

文章编号:1000-5862(2007)02-0115-02

# 牛顿猝变动力学中的新守恒量

黄沛天, 徐学翔, 马善钧, 王宏

(江西师范大学 物理与通信电子学院, 江西 南昌 330027)

**摘要:**介绍了 S.J.Linz 考察的一种线性牛顿猝变动力学方程周期解的存在,并且讨论了与之有关的新守恒量和势函数.

**关键词:**急动度;三阶微分方程;加速度能量

**中图分类号:**O 313 **文献标识码:**A

在文献[1]向国人介绍急动度概念之后不久,文献[2]便从反对和质疑的角度提出:三阶微商或三阶微分方程引进力学之后,“必定会出现新的守恒定律”问题.这的确是一个合乎逻辑的猜测.本文对新守恒量的介绍,则从正面回答了这个问题.

## 1 一种线性牛顿猝变动力学方程的周期解和守恒量

S.J.Linz<sup>[3]</sup>指出,如果源自牛顿方程的急动度

$$j(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \ddot{\ddot{x}} = \frac{1}{m} \frac{dF}{dt} = \frac{1}{m} \left( \dot{x} \frac{\partial F}{\partial x} + \ddot{x} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial F}{\partial t} \right),$$

其中的偏微商满足  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)$  (此谓史瓦兹定理),那么,这种急动度可给出牛顿猝变动力学方程.接着,Linz 在文献[4](p1 109-1 114) 中考察了牛顿猝变动力学的一些基本性质,其中谈到某些牛顿猝变动力学方程的周期解和守恒量问题.比如,具有常数 A、B、C 和单位质量的线性牛顿猝变动力学方程

$$\ddot{\ddot{x}} + A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0, \tag{1}$$

其周期解可以尝试用  $x = \exp(\lambda t)$  表达,然后对本征值 推得方程  $\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$ .

而周期解则要求本征值之一是实数,并且是负半定的( $\lambda_1 = -\dots$ ),剩下的两个本征值则为纯虚数,并且以实的共轭( $\lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ ).这种本征值结构要求

$$A = \dots, B = \dots > 0 \text{ 和 } C = AB = \dots = 0. \tag{2}$$

由此,便得到具有周期解的牛顿猝变动力学方程

$$\ddot{\ddot{x}} + A\ddot{x} + B\dot{x} + ABx = 0. \tag{3}$$

周期解则通常表明一个守恒量(或第一积分)的存在.若取代换  $y = \dot{x} + Ax$ ,则(3)式可以改写为

$$\ddot{y} + By = 0. \tag{4}$$

显然,(4)式具有与“无阻尼简谐振动方程”相同的形式.因此,它具有一个守恒量,其形式为

$$K = \dot{y}^2/2 + By^2/2. \tag{5}$$

若将  $y = \dot{x} + Ax$  代回(5)式,便得  $K = (\ddot{x} + A\dot{x})^2/2 + B(\dot{x} + Ax)^2/2$ ,而这个新守恒量 K 的值则可由初始条件  $x(0)$ 、 $\dot{x}(0)$  和  $\ddot{x}(0)$  确定.

## 2 牛顿方程

将(3)式对时间积分可得相应的牛顿动力学方程

收稿日期:2006-09-16

作者简介:黄沛天(1940-),男,江西吉安人,教授,主要从事力学方面的研究.

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx + AB \int x(t) dt = 0, \quad (6)$$

这是一个积分微分方程. 它描写具有附加记忆项  $\int x(t) dt$  而且是存在阻尼的振动. 但(6)式在某些系数范围内却可以有周期解和守恒量  $K$ .

### 3 势函数

Linz 认为, 可以把具有第一积分(或守恒量)的猝变动力学方程(1)式或(3)式改写成包含任意势函数  $V(y)$  的形式

$$\ddot{x} + A\dot{x} + \left. \frac{\partial V(y)}{\partial y} \right|_{y=\dot{x}+Ax} = 0, \quad (7)$$

其第一积分则可写成

$$K = (\ddot{x} + A\dot{x})^2/2 + V(\dot{x} + Ax). \quad (8)$$

显然, 如果势函数取做  $V(y) = By^2/2 = B(\dot{x} + Ax)^2/2$ , 则有  $\partial V(y)/(\partial y) = By = B(\dot{x} + Ax)$ . 将它代入(7)式就构造出(3)式表征的线性猝变动力学方程. 如果势函数取  $V(y) = By^3/3 = B(\dot{x} + Ax)^3/3$ , 则有  $\partial V(y)/(\partial y) = By^2 = B(\dot{x} + Ax)^2$ . 若将它代入(7)式, 就可构造出一个非线性猝变动力学方程  $\ddot{x} + A\dot{x} + B\dot{x}^2 + C\dot{x}x + Dx^2 = 0$ . 此式中的  $C = 2AB, D = A^2B$ .

