生命科学中的数量化研究

生命科学与数学

陈兰荪

中国科学院数学与系统科学研究院

个人网页：chenlansun.com

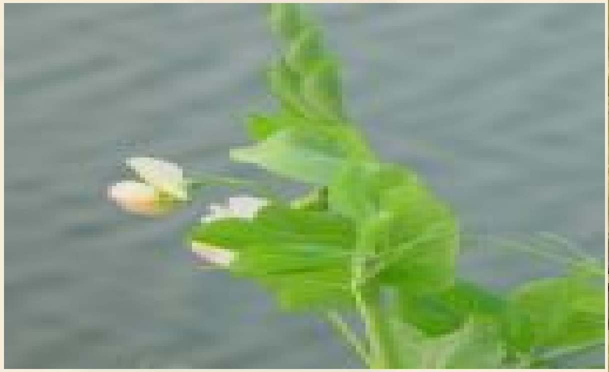
1.数据发现:

"生物统计":

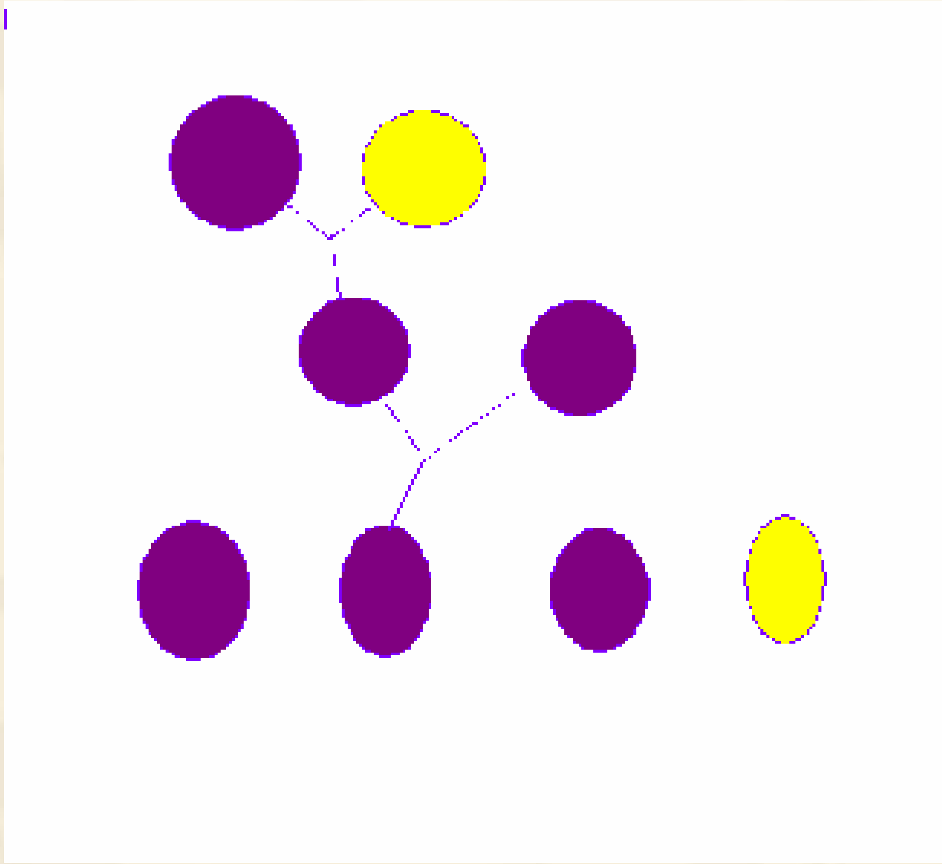
1886年孟德尔豌豆试验(为期八年):

挑选两种有不同遗传性状的豌豆,

黄花豌豆(黄豆荚)和紫花豌豆(绿豆荚)做杂交试验,




Hardy-Weinberg平衡原理



2.种群增长规律

❖ 人口模型

英国神父马尔萨斯Malthus(1766-1834)研究人口增长模型，他出版《人口论》一书提出“人口按几何级数增长”理论，就是用数学模型推断的结论，所用的数学模型为：

