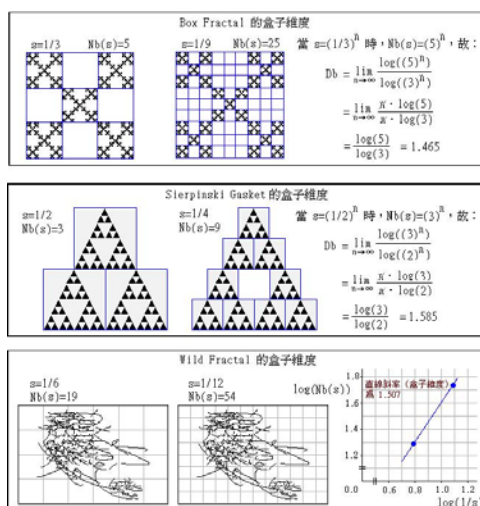


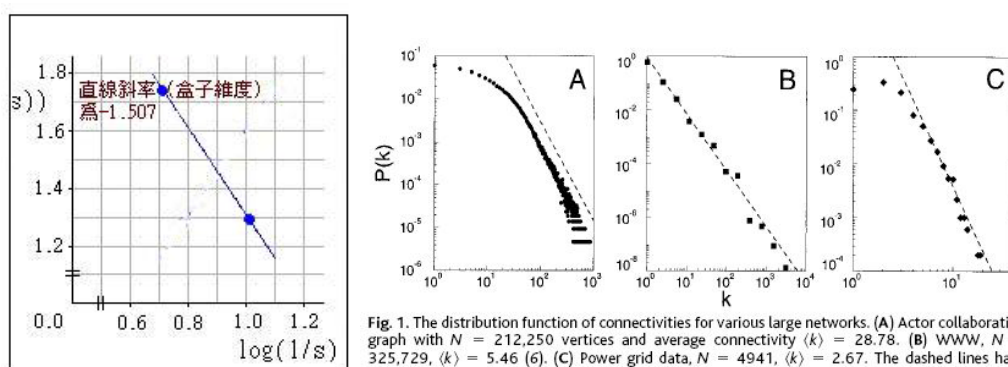
涌现四：时空分形及其起源 计算士

复杂网络与空间分形

在《涌现三》中，我们提到，对于任意一个不规则对象，都可以计算“分形盒子维”（Hausdorff Dimension/box dimension）。方法是：在每一个测量尺度 x 上，我们都可以测得一个相应的测度 y ，把这一系列的 xy 定位的点画在坐标系上，拟合出的直线的斜率就是不规则对象的“盒子维”的大小。



我们认为，分形维可用于代表对象的结构复杂性。对象的结构越复杂，分数维越大。在上图最后一个部分中，如果我们直接用测量尺度的大小做 X 轴，这个斜率就会变成负的，如下图左所示：



我们还发现，在复杂网络中，也存在这种尺度变化与获得信息的关系。以复杂网络为例，上图右引自Barabasi1999 的文章Emergence of Scaling in Random Networks（Albert-Laszlo Barabasi and Reka Albert., *Science* 286, 509（1999））。其中A 是演员合作网，B是互联网，C是电力网，三张图均是在双对数坐标系下的度分布图。其中X轴代表一个节点的邻居数，Y轴代表拥有一定数量邻居数的节点个数。如果我们使用上文的视角来看，也可以将度分布

图视为，随着测量度的尺度的不断减小，得到网络的越来越精确的结构的过程。因为在度分布中，小测量尺度下得到的测度不包括大测量尺度下得到的测度，因此我们需要把度分布改成累积度分布。累积度分布的斜率就可以看做该网络的“分形维”。这里，我们进一步把这种分形维称为“空间分形维”，以方便与接下来将要谈到的“时间分形维”相比较。

度数、link 数、全网 link 总长、流量

这里，让我们澄清几个概念：

度数：已经知道，一个点的度数是它邻居的个数，那么， N 个点的总度数 D ，就是所有点的邻居数。一般说来，这个数量要远远大于 N ，因为有很多点被重复计算了；

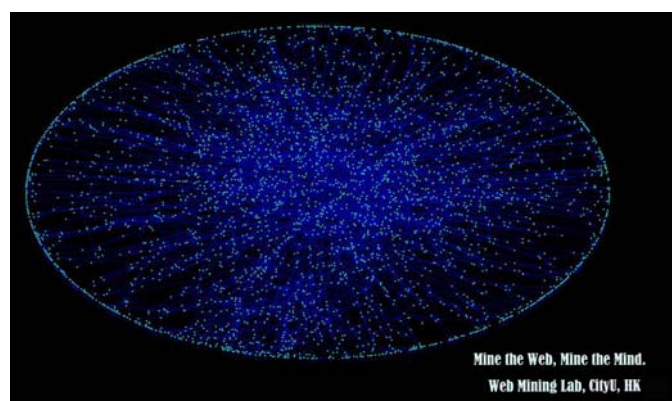
Link 数：一个点拥有的 link 数就是它的度数。 N 个点的总 link 数 C ，则等于 N 个点的总度数 D 的一半。因为一个 link 需要用掉两个度；

