \mathrm{Im}(\lambda)\geqslant 0$.根据 (3.1.1) 有

$$\Phi(\lambda)=\Psi(\mathrm{i}\lambda)=\mathrm{d}\lambda+\int_0^\infty(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})\Pi(\mathrm{d}x)\ (\lambda\geqslant 0). \tag{3.1.3}$$

证明 由第一章 §1 P 16 页显然特征指数有上述表示.再由特征指数的定义 $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda X_t}) = \exp(-t\Psi(\lambda))$ 和 (3.1.1) 显然得到 (3.1.3). □

★ 定义 Lévy 测度的尾为: $\overline{\Pi}(x) = \Pi((x,\infty))$，我们可以得到基于 Lévy 测度的尾的 Laplace 变换的 Lévy-Khintchine 公式:

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = \mathrm{d} + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\overline{\Pi}(t)\mathrm{d}t.$$

证明 首先，

$$\Phi(\lambda) = \mathrm{d}\lambda + \int_0^\infty (1-\mathrm{e}^{-\lambda x})\Pi(\mathrm{d}x).$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (1-\mathrm{e}^{-\lambda x})\Pi(\mathrm{d}x) = \int_0^\infty \Pi(\mathrm{d}x)\int_0^x \mathrm{d}[1-\mathrm{e}^{-\lambda t}] \\
\overset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \; &\int_0^\infty \left[\int_t^\infty \Pi(\mathrm{d}x)\right]\mathrm{d}[1-\mathrm{e}^{-\lambda t}] = \lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\overline{\Pi}(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

于是得到

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda} = \mathrm{d} + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\overline{\Pi}(t)\mathrm{d}t.$$

□

★ (3.1.2) 等价于 $\int_0^1 \overline{\Pi}(t)\mathrm{d}t < \infty$.

证明

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty (1\wedge x)\Pi(\mathrm{d}x) = \int_0^1 x\Pi(\mathrm{d}x) + \int_1^\infty \Pi(\mathrm{d}x) \\
= \; &\int_0^1 \Pi(\mathrm{d}x)\int_0^x \mathrm{d}t + \overline{\Pi}(1) = \int_0^1 \mathrm{d}t\int_t^1 \Pi(\mathrm{d}x) + \overline{\Pi}(1) \\
= \; &\int_0^1 (\overline{\Pi}(t) - \overline{\Pi}(1))\mathrm{d}t + \overline{\Pi}(1) = \int_0^1 \overline{\Pi}(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

★ 由第一章 §1 命题 2 有 $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} \dfrac{\Psi(\lambda)}{\lambda} = -\mathrm{i}\mathrm{d}$. 这蕴含着 $\dfrac{X_t}{t} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathrm{d}, (t\to 0+)$.且有 $\mathrm{d} \geqslant 0$.

证明 对任意的 $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\frac{X_t}{t}}) &= \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda}{t}X_t}) = \exp\left(-t\Psi\left(\frac{\lambda}{t}\right)\right) \\
&\to \exp(-(-\mathrm{i}\mathrm{d})\lambda) = \exp(\mathrm{i}\mathrm{d}\lambda)\ (t\to 0+).
\end{aligned}$$

由连续性定理: $\dfrac{X_t}{t}\xrightarrow{\mathscr{D}}\mathrm{d}\ (t\to 0+)$. 而 d 为常数故等价于以概率收敛于 d. 又由于从属过程取值于 $[0,\infty)$ 显然有 $\mathrm{d}\geqslant 0$. □

相反地，若一个 Lévy 过程它的特征指数 Ψ 具有 (3.1.3) 式的表示且 $\int_0^\infty(1\wedge x)\Pi(\mathrm{d}x)<\infty,\mathrm{d}\geqslant 0$. 则它一定是一个从属过程且此从属过程的 Laplace 指数为 Φ. 这是因为若它已经有 (3.1.3) 式的表示，则其几乎必然只有正跳，而漂移系数也非负 ($\mathrm{d}\geqslant 0$) 故其几乎必然地取值于 $[0,\infty)$. 我们称 (3.1.3) 式为从属过程的 Lévy-Khintchine 公式.

★ Φ 是凹函数且 Φ' 完全单调[3].