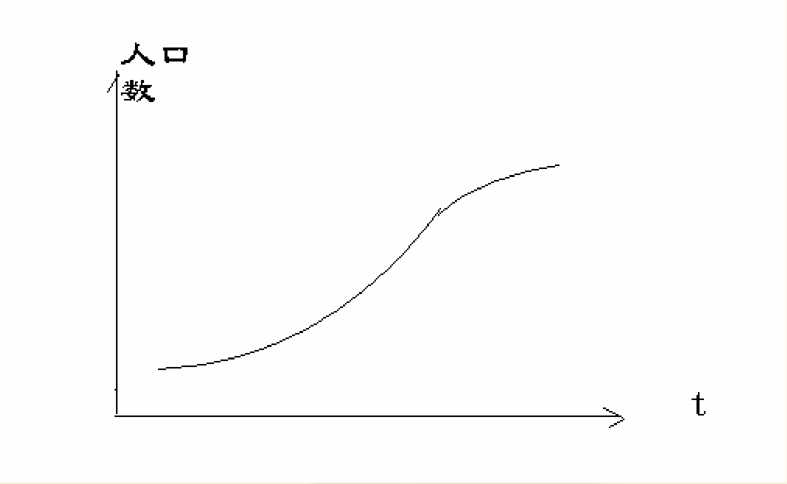
$$\frac{dx}{dt} = rx \qquad r = a - b$$ 出生率-死亡率

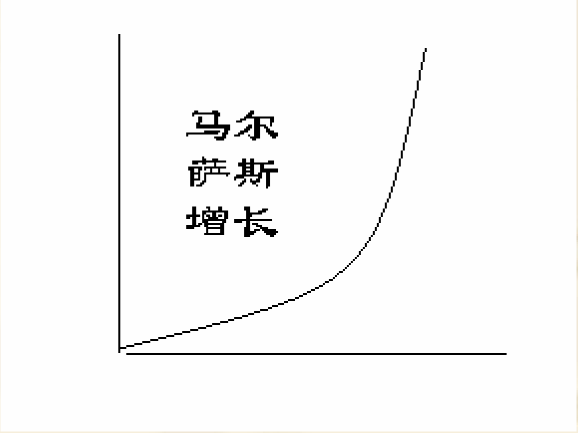
其解为：

$$x(t) = x(0)e^{rt}$$

人口增长的实测数(全球人口总数量)

公元前6000年	人口为2千万	每1600年人口增长一倍
公元初	1亿5千万	
公元1600年	5亿	每200年人口增长一倍
1800年	9亿	工业革命
1900年，	16亿	
1965年	35亿	
1977年	43亿	用模型计算到2000年人口超过70亿，





种内竞争

❖Logistic模型

1938年Verhulst-Pearl

进一步考虑了种内争，由于食物的局限，当种群密度增大时，发生对资源的争夺而使种群增长速度减慢，他们用以下模型来描述

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - \frac{x}{K})$$

- 种间竞争:

Voltera捕食模型

1925年意大利生物学家**D.Ancona**发现，在第一次世界大战期间亜得里亜海北部捕获的食肉鱼**(** 鲨鱼**)**的比例比过去有所上升，

而被食肉鱼所食用的鱼(吃草鱼)比例则有所下降，人们普遍认为是因为战争期间捕鱼量减少的缘故，但是为什么捕鱼量减少对大鱼更为有利呢？这个问题使得这位生物学家百思不解，请教了当时有名的数学家Voltera，当时Voltera用以下微分方程：

$$\frac{dx}{dt} = -y - axy \qquad \frac{dy}{dt} = x + bxy$$

解性质的研究，回答了生物学家D. Ancona的问题。

另一个例子：在Voltera同时，加拿大一植物学家从多年的记录发现在加拿大北部山区枫树林，有个奇怪的现象，这片枫树林每隔12年秃叶一次，在这一年整片枫树林很少有树叶，经研究原因出在树林中有一种吃叶子的害虫-冬尺蛾，可以想象在树叶茂盛时，虫子有丰富食物，数量增长很快，虫子越来越多，虫子多了，吃叶子就多，叶子变少，直到光秃，虫子缺食，大量虫子死亡，形成：虫少叶 多，叶多虫增，