全网 link 总长：设定每条 link 长度均为一个单位后，全网 link 总长 L 等于 C ；

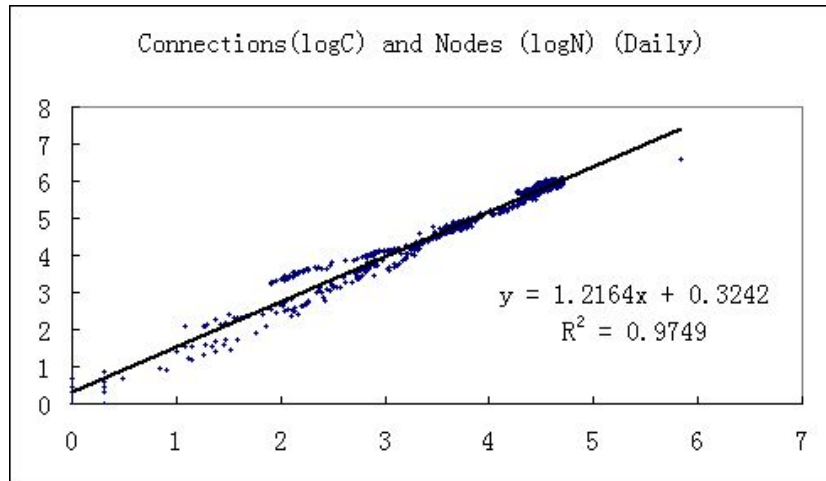
下载流量：在本文的讨论中，从一个 P2P 文件共享网络的用户行为的具体情境出发，我们假设每次下载的文件大小相等。甲用户从乙用户处下载了 n 次，则流量记为 n 。因此 N 个节点的总流量 F 是根据各人下载的频率 n 对 link 加权之后再相加的总和 C' 。

复杂网络与时间分形

我们再来看一张图。下图是一个 SNS 网络的结构图。亮点代表人，暗蓝色的线代表人和人之间的朋友关系。根据前文的分析，如果我们把该图视为网络在某一个时刻 t 的结构图，那么，这个网络的累积度分布的斜率就是它的“空间分形维”。现在，我们透露另外一个关于这张网络的信息：这个网络是从一个节点开始，随着时间不断增长和扩张的。我们知道，随着时间的增长，网络的节点不断增多，link 也越来越多，全网 link 总长 L 也越来越长（设定每条 link 长度均为一个单位）。那么，节点数 N 和 L 之间有没有什么关系呢？



我们发现节点数 N 和 L 之间存在如下关系： $\log L$ 和 $\log N$ 之比是个常数。



我们发现这张图同样也在表达一种分形关系。图的 x 轴可理解为用来测量分形对象的“小盒子”的个数 N ， y 轴则表达随着盒子越来越小，盒子数越来越多，测得的分形对象的总测度（长度、面积、体积）越来越大的情况。另外我们要注意，在现实的网络增长里， x 轴自左向右又代表着时间的推移。因此，我们把这里拟合的斜率称为“时间分形”。

在使用“时间分形”的概念的时候，实际上我们是把网络的 link 总长度 L 随节点数 N 增加而增大的过程看做是一个纯粹的“测量过程”，而不是一个“客观的时间增长过程”。在这个框架下，我们似乎认为，网络的整个结构已经存在在某个地方，随着时间的推移，网络的“原始结构”并没有改变，只是“我们看到/测得的部分”不断增加而已。打个比方来说，网络好比黑夜中的森林，我们绘制网络增长曲线的过程好比一个探险队员举着一盏灯在森林里面探险，并记录被灯光照到的一草一木的数量的过程。

一旦网络增长的客观过程，被视为测度精细化的主观过程，时间，就被理解为仅对“观察者”（探险队员）有意义的“主观时间”。

异速增长律与时间分形维

我们界定“时间分形维”时使用的坐标系和“异速增长律”（allometric scaling）的坐标系是一样的。异速增长律，指的是生物学的新陈代谢理论的基本假设：生物体消耗的资源量（metabolic flow） F 和生物体的体积（body size） M 之间存在 $F=AM^{3/4}$ 的关系。该关系也可表达为 $\log F=\log A+3/4(\log M)$ ，其中 A 是正态化系数。

但从严格意义上说，这个生物学里的异速增长律的增长指数（scaling exponent） $3/4$ ，和我们所定义的“时间分形维”的“维度”还有一定区别的。区别的关键在于 y 轴的变量不同。

在我们的分析里， x 轴是节点个数 N ，可以用来表示网络的规模 M ，这是没问题的；但我们的 y 轴是 link 的总长 L ，而不是网络维持所需要的资源 F 。在使用全网连接总长 L 来代替 F 时，得到的增长指数，也即我们界定的“时间分形维”，是一定大于 1 的，更大于使用 F 时的 scaling exponent。