证明 由 (3.1.3) 显然被积函数的各阶导函数连续，Φ 的各阶导数 (包含 0 阶) 在 $[0,\infty)$ 上收敛，且 Φ 的各阶导数在 $(0,\infty)$ 上内闭一致收敛.满足积分号下求导的条件，

$\int_0^\infty -x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\Pi(\mathrm{d}x)<0$, 故 Φ 是凹的.而根据 n 的奇偶性显然 Φ' 是完全单调的. □

★ 更一般地，用 $\Phi^{(q)}$ 表示 Subordinator killed at rate q 的特征指数，则 $\Phi^{(q)}=\Phi+q$.

证明 根据定义,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda X_t^{(q)}}] &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda X_t}\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}]=\mathbb{P}(t<\tau)\mathrm{e}^{-t\Phi(\lambda)}\\ &= \mathrm{e}^{-qt}\mathrm{e}^{-t\Phi(\lambda)}=\exp(-t[q+\Phi(\lambda)])=\exp(-t\Phi^{(q)}(\lambda)).\end{aligned}$$

□

下面举一些从属过程的例子.

例 3.1.1 泊松过程.强度 $c>0$.

根据第一章 § 1 P 12 有 $\Psi(\lambda)=c(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda})$,故 $\Phi(\lambda)=c(1-\mathrm{e}^{-\lambda})$，即此时 $\mathrm{d}=0,\Pi(\mathrm{d}x)=c\delta_1(\mathrm{d}x)$. 由 Lévy-Khintchine 公式知其为从属过程.对于复合泊松过程 $\sum_{i=1}^{X_t}\xi_i$ 不一定是复合泊松过程,但若 ξ_i 取值非负则其为从属过程,由第一章 §1 P 12 易知 $\Psi(\lambda)=c\int_0^\infty(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})v(\mathrm{d}x)$, 即此时 $\mathrm{d}=0,\Pi(\mathrm{d}x)=cv(\mathrm{d}x)$. 注意到 $v(\mathrm{d}x)$ 是概率测度显然满足 (3.1.2) 故为从属过程.

例 3.1.2 稳定从属过程.参数 $\alpha\in(0,1)$.

根据分部积分或积分号下求导有,

$$\Phi(\lambda)=\lambda^\alpha=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})x^{-1-\alpha}\mathrm{d}x.$$

[3] $f\in C^\infty(0,\infty)$ 称 f 完全单调若 $(-1)^n f^{(n)}(x)\geqslant 0,\forall n\in\mathbb{N},\forall x>0$.

显然 $\mathrm{d}=0,\Pi(\mathrm{d}x)=\dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-1-\alpha}\mathrm{d}x$ $(\alpha\in(0,1))$.显然满足 (3.1.2) 故其为从属过程.对于 $\alpha=1$ 的情形显然是从属过程.

例 3.1.3 伽马过程. $a,b>0$. 下述积分称为 Frullani 积分.

$$\Phi^{(a,b)}(\lambda)=a\log\left(1+\frac{\lambda}{b}\right)=\int_0^\infty(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})ax^{-1}\mathrm{e}^{-bx}\mathrm{d}x.$$

证明 根据积分号下求导(逐项积分[4]也可.)有, $[\Phi^{(a,b)}(\lambda)]'_\lambda=\dfrac{a}{b+\lambda}$. 又 $\Phi^{(a,b)}(0)=0$. 从而 $\Phi^{(a,b)}(\lambda)=a\log\left(1+\dfrac{\lambda}{b}\right)$. □

此时 $\mathrm{d}=0,\Pi(\mathrm{d}x)=ax^{-1}\mathrm{e}^{-bx}\mathrm{d}x$,显然满足 (3.1.2) 故其为从属过程.

★ 从属过程是暂留的.

证明 由 (3.1.1) ,即 $\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\lambda X_t}=\mathrm{e}^{-t\Phi(\lambda)}$.令 $t\uparrow\infty$, 则 $X_t(\omega)\uparrow A(\omega)$.故由 (3.1.1) 有: $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda A(\omega)}]=\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda A(\omega)}\mathbf{1}_{\{A(\omega)<\infty\}}]=0$.于是[5] $\mathbb{P}(A(\omega)<\infty)=0$. 即 $\mathbb{P}(\lim\limits_{t\to\infty}X_t<\infty)=0$.等价于 $\mathbb{P}(\lim\limits_{t\to\infty}X_t=\infty)=1$.根据第一章定理 19 知 从属过程是暂留的. □

由暂留的定义，从属过程的位势测度[6] 为 Radon 测度.即对任意的紧集 A,

$$U(0,A)=\mathbb{E}\left(\int_0^\infty\mathbf{1}_{\{X_t\in A\}}\mathrm{d}t\right)<\infty.$$

