第 30 卷第 1 期　　江西师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 30 No. 1
2006 年 1 月　　JOURNAL OF JIANGXI NORMAL UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)　　Jan. 2006

文章编号:1000 - 5862(2006)01 - 0043 - 04

试论混沌和急动度之关系

黄沛天， 徐学翔， 马善钧

(江西师范大学 物理与通信电子学院,江西 南昌 330027)

摘要:三维相空间是混沌和急动度之间的重要联系纽带. 猝变动力学为人们提供了一种新的思维方式. 急动度是研究混沌流的有效工具.

关键词:混沌;急动度;相空间;李雅普诺夫指数;猝变动力学

中图分类号:O 322　　**文献标识码**:A

当 Gottlieb[1]一提出“什么是给出混沌的最简单急动度函数?”Linz[2]、Sprott[3]和 Eichhorn[4]等人就及时给出了混沌猝变动力学回应. vonBaeyer[5]则为急动度在混沌理论中找到新的应用感到十分震惊. 看来似乎有点奇怪:经典力学中的这个不大起眼的冷门概念 ——急动度(加速度的时间变率),怎么突然会与倍受科技界瞩目的混沌问题弄到一块儿去呢? 本文想就这个话题略说一二.

1　相轨线与李雅普诺夫指数(以下简称李氏指数)[6]

这里主要谈耗散系统. 众所周知,耗散系统行为的基本特征是相空间体积随时间收缩. 因此,它在相空间中的运动轨道(即相轨线)必然收缩到一个有限区域,即所谓吸引子. 这个基本特征的数学概括就是系统的 n 维相空间李氏指数之和必须小于零,即

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i < 0. \tag{1}$$

对于自治微分方程描述的一维耗散系统相空间,唯一的李氏指数必然是 $\lambda < 0$,其相轨线收缩到不动点. 对于自治微分方程描述的二维耗散系统相空间,两个李氏指数可能是$(-,-)$或$(-,0)$. 其中$(-,-)$表示相轨线收缩到不动点,$(-,0)$则表示收缩到极限环. 另外的情况$(-,+)$且 $\lambda_+ < |\lambda_-|$ 是不允许的. 因为这时相轨线在一个平面内一边收缩(λ_-)又一边分离(λ_+),而由此导致相轨线的交叉是不允许的. 对于自治微分方程描述的三维耗散系统相空间,三个李氏指数可能的情况有:$(-,-,-)$表示收缩到不动点;$(0,-,-)$表示收缩到极限环;$(0,0,-)$表示收缩到二维环面;$(+,0,-)$表示收缩到奇怪吸引子. 对于$(+,0,-)$情况,当 $\lambda_+ < |\lambda_-|$ 时,尽管在三维相空间内的轨线有收缩也有分离,但它却能保持永不交叉. 这种奇怪吸引子相轨线特征,正是对耗散系统混沌行为的描写.

从以上讨论可知,从相轨线的特征来看,自治微分方程描写的二维耗散系统不会呈现混沌行为,只有相空间维数等于(或下文描述的大于)三维的耗散系统,才可能呈现混沌行为. 实际上,著名的Lorenz 模型和Rössler 模型,以及文献[7]R648 给出的 18 种简单混沌流模型(该文中的 A 模型除外)都是三维自治微分方程(即三维相空间)描写的耗散系统,它们的混沌行为都具有魔幻般的奇怪吸引子相轨线. 对于保守系统,比如文献[7]R648 中的 A 模型,尽管有 $\sum_{i=1}^{3}\lambda_i = 0$(无吸引子),即$(+,0,-)$且 $\lambda_+ = 0.014 = |\lambda_-|$ 情况,但也须在三维相空间内保持相轨线无交叉特征,其形象也十分“魔幻”.

收稿日期:2005 - 09 - 18

作者简介:黄沛天(1940 -),男,江西吉安人,教授,主要从事力学研究.