为什么呢？因为 link 的消耗是不可重复的，两个节点之间用掉一个 link，第三个节点要加入网络，就不能使用已有的 link，必须新建至少一个 link。而随着节点在网络中待的时间变久，往往也建立越来越多的 link，这样 link 的增长，就一定超过节点增长的速度。因此使用全网连接总长 L 来代替 F 时做为 y 轴变量时，得到的增长指数要大于 1；而相反，

流是可重复利用的。无论是社会系统中的货币，生物体中的血液，还是热带雨林的水分，都在不停的循环之中，循环得越快，利用效率越高，F 的增长速度就越慢于节点数量的增长速度，因此原始的生物学意义上的 allometric scaling exponent 是小于 1 的。从生物体的 3/4 指数来看，这是一个效率较高的系统。有文献指出，在 $D+1$ 维空间内的系统， $D/D+1$ 的指数是流动效率的极大值 (Jayanth R. Banavar, Amos Maritan & Andrea Rinaldo, Size and form in efficient transportation networks, NATURE, VOL 399, 13 MAY, 1999; Olaf Dreyer, Allometric Scaling and Central Source Systems, Physical Review Letters, 16 JULY 2001, Volume 87, No.3)。

因此，宽泛地说，对于一个自组织系统，可以有两类 allometric scaling 指数，一类是大于 1 的，一般表示“收益”，也就是该系统正常运行所能支持的最大负荷或创造的最大效益；一类表示成本，即该系统正常运行所需要的最小成本。L 属于前者，F 属于后者。需要注意的是，我们前文所界定的“流量”，其实反映了一个 P2P 系统在一定规模下所能支持的最大用户交易量，所以属于前者。这个流量和 F 的关系，类似于社会经济系统中总货币需求量和实际货币发行量的关系。

因为 Allometric scaling 现在已经被泛化为异速增长关系，并不指名增长指数是否大于 1 (Luís M. A. Bettencourt, José Lobo, Dirk Helbing, Christian Kühnert, and Geoffrey B. West, Growth, innovation, scaling, and the pace of life in cities, PNAS, April 24, 2007, vol. 104, no. 17:7301-7306)，接下来为了行文的方便，我们把我们界定“时间分形维”时使用的坐标系，即 y 轴为 L 的时拟合的斜率，也称为异速增长率。

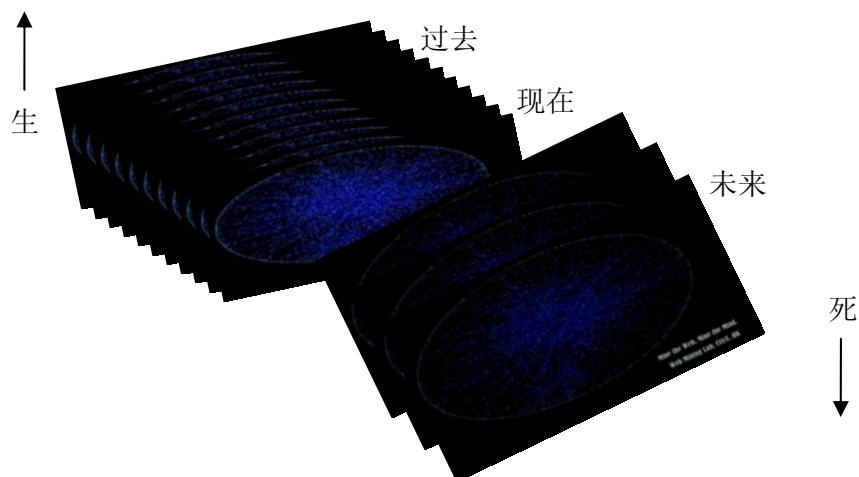
小结一下。刚才我们得到的结论有：

1. 双 log 坐标系下 t 时刻网络的累积度分布斜率，可看做网络的空间分形维；
2. 双 log 坐标系下从 t_0 到 t_n 时间段内网络的异速增长率，可以看做网络的时间分形维。

这时，一个问题自然而然的就出现了：空间分形维和时间分形维，是否有什么共通之处呢，或者，根本就是一个东西？

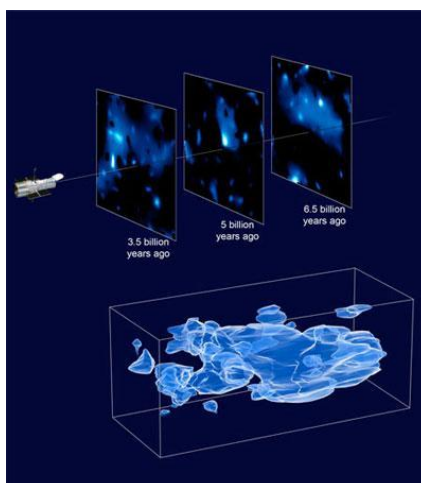
自相似的复杂网络、时空分形与“时间之序”