虫多叶减，叶少虫亡，周而复始的周期现象，但为什么是12年一周期?这就是数量的研究，用数学方法类似于Voltera得到解决。



- 在北美洲有一类生命周期非常长的『十七年蝉』（右图），它的幼虫在地底下整整生活十七年以后，才会爬出地面羽化成成虫，然后交配、产卵，接着就死亡了。于是，同一地区每隔十七年，就会出现数以百万计的十七年蝉，大量伤害幼树,而中间十六年完全不见踪影！伤害对树林影响多大？

生存竞争-适者生存

赤拟谷盗

杂拟谷盗

- 生存竞争高斯实验
- 1934年生物学家高斯做了个实验，他把两种吃面粉的甲虫：
- 赤拟谷盗和杂拟谷盗放在一个装有面粉的容器内混合饲养，按时供
- 应充分的面粉。每月数一次两种成虫的数目，经过一年，他发现
- 杂拟谷盗灭绝了，而赤拟谷盗却大量发展，这个实验证实了竞争排
- 竞争斥原理，高斯开始用数学模型：

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = x(a - bx - cy) \\
\dfrac{dy}{dt} = y(d - cx - fy)
\end{cases}
$$

来研究生存竞争现象，（与Volterra 同时化学家Lotka从分子化学反应的研究中也得到和Volterra同样的模型），所以这类模型称为：

Lotka-Volterra方程。

1926年：Lotka-Volterra方程的出现，标志“**生物动力学系统**”学科的诞生。

3.害虫的综合防治

数学模型：$$\frac{dx}{dt} = rx(1- \frac{x}{k}) - Ex$$

❖生物防治：害虫与天敌

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - bx - cy) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(d + ex - fy) \end{cases}$$

x害虫　　　y天敌

例如：蚜虫与七星瓢虫：

综合防治害虫

如果天敌不能消灭害虫，则加农药

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - bx - cy) - E_1 x \\ \dfrac{dy}{dt} = y(d + ex - fy) - E_2 y \end{cases}$$

4.外来种入侵

- 三峡库区水葫芦成灾

上海崇明的互花米草

- 互花米草：原引自美国，因为它根深，用以固堤，现在满地都是，破坏红树林

红松鼠

- 自从**19**世纪从北美引进灰松鼠以后，英国目前灰松鼠数量已达约
- **200**万只，而本土的红松鼠数量只剩下**16**万只。灰松鼠大肆蚕食红松鼠的栖息地，而且灰松鼠身上携带的松鼠病毒对灰松鼠本身并不致命，但对红松鼠却是致命的。
- 英国本土物种红松鼠正面临灭绝危机，必须大肆捕杀灰松鼠，并鼓励人们吃灰松鼠。