2 混沌、急动度与三维相空间

对于单个质点的机械运动,位置维和速度维构成的二维相空间,显然不可能呈现既收缩又分离且无交叉的描写混沌行为的相轨线.描写混沌行为需要高维($n \geq 3$)相空间.如果在位置维和速度维的基础上,再增添一个加速度维就可构成一个三维相空间.这种由位置、速度、加速度三维相空间中的相轨线描绘的一般物理图像就是变加速运动.这时,加速度的时间变率——急动度也就呼之即出,雀然纸上了.用Sprott的话来说:“在此考虑情况中,不仅急动度为非零,而且加速度($\ddot{x}$)是描写运动的一个必须的相空间自变量.”因此,这个一般用来描写变加速运动的三维相空间,既具有体现急动度(j)的自治微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = v(x) \\ \dot{v} = a(x, v) \\ \dot{a} = j(x, v, a) \end{cases} \tag{2}$$

也具有描绘永不交叉的混沌相轨线的拓扑学几何基础.总之一句话:三维相空间正是混沌与急动度相逢的恰当场所.

对于较为复杂的动力学系统,比如,Lorenz 系统,Rössler 系统,以及文献[7]R648 给出的十多种简单混沌流系统,尽管描写它们的三维自治微分方程的相空间自变量不具有简单的位置(x),速度(v)和加速度(a)等物理内涵,但它们的三维相空间自变量仍可一般地使用 x、y、z 符号表示.对于上述系统,按照微分方程理论,把这些用 x、y、z 表示的三维自治微分方程全部等价地转化为一个单一变量的三阶自治常微分方程.比如,以 Sprott 的 R 模型为例,将简单混沌流方程

$$\begin{cases} \dot{x} = a - y \\ \dot{y} = b + z \\ \dot{z} = xy - z \end{cases} \tag{3}$$

转化改写为

$$\dddot{x} + \ddot{x} - x\dot{x} + ax + b = 0. \tag{4}$$

由于(4)式中的三阶微商($\dddot{x}$)可称作急动度函数,故而将这类三阶微分方程称作急动度方程,同时也被称之为猝变动力学,由此便产生了一种新的程式化思维方式,即:先将三维一阶的自治微分方程组改写成一维三阶的急动度方程,然后由急动度方程相关项和控制参数的性质判断系统行为的混沌与否,最后分别予以求解.这里我们看到,猝变动力学的提出,源自混沌流与急动度概念的结合,而急动度经猝变动力学程式化之后,也就可以成为研究混沌流的一种有效工具.

3 具有四维相空间行为的混沌系统与急动度

Sprott 对一种特殊的二阶非自治 Duffing 方程

$$\ddot{x} + b\dot{x} + kx^3 = A\sin \omega t. \tag{5}$$

在引入新变量 $\phi = \omega t$,并作了一些特殊处理之后,把它改写成一个等价的四阶自治常微分方程

$$\ddddot{x} + b\dddot{x} + \ddot{x} + 3x^2\ddot{x} + b\dot{x} + 6x\dot{x}^2 + x^3 = 0. \tag{6}$$

(注:Sprott 将式中的 $6x\dot{x}^2$ 项误写成了 $6x\dot{x}$),(6)式既包含了急动度($\dddot{x}$),同时又意味着可以用一个四维相空间来描写系统的运动轨线.此工作可以作为一个适当的模仿范例.

我们发现,文献[8]把单摆受迫振动方程简化为

$$\ddot{\theta} + 2\beta\dot{\theta} + \sin\theta = f\cos\Omega t \tag{7}$$

之后,只以角位置 θ、角速度 $\omega(=\dot{\theta})$ 和驱动力位相 $\phi(=\omega t)$ 构筑了三维相空间,写出了三维自治微分方程

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -2\beta\omega - \sin\theta + f\cos\phi \\ \dot{\phi} = \Omega \end{cases} \tag{8}$$

同时也描绘了随着该系统有关参数取值的不同,从倍周期分岔走向混沌的情况.