在回答前文提出的问题之前，我们来看一张图：



考虑一个 P2P 文件传输网络，每个参与传输文件的人是一个节点，每次下载行为是一个 link。这个网络随着时间的增长，节点越来越多，link 也越来越多。但是请注意，我们这里使用的是“历史记录”的视角，即把所有曾经参加过传输的节点和产生的 link 都记录下来。如果采取“当前”的视角的话，比如在每一个小时内，网络的节点和 link 比上一个小时可能是不增反减的。而如果我们把这种“当前”的视角推广到极端，比如，看每一个 0.01 秒内的网络，最后会发现，“网络”不见了，只能看到黑暗中产生的一条又一条发光的流。

这个视角是相当有启发意义的。对于这个例子下的系统，其实没有“网络”这个实体。所谓的“网络”，只不过是“流”在四维时空中留下的记录。对于这个系统，去分析它在 t_n 时刻留下的所有历史记录的结构，即描述 t_n 时刻系统的“空间分形”，和描述从 t_0 时刻到 t_n 时刻系统的“时间分形”，谈论的其实是同一件事。



时间分形维和空间分形维是什么关系？

我们举一个例子来看看时间分形维和空间分形维的关系。假定有一个 P2P 文件传输系统，我们一共有 5 个小时的记录，每个小时内的流量记录因计算机系统的问题，无法进一步区分其产生的时间。这样我们手头就有 5 张网络。

首先，我们把这 5 个网络的记录加总起来，画出一张大网络，对这个大网络作累积度分布，画在双 log 坐标系里，得到一个拟合曲线，代表“空间分形维度”；

其次，我们记录 5 个网络所对应的节点数 N 和总连接长度 L （等于总度数 D 的一半），得到 5 个样本点，画在双 log 坐标系里，得到一个拟合曲线，代表“时间分形维度”；

这两条曲线应该存在着“后者是前者的累积分布曲线”的关系（因为累积度分布的 x 轴是度数， y 轴是累积节点数，而异速增长律的 x 轴是累积节点数， y 轴是累积连接数（度数除以 2））。

我们知道，我们这里界定的异速增长，单从坐标系来说，其实就是在一个系统里面，拿出 n 个节点，看这个 n 个节点产生了多少 link，把 n 和 link 总长 l 作为坐标画在一个双对数坐标系下得到的一系列点的斜率。那我们对于一个 t_n 时刻的网络，去随机地取一个 n ，计算得到的 l ，是否也得到拟合得很好的异速增长率呢（为了避免“偏误”，我们还可对任意一个规模的 n ，都取 1000 次，分别计算 n 和 l 的平均值）？

这是不行的。因为这里面有一个很重要的东西，“序”，被忽略了。网络的生长，是有顺

序的。从“时间分形维”来看，这个“序”就是在时间中产生的顺序。在这个系统中，如果要得到精确的异速增长率，那么，要计算 $n=100$ 个节点时对应的流，应该去看最初的全网达到 100 个节点时产生的流，而不能在系统的“晚年”去看任意一个部分的 100 个节点（对于一个严格随时间增长的网络来说，全网络在“ $n=100$ ”只有一次机会）；从“空间分形维”来看，这个“序”在坐标系中被自然地定义为网络从最大度数的节点开始计算，从“大”到“小”的排序。对于我们举的 P2P 文件传输系统的例子，既然其实没有“网络”这个实体。所谓的“网络”，只不过是“流”在四维时空中留下的记录（其实泛泛地说，所有网络都是这样形成的，SNS 和 P2P 的区别，仅仅在于用户的界面上是否会显示所有的历史 link），那么“时间之序”就成为**唯一重要的东西**。

这里插播一个评论，为什么 Barabasi99 年在 Nature 上提出的 BA 模型对很多真实网络的时间演化过程和在某一时刻的结构都能做出一个较好的拟合呢？其实正是因为 BA 模型抓到了这种“序”。BA 模型的核心，就是要在时间演化里，使得最早进入的节点获得最大的度数（preferential attachment）。这个思想，和我们在这里谈论的时间之“序”，是一致的。当然，我们认为这个“序”，是更基础的东西。

这个至关重要的“序”，在其他一些文献中也被隐隐约约地认识到过。比如在谈论异速增长率的文献 Jayanth R. Banavar 等人的 Size and form in efficient transportation networks (Nature, May 13, 1999), Diego Garlaschelli 等人的 Universal scaling relations in food webs (Nature, May 8, 2003), 以及 Olaf Dreyer 的 Allometric Scaling and Central Source Systems (PRL July 16, 2001) 那里，这个“序”被表达为一个系统从位于中心的“源”向外部一层一层地传递“流”的过程。联系回我们的“时间分形”和“空间分形”结构，这个“源”就分别对应着系统“最初的节点”和“最大度的节点”。

Banavar 中心源网络：为什么 $D/D+1$ 是流的效率的极大值？

1. 界定变量如下：

L: 一维长度单位； L^D : D 维空间中的体积 V； B: 生物体消耗的资源总量；

C: 生物体内的血液总量。易知，有 $C \propto M$ ； $|I_b|$: link b(x 指向 y) 上的流量。对于中心源 O 来说，只有流出量没有流入量，且流出量等于全网的总流量；