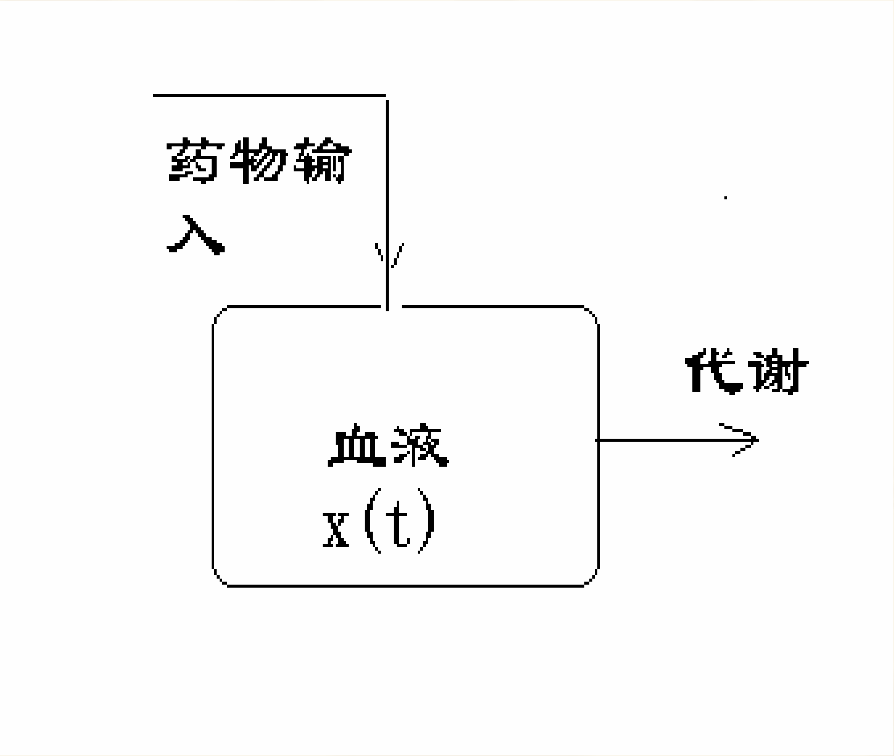
- x-红松鼠 I-病红松鼠 y-灰松鼠

$$\frac{dx}{dt}=x(r_1-ax-by)-\alpha xI-\beta xy$$

$$\frac{dI}{dt}=\alpha xI+\beta xy-\delta I$$

$$\frac{dy}{dt}=y(r_2-cy-ex)-\varpi y$$

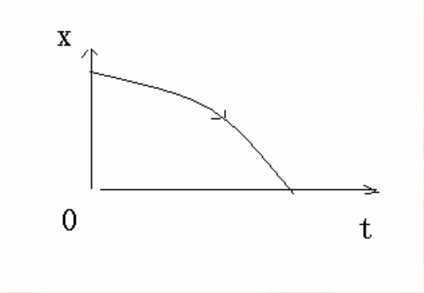
5.药物用量控制



- 单室模型:
- 设单位时间输入药物的浓度为 x_0,代谢系数为k

数学模型为：

$$\frac{dx}{dt} = x_0 - kx$$



癌细胞化疗模型

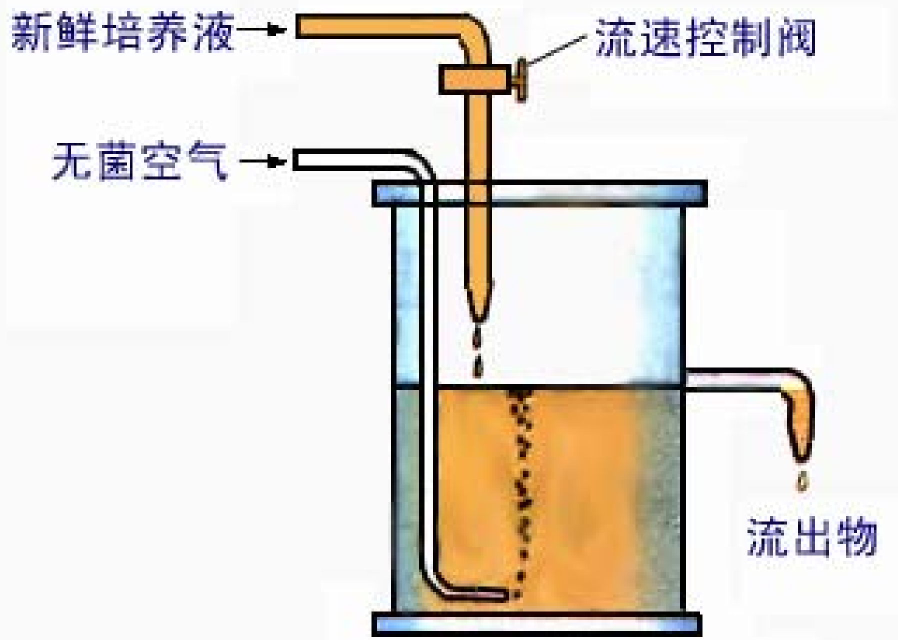
化疗必然是脉冲式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a - bx - cy) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(d - ex - fy) \end{cases} \qquad t \neq k\tau$$