注意到位势测度的 Laplace 变换为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_U(\lambda)&=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\lambda x}U(\mathrm{d}x)=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbb{E}_0\left(\int_0^\infty\mathbf{1}_{\{X_t\in\mathrm{d}x\}}\mathrm{d}t\right)\\&=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\lambda x}\int_0^\infty\mathbb{P}_0(X_t\in\mathrm{d}x)\mathrm{d}t=\int_0^\infty\mathrm{d}t\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbb{P}_0(X_t\in\mathrm{d}x)\\&=\int_0^\infty\mathbb{E}_0(\mathrm{e}^{-\lambda t})\mathrm{d}t=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t\Phi(\lambda)}\mathrm{d}t=\frac{1}{\Phi(\lambda)}.\end{aligned}$$

位势测度的分布函数称为 *更新函数*.定义 $T(x)=T_{(x,\infty)}$ 表示从属过程超过 x 的首达时，即: $T(x)=\inf\{t>0,X_t\in(x,\infty)\}$. 由于 X_t 是递增的，我们有

$$\mathscr{U}(x)=U([0,x])=\mathbb{E}\left(\int_0^\infty\mathbf{1}_{\{X_t\in[0,x]\}}\mathrm{d}t\right)=\mathbb{E}\int_0^{T_x}\mathrm{d}t=\mathbb{E}[T(x)].$$

---

[4]利用 $1-\mathrm{e}^{-\lambda x}=-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-\lambda)^k}{k!}x^k$

[5]否则,$\mathbb{P}(A(\omega)<\infty)=\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A(\omega)<n\right)>0$. 则必 $\exists$ n, s.t. $\mathbb{P}(A(\omega)<n)>0$.于是 $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda A(\omega)}\mathbf{1}_{\{A(\omega)<\infty\}}]\geqslant\mathrm{e}^{-\lambda n}\mathbb{P}(A(\omega)<n)>0$. 矛盾!

[6]为简单起见以后用 U 表示位势测度，用 U^0 表示位势算子.

根据 $T(x+y) \leqslant T(x) + T(x+y) \circ \theta_{T(x)}$ 及强马氏性和空间齐次性有

$$\begin{aligned}\mathscr{U}(x+y) &= \mathbb{E}[T(x+y)] \leqslant \mathbb{E}[T(x)] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[T(x+y) \circ \theta_{T(x)} | \mathscr{F}_{T(x)}]] \\ &= \mathbb{E}[T(x)] + \mathbb{E}[\mathbb{E}_{X_{T(x)}} T(x+y)] \leqslant \mathbb{E}[T(x)] + \mathbb{E}[\mathbb{E}_x[T(x+y)]] \\ &= \mathbb{E}[T(x)] + \mathbb{E}_0[T(y)] = \mathscr{U}(x) + \mathscr{U}(y).\end{aligned}$$

即 $\mathscr{U}(x)$ 具有次可加性.下面我们举例说明这里的不等号可以严格取到，即 $\mathscr{U}(x+y)$ 可以严格小于 $\mathscr{U}(x) + \mathscr{U}(y)$.

例 3.1.4 $\{B_t\}$ 是标准布朗运动,令 $G(z) = \inf\{s \geqslant 0; B_s > z\}$,显然利用布朗运动的独立平稳增量性可得 $\{G(z)\}_{z\geqslant 0}$ 是一个从属过程.定义 $T(y) = \inf\{s \geqslant 0; G(s) > y\}$.故

$$\mathbb{P}(T(y) \leqslant z) = \mathbb{P}(G(z) > y) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant y} B_s \leqslant z\right).$$

而根据反射原理, $\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant y} B_s$ 的 p.d.f 为

$$f(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2y}\right\}, y > 0,$$

于是

$$\mathbb{E}[T(y)] = \int_0^\infty z \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2y}\right\} = \sqrt{\frac{2y}{\pi}}, y > 0.$$

由初等不等式 $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y},\ x, y > 0$ 即知 $\mathscr{U}(x+y) < \mathscr{U}(x) + \mathscr{U}(y)$.

例 3.1.5 一个更简单的例子是对于泊松过程, $\forall x, y < 1$ 且 $x + y < 1$,则对任意的轨道都有 $T(x) = T(y) = T(x+y) = \tau > 0$.($\tau$ 为停时且几乎必然大于0) 故 $\mathbb{E}(\tau) = \mathbb{E}[T(x+y)] < \mathbb{E}[T(x)] + \mathbb{E}[T(y)] = 2\mathbb{E}[\tau]$.