F_x : 节点 X 上的流量，等于该节点上的流进量减去流出量。 $0 < F_{\min} < F_x < F_{\max}$ ；

2. 异速增长律 $Y \propto M^{\frac{D}{D+1}}$ 证明过程：

生物体消耗的资源总量 $B = \sum_x F_x = N = L^D$ ；

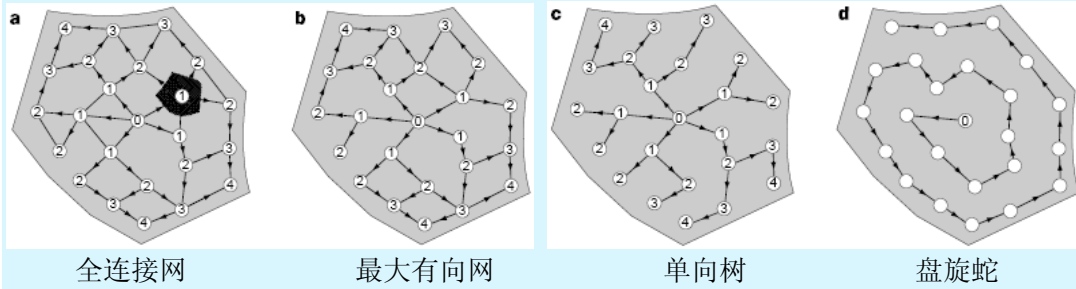
对于一个 D 维空间内的最大有向网 (maximal directed network)，所有 link 上的流量等于

所有节点上的流量，即 $\sum_b I_b (L_y - L_x) = \sum_x L_x F_x$ ；

如果节点 X 和 Y 离中心源的距离相等，我们认为 $L_y - L_x = 0$ ，因此我们可以把所有离中心源距离相等的节点之间的 Link 都去掉，全连接 (fully connected network) 的网络就变成了

一个最大有向网，即 $\sum_b I_b (L_Y - L_x) = \sum_b^{directed} I_b$;

于是有 $C = \sum_b |I_b| \geq \sum_b^{directed} |I_b| \geq \sum_b^{directed} I_b = \sum_b I_b (L_Y - L_x) = \sum_x L_x F_x$ (所有网络都可以被简化为单向树 (directed spanning tree) 和盘旋蛇 (and space-filling spiral);



$C = L^D$ *节点和中心源之间的平均距离 (该平均距离介于 L 和 L^D 间)

因此有

$$L^D * L < C < L^D * L^D$$

$$\rightarrow L^{D+1} \leq C \leq L^{2D}; \text{ 又因为 } B = L^D, \text{ 则}$$

$$C^{\frac{D}{D+1}} \leq B \leq C^{\frac{1}{2}}$$

最有效的运输网络结构，例如单向树，就会有 $B = B_{\min} = C^{\frac{D}{D+1}} = M^{\frac{D}{D+1}}$ ，此时流的效率达到极大值。

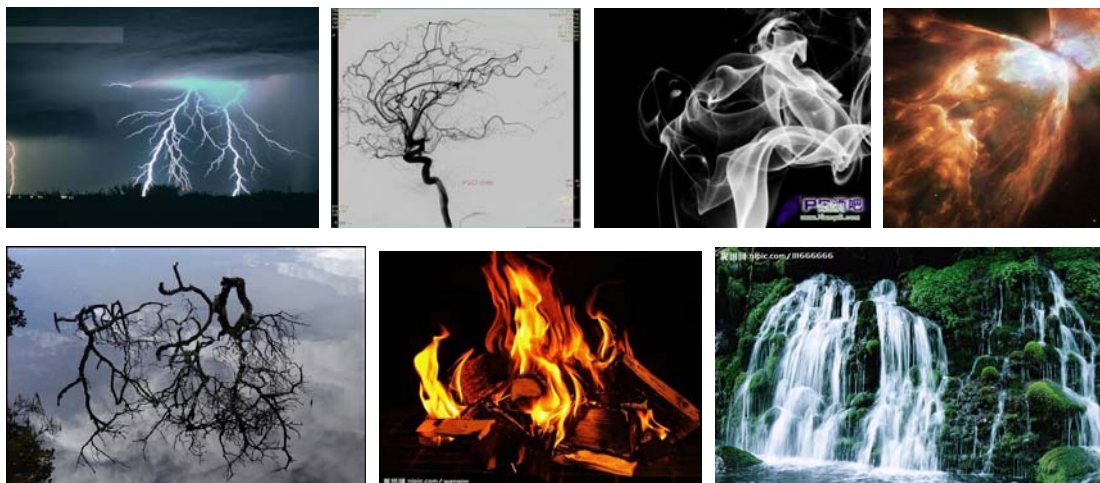
有趣的是，我们现实中看到的网络，虽然有最大的度数，但并非总是“中心源”系统，有很多网络，是找不到一个“中心”的。这又怎么解释呢？实际上，这个“中心源”的概念，要加上“自相似”，才真正构成我们所说的“scale-free”的真实网络结构。简而言之，就是在每一个度数（测量尺度）上，网络都有“中心源”。或者说，每一个“汇”，都有可能变成一个新的“源”，向外一层层输送流。令人庆幸的是，这并没有提升我们的分析难度，反而是使之降低了。这意味着，当我们用一个“Banavar中心源网络”模型来描述真实网络的时候，不需要注意我们的分析尺度，它总是能被成功地应用。举一个实际例子，当你分析全世界的互联网的链接结构的时候，可以以“Google”或“Yahoo!”为中心源；当你在分析某个大学域名下的网页结构的时候，可以以这个大学的主页为中心源，在这两种看似不同的情况下，并不需要修改模型。