如果注意到(7)式与(5)式有相似的结构形式,仿照 Sprott 提供的方法,应该可以找到与(6)式相类似的四阶自治微分方程. 下面做点适当的仿照工作. 显然,只要将(8)式中的第二个方程对时间求微商就可以增添一个以角加速度 $\alpha(=\dot{\omega})$ 为自变量的角急动度自治微分方程

$$\dot{\alpha} = -2\beta\alpha - \omega\cos\theta - f\Omega\sin\phi. \tag{9}$$

于是,(8)、(9)式便共同给出了单摆受迫振动的四维相空间描写,同时,由(8)、(9)式还可以推得等价的四阶自治常微分方程

$$\ddddot{\theta} + 2\beta\dddot{\theta} + (\Omega^2 + \cos\theta)\ddot{\theta} + (2\beta\Omega^2 - \dot{\theta}\sin\theta)\dot{\theta} + \Omega^2\sin\theta = 0. \tag{10}$$

这样一来,包含了(8)、(9)式的四维相空间描述,由于有角急动度($\dot{\alpha}$)的介入而显得比只有(8)式的三维相空间描述更为圆满,呈现混沌特征的四维奇怪吸引子也显得更加绚丽多姿. 从单摆受迫振动问题的讨论让我们看到,(8)式的三维相空间描述正等待着急动度的参与和补充,而混沌与(角)急动度也终于在四维相空间又一次相遇了.

对于一般四维自治微分方程描述的耗散系统,其相轨迹性质与李氏指数大致有如下对应关系[9]:$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = (-,-,-,-)$ 对应于不动点;$(0,-,-,-)$ 对应于极限环;$(0,0,-,-)$ 对应于二维环面;$(+,0,-,-,)$ 和 $(+,0,0,-)$ 对应于奇怪吸引子;$(+,+,0,-)$ 对应于超混沌运动的奇怪吸引子. 虽然理论上应该存在与三维环面对应的李氏指数,但实际中尚未发现. 同样,急动度函数也将对这些系统行为的描述发挥应有的作用.

4　结论与展望

综上所述,混沌行为的描述,需要三维以上的相空间,而急动度方程恰好可提供相应的三维相空间,两者一拍即合,猝变动力学也就应运而生. 如果说混沌与急动度的关系确实有点微妙,其妙就妙在它们都与同一套三维以上的相空间有着各自的“天然”关联. 不过,这里也要指出,尽管“什么是给出混沌的最简单急动度函数?”问题的提出,导致了猝变动力学的诞生,但急动度却并不一定总与混沌相伴,比如,Gottlieb 还提出:“什么是不给出混沌的最简单非线性急动度函数?”并且讨论了急动度方程的周期解问题. 同样,Eichhorn 和 Linz 也讨论了猝变动力学中的无混沌判据问题. 因此,急动度既有给出混沌的一面,也有不给出混沌的一面,而猝变动力学思维方式也正在继续完善的过程之中.

其实,不管急动度给出混沌还是不给出混沌,在猝变动力学提出之前,从 1946 年到 1996 年这半个世纪中,断断续续都有人用三阶微分方程来研究各种不同的问题[10-18]. 只是当 Gottlieb(1996 年)把急动度(冷门概念)与混沌(热门话题)结合在一起,导致 Linz 和 Sprott 以猝变动力学正式回应之后,才引起了人们的更大关注,并由此又引发了一系列相关的后续研究[19-24]. 如果人们能继续配合混沌这个热点,更加有意识地将猝变动力学思维方式广泛应用于各种实际问题,比如星体的电离层振荡问题、半导体激光器问题等等,也许会获得更加丰硕的成果. 另外,随着各种三阶、四阶微分方程的出现,若将猝变动力学思维方式向高阶推而广之,或许也能帮助人们更加顺利地叩开高阶(或高维)动力学的大门.