下面建立更新函数和 Laplace 指数的一个比较.对于 $\forall f(x), g(x) > 0$, 记 $f \asymp g$ 若 $\exists c > 0$, s.t. $cf(x) \leqslant g(x) \leqslant \frac{f(x)}{c}, \forall x$. 显然只要存在 $M_1, M_2 > 0$, s.t. $M_1 f(x) \leqslant g(x) \leqslant M_2 f(x), \forall x$ 就有 $f \asymp g$.

命题 3.1.1 我们有

$$\mathscr{U}(x) \asymp \frac{1}{\Phi(\frac{1}{x})} \text{ 且 } \frac{\Phi(x)}{x} \asymp I(\frac{1}{x}) + \mathrm{d}.$$

其中 $I(x) = \int_0^x \bar{\Pi}(t)\mathrm{d}t$, d 为漂移系数.

证明 只需证明上下方分别控制即可.

(i)对 $\forall\lambda>0$,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\mathscr{U}\left(\frac{y}{\lambda}\right)\mathrm{d}y=\int_0^\infty \lambda\mathrm{e}^{-\lambda z}\mathscr{U}(z)\mathrm{d}z=\int_0^\infty U([0,z])\mathrm{d}[1-\mathrm{e}^{-\lambda z}]\\
=\ &\int_0^\infty\int_0^z U(\mathrm{d}x)\mathrm{d}\left[1-\mathrm{e}^{-\lambda z}\right]=\int_0^\infty U(\mathrm{d}x)\int_x^\infty \mathrm{d}\left[1-\mathrm{e}^{-\lambda z}\right]\\
=\ &\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}U(\mathrm{d}x)=\mathscr{L}_U(\lambda)=\frac{1}{\Phi(\lambda)}.
\end{aligned}\tag{3.1.4}
$$

由于 $\mathscr{U}$ 递增，故由 (3.1.4) 式

$$
\frac{1}{\Phi(\lambda)}\geqslant\int_k^\infty \mathrm{e}^{-y}\mathscr{U}\left(\frac{y}{\lambda}\right)\geqslant\mathscr{U}\left(\frac{k}{\lambda}\right)\int_k^\infty \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-k}\mathscr{U}\left(\frac{k}{\lambda}\right),
$$

故

$$
\frac{\mathrm{e}^k}{\Phi(\lambda)}\geqslant\mathscr{U}\left(\frac{k}{\lambda}\right),\forall\lambda,k>0.\tag{3.1.5}
$$

令 $k=1,\lambda=\frac{1}{x}$ 有 $\mathscr{U}(x)\leqslant\frac{\mathrm{e}}{\Phi\left(\frac{1}{x}\right)}$.

(ii)下面证明另一个方向.由于 Φ 是凹函数，故 $\Phi'(\lambda)$ 关于 λ 递减，非负.故有[7]

$$
\Phi(\lambda)\leqslant k\Phi\left(\frac{\lambda}{k}\right),\ \forall\lambda>0,k>1\tag{3.1.6}
$$

于是对于 $\forall x>0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Phi(\lambda)}&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\mathscr{U}\left(\frac{y}{\lambda}\right)\mathrm{d}y\leqslant\mathscr{U}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\int_0^x \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y+\int_x^\infty \mathrm{e}^{-y}\mathscr{U}\left(\frac{y}{\lambda}\right)\mathrm{d}y\\
&\leqslant\mathscr{U}\left(\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{1}{\Phi(\frac{\lambda}{2})}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\frac{y}{2}}\mathrm{d}y\\
&\leqslant\mathscr{U}\left(\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{1}{\Phi(\frac{\lambda}{2})}2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\leqslant\mathscr{U}\left(\frac{x}{\lambda}\right)+\frac{4}{\Phi(\lambda)}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.
\end{aligned}
$$

令 $x=2\log 8$, 则 $4\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$. 故

$$
\frac{1}{\Phi(\lambda)}\leqslant 2\mathscr{U}\left(\frac{2\log 8}{\lambda}\right),\ \forall\lambda>0.
$$

由 (3.1.6)有 $\Phi(\lambda)\leqslant 2\log 8\Phi\left(\frac{\lambda}{2\log 8}\right),\forall\lambda>0$.于是令 $x=\frac{\lambda}{2\log 8}>0$ 有

$$
\mathscr{U}(x)\geqslant\frac{\lambda}{4\log 8}\frac{1}{\Phi(\frac{1}{x})},\ \forall x>0.
$$

[7]令 $f(\lambda)=\Phi(\frac{\lambda}{k})-\frac{1}{k}\Phi(\lambda)$, 显然 $f'(\lambda)\geqslant 0$.即得.