因为“源”的观念，和“序”的观念，是密切联系在一起的。所以我们在这里就需要对之前提到的“时间之序”的概念做一个补充：对于沿着时间之箭生长，或者沿着空间之网展开的网络，在任意一个时间段上，或在任意一个空间片段上，都存在着一个“小序”。这个“小序”，和总的“序”，是自相似的。或者说，对网络的任意一个时空切块做分形分析，得到的分形维和全网在全时空内的分形维，都是一样的。时间，是一个层层嵌套的周期结构，这就是“时空分形”形成的真正原因。

这是非常奇妙的。这么“高难度”的时间结构，是怎样形成的呢？

不均匀的时空：生命是什么？

我们先来看一组有趣的图片：这些图片按顺序分别描绘了闪电、血管、烟雾、星云、树根、火焰、水流的结构。



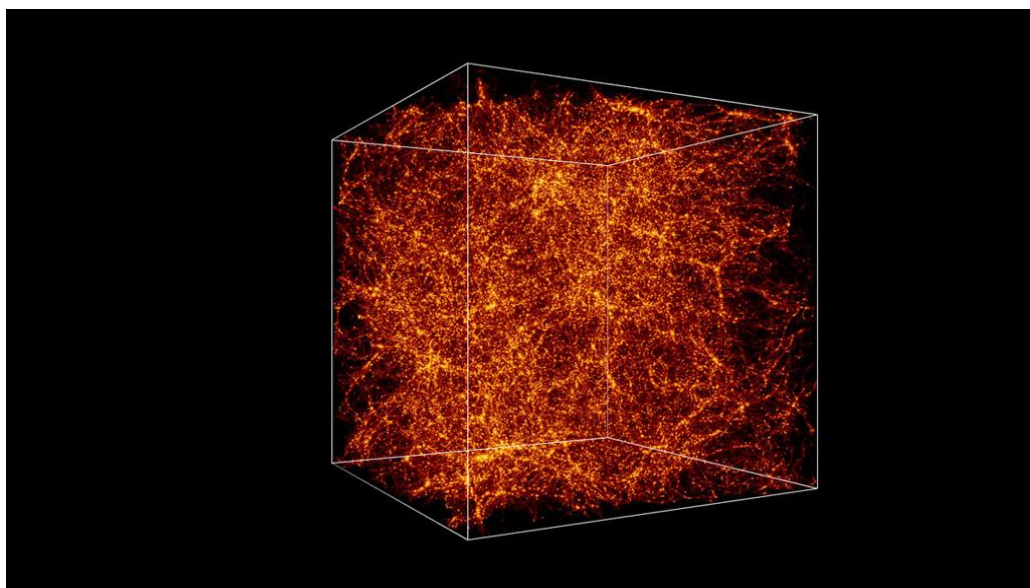
你是否觉得这些图片有相似之处呢？对于这些“张牙舞爪”的结构，曼德布罗（Benoît B. Mandelbrot）会称之为“分形”；如果在一定的时间段内，这些结构在能量和物质的流动中能保持相对的稳定，普利高津（Ilya Prigogine）会称之为“耗散结构”；如果这些结构不但能保持稳定，而且能复制自身，进行繁衍和变异，薛定谔（Erwin Schrödinger）和冯·诺依曼（John Von Neuman）就会称之为“生命”。

小时候，我们都听说过隐形人的故事。要使隐形人现身，据说唯一的办法就是往隐形人身上泼墨水。泼了墨水之后，我们其实仍然看不到隐形人，但通过观察墨水，就能抓到隐形人。在科学理论上，我们也往往是先看到墨水，再推定隐形人的存在。从牛顿以来，人们就注意到重力是一种很特殊的力。一般的力的作用效果（比如使物体产生加速度），要受被作用物体的质量的影响，但重力加速度，与被作用物体的质量却是无关的。著名的比萨斜塔双球同时落地实验，就证明了这点。那么，重力究竟是什么呢？爱因斯坦经过思考，认为重力其实是我们看到的“墨水”，它后面的隐形人，是时空结构的扭曲。