$$\Delta x = -E_1 x \quad \Delta y = -E_2 y \qquad t = k\tau$$

系数 a, b 是人身体素质所定, d, f 癌细胞生存活性
c, e 是竞争能力

6.微生物连续培养



微生物的连续培养装置

应用背景

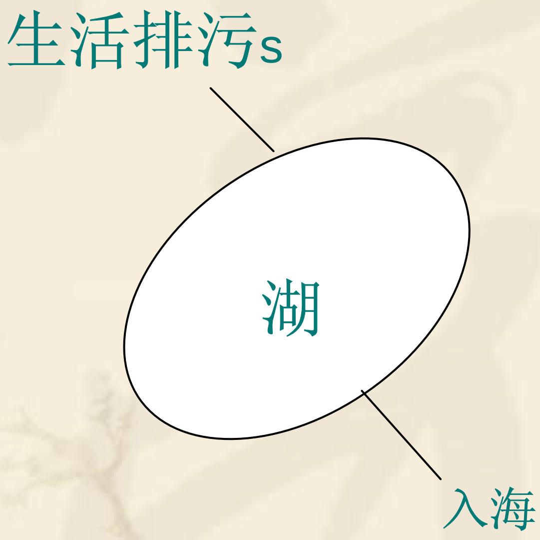
- **(1)** 工业微生物培养
- **(2)** 湖水污染生活排污**s**
- 农田排放的氮**N,**磷**P**
- 都是微生物的营养

S^{∞} 流入营养液浓度

Q 流入、流出流量

$N(t)$时刻**t**微生物浓度

$S(t)$ 时刻**t**营养液浓度



太湖兰藻

微生物连续培养模型

- 表微生物对营养基的消耗率.

$$\frac{dN}{dt} = P(s)N - QN,$$

$$\frac{ds}{dt} = Q(s^0 - s) - P(s)N\frac{1}{\delta}$$

$\frac{1}{\delta}$ 表微生物对营养基的消耗率.

$$P(s) = \mu_m s/(k_m + s)$$ 饱和增长率

7.生物化学反应动力学模型

质量作用定律 (基元反应)

单分子反应

$$A \to B \qquad \frac{dx}{dt} = -kx$$

水溶液中的某些水解反（准一级应）：

$$CH_3COOC_2H_5 + H_2O \to CH_3COOH + C_2H_5OH$$

果糖　　葡萄糖

两分子反应

$$A + B \rightarrow C + D \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = -kxy$$

例1: $NO_2 + CO \rightarrow NO + CO_2$

例2: $2NO_2 \rightarrow 2NO + O_2$

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = -kx^2$$

三分子反应

$$A + B + C \rightarrow 3D \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = -kxyz$$

$$A + 2B \rightarrow 3D \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = -kxy^2$$

例1： $2NO + O_2 \rightarrow 2NO_2$

例2： $2NO + H_2 \rightarrow N_2O + H_2O$

Prigogine三分子反应模型

- 反应机制为：

$$A \rightarrow X \qquad B + X \rightarrow Y + D$$

$$2X + Y \rightarrow 3X \qquad X \rightarrow E$$

数学模 型

$$dx/dt = A - (B+1)x + x^2 y$$

$$dy/dt = Bx - x^2 y$$

8.传染病模型：

- 记$S(t)$为易感者，$I(t)$ 是染病者，$R(t)$是消除类
- ,满足以下三个假设
- **A:** $S+I+R=N=const$, 种群数量不变
- **B:** $S+I\xrightarrow{\beta}2I$ 双线性反应率
- **C:** $I\xrightarrow{\gamma}R$ 正比移除

SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = -\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

免疫接种SIR模型

$$\frac{ds}{dt} = -\beta SI - \theta S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I + \theta S$$

免疫接种是脉冲行为

9.生态-传染病
(Eco-epidemiology)

生态-传染病系统
(Eco-epidemiology)

- 传染病会影响人类的健康；传染病也会改变一个生态系统的性质，会使在竞争系统某些种群因病而降低竞争能力，导致衰亡，捕食系统中某些食饵种群因传染病降低了逃避被捕食的能力而导致灭绝
- 我们可以建立一系列数学模型来研究传染病对生态系统的影响，这样又形成了一个分支

生态-传染病系统 **(Eco-epidemiology)**

食饵染病捕食系统

假设捕食者只能捕捉有病的食饵

$$\frac{dS}{dt} = aS[1-(S+I)] - SI$$

$$\frac{dI}{dt} = SI - b_2 I + l_2 I y$$

$$\frac{dy}{dt} = -b_1 y + k l_2 I(t-\tau) y(t-\tau)$$

10.传染病治害虫

- 传染病是个坏东西，一般情况下人们都是想尽办法去防治它，但是有的情况下它也会是有用的，例如人们利用它来防治害虫，为了在农作物中消灭某些害虫，常用的两种办法：
- **1.**培养**病毒**，投放农田；
- **2.**培养**病虫**，投放农田。

线虫与螟 蛾

- 广州一昆虫研究所的“线虫工厂”每日生产能力可达**400**亿条
- 线虫能分泌一种酶，使自己身体软化后再钻进天牛,大腊螟的身体,害虫在**48**小时之内死亡后线虫离开尸体再攻击其他害虫

投放病虫

$$\frac{ds}{dt} = rs(1-s) - \beta sI,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta sI - (d+\omega)I + u$$

其中**u**为病虫的投放率

投放病毒

- 连续投放

$$\frac{ds}{dt} = rs(1-s) - \beta sI - \theta S,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta sI - (d+\omega)I + \theta S$$

- 药灭蟑螂

11.企业最优投资策略

经济生态学

- 采用**Lotka-Voterra**竞争模型刻画两个企业产品的市场销售量变化模型：

i

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 (1 - \dfrac{x_1}{K_1} - k_{12} x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_2 x_2 (1 - \dfrac{x_2}{K_2} - k_{21} x_1) \end{cases}$$

- x_i 表示企业 的产品市场销售量；
- K_i 表示企业 在投资量 下的产出量，
- F_i 表示企业在投资量，
- a_i 表示企业市场销售量的增长率，。

$i, j = 1,2$

投资量变化模型：

- 在竞争环境中，企业的产出不仅受到企业之间的竞争水平的影响，而且受到社会总需求的影响。
- 投资量变化模型：

$$\begin{cases} \dfrac{dK_1}{dt} = K_1(1 - \dfrac{K_1}{\alpha K} - k_{12}K_2) \\ \dfrac{dK_2}{dt} = K_2(1 - \dfrac{K_2}{\beta K} - k_{21}K_1) \end{cases}$$

- k_{ij} 表示第 j 类企业的产品对第 i 类企业的产品的影响系数，
- K 是社会总需求量。

并记 $\alpha = \dfrac{F_1}{F_1 + F_2}$ 和 $\beta = \dfrac{F_2}{F_1 + F_2}$

F_i i 企业的投资

$$\alpha + \beta = 1$$

两竞争企业的投资策略

- 归结为如下的纳什均衡问题：

$$\max_{F_i}(R_i(F_i)-C_i(F_i))$$

其中 R_i 和 C_i

分别表示企业 i 的利润函数和成本函数

谢谢！