由 (i)(11)可得 $\mathscr{U}(x) \asymp \frac{1}{\Phi(\frac{1}{x})}$.

第二个式子的证明完全类似，利用下面的等式[8]即可

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\left(I\left(\frac{y}{\lambda}\right)+\mathrm{d}\right)=\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}, \lambda>0.$$

□

最后，若 Φ 在 $0+$(相应地 ∞)处正则变化，指数为 $\alpha \in [0,1]$. 由 Tauberian 定理我们可以得到命题 3.1.1 的加强形式.

$$\Gamma(1+\alpha)\mathscr{U}(x) \sim \frac{1}{\Phi(\frac{1}{x})},\ x \to \infty(\text{相应地 } x \to 0+).$$

进一步应用单调密度定理，若 $\alpha < 1$,则 Levy 测度尾的渐近形式为

$$\Gamma(1-\alpha)\bar{\Pi}(x) \sim \Phi(\frac{1}{x}),\ x \to \infty(\text{相应地 } x \to 0+).$$

证明 由于 $\mathscr{L}_U(\lambda)=\frac{1}{\Phi(\lambda)}$, 于是$\mathscr{L}_U(\frac{1}{x})=\frac{1}{\Phi(\frac{1}{x})}$. 由 Φ 在 0 处正则变化，故

$$\Phi(x) \sim x^\alpha l\left(\frac{1}{x}\right)\ (x \to 0+),\ l(x)\text{在 }\infty\text{处缓慢变化}.$$

于是 $\frac{1}{\Phi(\frac{1}{x})} \sim \frac{1}{x^{-\alpha}l(x)}$, $x \to \infty$.即有

$$\mathscr{L}_U\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^{-\alpha}l(x)}=\frac{x^\alpha}{l(x)}.$$

又有 Tauberian 定理有 $\mathscr{U}(x) \sim \frac{x^\alpha}{l(x)\Gamma(1+\alpha)}$. 因此我们得到

$$\mathscr{U}(x) \sim \frac{\mathscr{L}_U\left(\frac{1}{x}\right)}{\Gamma(1+\alpha)} \Rightarrow \Gamma(1+\alpha)\mathscr{U}(x) \sim \mathscr{L}_U\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\Phi(\frac{1}{x})}.$$

进一步，根据 $\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}=\mathrm{d}+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\bar{\Pi}(x)\mathrm{d}x$ 知 $\frac{\Phi(\lambda)}{\lambda}$ 是测度 $\mathrm{d}\delta_0(\mathrm{d}x)+\bar{\Pi}(x)\mathrm{d}x=U_1(\mathrm{d}x)$ 的 Laplace 变换.

由 Φ 在 0 处正则变化有 $\mathscr{L}_{U_1}(x)=\frac{\Phi(x)}{x} \sim x^{\alpha-1}l\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \to 0+$.

根据 Tauberian 定理，$\mathscr{U}(x) \sim \frac{x^{1-\alpha}l(x)}{\Gamma(2-\alpha)}$. 再利用单调密度定理有

$$\bar{\Pi}(x) \sim \frac{(1-\alpha)x^{-\alpha}l(x)}{\Gamma(2-\alpha)}=\frac{x^{-\alpha}l(x)}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

即

$$\Gamma(1-\alpha)\bar{\Pi}(x) \sim x^{-\alpha}l(x) \sim \Phi(\frac{1}{x}),\ x \to \infty.$$

另一种情形完全类似. □

[8]利用 Fubini 定理和 P 72最后一行等式立得.

参考文献

[1] J.Bertoin. *Levy Processes*, Cambridge University Press, 1996.

[2] J.Bertoin. *Subordinators: Examplea and Applications*. Springer,1998.

[3] S.Bochner. *Harmonic analysis and the theory of probability*. University of California Press,1955.

[4] W.E.Feller. *An introduction to probability theory and its applications,2nd edn,vol.2*. New York,1971.

[5] E.Sato. *Levy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge University Press,1999.

[6] D.Applebaum. *Levy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press,2004.