可以考虑把这个思路引入到我们讨论的问题上来。在前文中，我们谈论了“时间的分形”和“空间的分形”。认为对于任意小的一个局部时空内的网络，都可以构造一个 Banavar 中心源网络来表达。现在，我们以一个 P2P 网络为例，界定在某个小时内的网络为“Banavar 中心源网络”，称为网络 B。网络 B 上的节点的下载流量分布（请注意，不同于 F，也不同于 Banavar 网络中的 B）符合幂律。现在我们再界定一个“展开的 Banavar 中心源网络”，称之为 A。A 的特点就在于，认为 B 上有着不同流量的节点其实是由不同规模，相同结构的网络在视觉上“坍缩”而成。现在我们往网络 B 上“吹气”，让这个网络充分地展开为每个节点都具有相同下载流量的网络，就得到了网络 A。

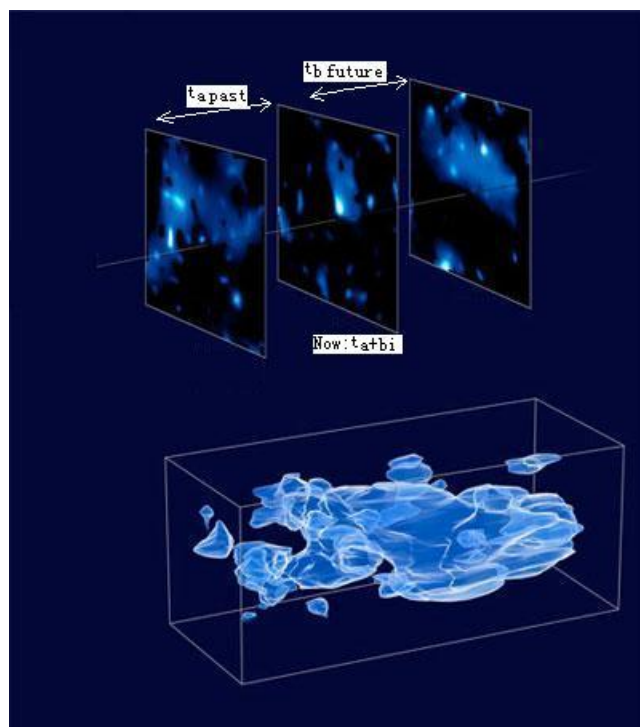
根据前文的定义我们知道，这里的下载流量，其实指的是加权的 link 数，也就是 A 最终被展开为一个所有节点的度数都相同的网络，也就是一个 lattice。这时我们恍然大悟，A 其实就是均质的时空结构。B，就是扭曲了的时空结构。在下图中，A 就是图中的均质立方体，而经过扭曲处理，变成了 Banavar 中心源网络 B，位于立方体内不均质的一团“时空分形”。时空分形 B 所“占据”的时空 scale，和 A 是相等的，但上面任意一个时空切块，都存在

着大大小小的流，且无论如何对时空进行切块，流的分布总是一个幂律分布。



现在，再回头看我们之前讨论的种种结构闪电、血管、烟雾、树根、火焰、水流...这些，是否都是“隐形人”身上泼的墨水，悄悄地告诉我们关于时空扭曲的秘密呢？也许你对把一段树根称之为“时空结构”觉得莫名其妙，那么请考虑一下星云的那张图（图中为虫子星云 NGC 6302），这个星云图本身表达的就是一个“真正”的时空结构，因为星云质量的存在，时空在那里附近被扭曲了。星云图和树根的差异，从时空分形的角度来说，仅仅在于尺度而已。

复数时间、时间的周期与跳跃的时间







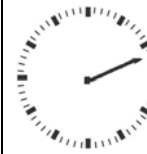
经典物理学的时间 t 都是用实数来表示的，我们在这里提出另一种表达方式：使用复数来表示时间。这意味着时间有两个部，一个是实部，一个是虚部。我们认为实部代表“过去”，

虚部代表“未来”。容易看出，这种时间与我们传统物理意义上的时间是不同的，当我们谈论任意一个时刻 tn 的时候， $t(a+bi)$ 的表达方式都在提醒我们注意我们所谈论对象的诞生和死亡离当前时刻的距离。也就是说，每一个具体的存在，都拥有自己的“时钟”。我们称这种时间为“局部时间”。

根据我们前文对时空分形的描述，我们知道，四维时空的任何一个局部块都不是均值的。P2P 传输网络的例子使我们认识到，四维时空结构的展现，完全依赖于时间。所以四维时空结构的不均匀问题，可以表达为**时间流逝速度的变速问题**。最后导致我们观察到的**时间是一个层层嵌套的周期结构**。现在我们可以尝试着解释这个问题了。传统的实数时间观下，时间流逝的速度是个常数，也就是说一阶导数等于 0。但在复数时间观下，时间流逝的速度却不是常数，也就是说一阶导数不等于 0。