另外, 这里若引入“类似的拉格朗日函数”  $\tilde{L} = \dot{y}^2/2 - V(y) = (\ddot{x} + A\dot{x})^2/2 - V(\dot{x} + Ax)$ , 则由“类似的拉格朗日方程”  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y} = 0$  也可构造与(7)式一致的猝变动力学方程.

### 4 结论

从牛顿猝变动力学守恒量等问题的考察, 使我们得到下面几点结论: 1) 如果将(4)式、(5)式和(8)式与牛顿力学中的无阻尼谐振子问题相对照, 就会发现,  $K$  与传统牛顿力学中的“机械能”相类似, 而  $(\ddot{x} + A\dot{x})^2/2$  和  $V(\dot{x} + Ax)$  则分别类似于“动能”和“势能”. 显然, 这些“类似的能量”都不具有传统牛顿力学中的能量的量纲, 它们具有所谓“加速度能量”<sup>[5-6]</sup>的量纲. 而且人们还可利用势函数来构造猝变动力学方程. 2) 由于(6)式中的记忆项的存在, 使牛顿运动方程呈现为积分微分方程, 而不是通常的二阶微分方程. 另外, 由于(6)式中的系数  $A$  代表阻尼, 因此, 一般来说, 系统的能量不守恒, 但(6)式是源自(2)式条件, 却可以有另外一个具有加速度能量量纲的新守恒量  $K$ (文献[7])则把这种具有加速度能量量纲的所有状态量通称为 Appell 函数). 3) 物理学中的守恒量往往与某种对称性相关. 由此, 文献[4](p1113)也指出, 以  $K$  为第一积分(或守恒量)的方程(3)式具有联合变换  $(t, x, A) \rightarrow (-t, \pm x, -A)$  不变性(即对称性). 4) J. B. Conant 曾经指出: “科学不是随着新事实的积累而发展的, ..而是随一些有效的新概念的不断发展和发展的.”<sup>[8]</sup> 现在, 经典力学也正随着加速度能量概念发展到新守恒量这种不断发展而发展.

#### 参考文献:

- [1] 黄沛天. 一个描写机械运动的新概念——急动度[J]. 物理, 1981, 10: 394-397.
- [2] 关洪. 力学里需要一个新的基本概念——“急动度”吗? [J]. 物理, 1983, 12: 63-64.
- [3] Linz S J. Nonlinear dynamical models and jerky motion[J]. Am J Phys, 1997, 65: 523-526.
- [4] Linz S J. Newtonian jerky dynamics: some general properties[J]. Am J Phys, 1998, 66: 1109-1114.
- [5] 吴大猷. 古典动力学(理论物理第1册)[M]. 北京: 科学出版社, 1983: 162.
- [6] 梅凤翔, 刘端, 罗勇. 高等分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1991: 194, 249.
- [7] 黄沛天, 徐学翔, 马善钧, 等. 电磁猝变动力学的几个基本概念[J]. 科技导报, 2007, 25(3): 74-77.
- [8] Holton G, Brush S G. 物理科学的概念和理论导论[M]. 上册. 张大卫译. 北京: 人民教育出版社, 1983: 294.

(下转第 121 页)

## Influences of Kerr Effect and Virtual Photon Field on the Photon Statistical Properties in the System of the Two Two-Level Atoms Interacting with a Single Mode Light Field

KANG Nian-qian, KUANG Xian-fei, LI Ping

(College of Science, Jingxi Agricultural University, Nanchang 330045, China)

**Abstract:** In this paper, the evolution of the mean photon number in the system of two two-level atoms interacting with a single mode light field in the Kerr medium is studied by C-RWA. The influences of Kerr effect and virtual photon field effect on the photon statistical properties are also discussed. It has been shown that: the quantum noise appears under C-RWA: the quantum noise becomes weak while  $\mu$ ,  $g$  and  $\mu$  increase: the amplitude of Rabi oscillation decreases while  $g$  and  $\mu$  increase.

**Key words:** CRW-approximation; the mean photon number; the quantum noise

(责任编辑:冉小晓)

(上接第 116 页)

## New Conserved Quantities in Newtonian Jerky Dynamics

HUANG Pei-tian, XU Xue-xiang, MA Shan-jun, WANG Hong

(College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330027, China)

**Abstract:** In this paper, we introduce that a linear Newtonian jerky dynamics investigated by S.J. Linz can have periodic solutions, and discuss the corresponding new conserved quantities and potential functions.

**Key words:** jerk; three-order differential equation; energy of acceleration

(责任编辑:冉小晓)