参考文献:

[1] Gottlieb H P W. Question #38: what is the simplest jerk function that gives chaos? [J] Am J Phys, 1996, 64: 525.

[2] Linz S J. Nonlinear dynamical models and jerky motion [J]. Am J Phys, 1997, 65: 523-526.

[3] Sprott J C. Some simple chaotic jerk function [J]. Am J Phys, 1997, 65: 537-543.

[4] Eichhorn R, Linz S J, Hanggi P. Transformations of nonlinear dynamical systems to jerky motion and its application to minimal chaotic flows [J]. Phys Rev, 1998, E58: 7 175-7 164.

[5] VonBaeyer H C. All shook up: the jerk, an old-fashioned tools of physics, find new applications in the theory of chaos [J]. The Sciences, 1998, 38: 12-14.

[6] 李福利. 高等激光物理学[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社, 1992. 251-253.

[7] Sprott J C. Some simple chaotic flows[J]. Phys Rev, 1994, E50: R647-R650.

[8]赵凯华. 从单摆到混沌[J]. 现代物理知识,1993,5(4):12-14;5(5):25-28.
[9]陈予恕,唐云. 非线性动力学中的现代分析方法[M]. 北京:科学出版社,2000. 206.
[10]Friedrichs K O. On nonlinear vibrations of third order[A]. Studies in Nonlinear Vibration Theory [C]. New York University,1946.
[11]Rauch L L. Oscillations of a third order non - linear autonomous system[A]. Contributions to the theory of Non - linear Oscillations [C]. Princeton, New Jersey: Princeton University Press,1950.
[12]Moore D W, Spiegel E A. A thermally excited non - linear oscillator [J]. Astrophys J,1966,143:871-887.
[13]Dasarathy B V, Srinivasan P. On the study of a third - order mechanical oscillator [J].J Sound Vib, 1969, 9:49-52.
[14]Mulholland R J. Non - linear oscillations of a third - order differential equation [J]. Int J Nonlinear Mech,1971,6:279-294.
[15]Srirangarajan H R,Srinivasan P, Dasarathy B V. Ultraspherical polynomials approach to the study of third - order non - linear systems [J].J Sound Vib,1975,40:167-172.
[16]Srirangarajan H R, Dasarathy B V. Study of third - order non - linear systems—variation of parameters approach [J]. J Sound Vib, 1975, 40:173-178.
[17]Auvergne M, Baglin A. A dynamical instability as a driving mechanism for stellar oscillations [J]. Astron Astrophys,1985,142:388-392.
[18]Erneux T, Kovanis V, Gavrielides A,et al. Mechanism for period - doubling bifurcation in a semiconductor laser subject to optical injection[J]. Phys Rev,1996,A53:4 372-4 380.
[19]Gottlieb H P W. Simple nonlinear jerk functions with periodic solutions [J]. Am J Phys, 1998, 66: 903-906.
[20]Linz S J. Newtonian jerky dynamics: some general properties [J]. Am J Phys, 1998, 66:1 109-1 114.
[21]Linz S J. No - chaos criteria for certain jerky dynamics [J]. Phys Lett, 2000, A275:204-210.
[22]Linz S J, Sprott J C. Elementary chaotic flow [J]. Phys Lett, 1999, A259:240-245.
[23]Sprott J C. Simple chaotic systems and circuits [J]. Am J Phys, 2000, 68:758-763.
[24]Gottlieb H P W. Harmonic balance approach to periodic solutions of non - linear jerk equations [J].J Sound Vib, 2004, 271:671-683.

On the Relation between Chaos and Jerk

HUANG Pei-tian, XU Xue-xiang, MA Shan-jun
(College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027,China)

Abstract: Three - dimensional phase space is an important relation link between chaos and jerk. A new model of thinking is provided for us by jerky dynamics. The jerk is an effective tool for studying chaotic flow.

Key words:chaos; jerk; phase space; Lyapunov exponent; jerky dynamics

(责任编辑:冉小晓)