我们举一个实际的例子来看这个过程：

假设时间被分成 6 段，那么，“诞生”到“死亡”中间一共经历了 5 步：

	第一步	第二步	第三步	第四步	第五步
传统表示	1	2	3	4	5
复数表示	$1+5i$	$2+4i$	$3+3i$	$4+2i$	$5+i$
复数角表示	$5.1[\text{Sin}(79) + \text{cos}(79)i]$	$4.5[\text{Sin}(63) + \text{cos}(63)i]$	$4.2[\text{Sin}(45) + \text{cos}(45)i]$	$4.5[\text{Sin}(27) + \text{cos}(27)i]$	$5.1[\text{Sin}(11) + \text{cos}(11)i]$
复平面					
指数表示	$\text{Exp}(1.4i)$	$\text{Exp}(1.1i)$	$\text{Exp}(0.8i)$	$\text{Exp}(0.5i)$	$\text{Exp}(0.2i)$

$$t = e^{(\theta i)}$$

$$\ln(t_1) + \ln(t_2) + \ln(t_3) + \ln(t_4) + \ln(t_5) = \ln(t_1 t_2 t_3 t_4 t_5)$$

$$= \ln(e^{(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5)i})$$

$$= (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5)i + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 等于 } 45^\circ i, \text{ 及其周期}$$

推广到 n 步，当 n 为奇数个时，结果也是一样的，当 t 有偶数个时，则为 0。

我们考虑计算一批时间步的信息熵（以下简称数据熵） $S = -\sum p_i \log_2 p_i$ ，其中 p_i 代

表在集合中随机取一个个体，具有标志值 i 的概率 = $\frac{n_i}{N}$ 。对于连续变量，则数据熵公式变

$$\text{为 } S = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx \quad (1), \quad f(x) \text{ 代表相对密度分布函数最大熵原理是指积分 (1)}$$

总是达到最大，在这个条件下，利用拉格朗日方法可以求我们还不知道的 $f(x)$ 。

我们已知两个约束条件：

$1 = \int_a^b f(x) dx$ (2): 概率的归一化条件;

$u = \int_a^b f(x) \ln x dx$ (4): 我们已经证明对于复数时间, 其 \ln 形式的总和是个固定值。

依照拉格朗日方法, 将式 (2) 乘以未知常数 C_1 , 将式 (4) 乘以未知常数 C_2 , 加上 (1),

$$F = -\int_a^b f(x) \ln f(x) dx + C_1 \left[\int_a^b f(x) dx - 1 \right] + C_2 \left[\int_a^b f(x) \ln x dx - u \right]$$

令 F 对 f 的偏微商=0, 得到

$$\ln f(x) = -1 + C_1 + C_2 \ln x = \left[\exp(-1 + C_1) \right] x^{C_2}, \text{即幂律分布}$$

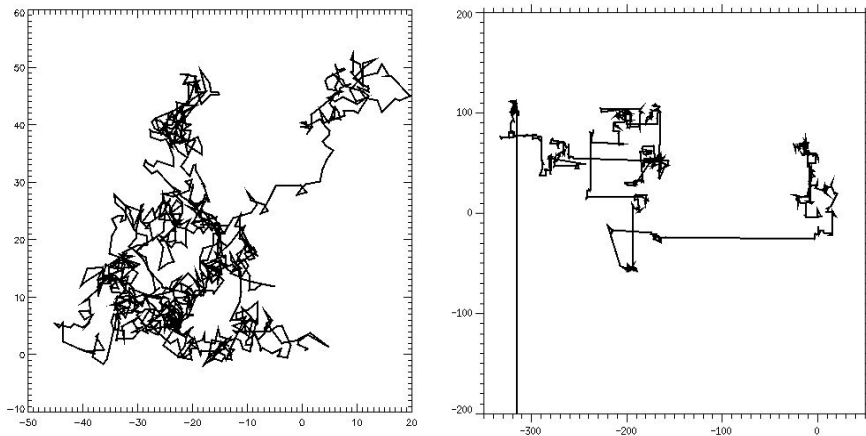
在 $1 \leq x \leq b$ 的情况下, $f(x) = \frac{1}{\ln u} x^{-1-\frac{1}{\ln u}}$

如果 u 很大, $-1-\frac{1}{\ln u}$ 就接近于-1, 此时 f 和 x 的乘积是常数, 也就是 f 和 x 是双曲线关系,

又称 Zipf 律。

因此, 周期结构的复数时间, 在被我们观察到的时候, 具有“跳跃”的性质, 其跳跃的方式, 即不同大小的复数时间被我们看到的概率是不一样的。这个概率的分布, 是一个幂律分布。

复数时间还有一种能力, 就是将一个随机布朗运动转变成 levy 随机游走。对于一个布朗运动, 我们不是每隔一个单位时间取样, 而是使取样的时间单位遵循 zipf 律, 将得到的结果再绘制出来, 就会得到 levy 随机游走的图样。



看到了复数时间这么多奇妙的特点, 我们不仅又想继续追问: 为什么会有复数时间呢? 等到我们在《涌现五》里见面时, 也许我们应该谈谈路径积分, 拉格朗日最小作用原理与傅里叶变换了。