量子信息网络的子空间中抗消相干

毕　　桥

武汉理工大学 理学院 物理科学与技术系
中国 武汉 430070

量子信息网络

量子信息网络被认为是由量子信道所连接的空间分离节点所组成；量子逻辑运算和量子信息处理在不同节点之间的合作和协调；使网络能够执行各种非局域的量子计算和通信。

Quantum information network

Examples of quantum information networks include the quantum internet, in which nodes are quantum computers and quantum routers and edges are physical or wireless connections between them.

从物理上实现这个网络

- 从物理上来实现这个网络，网络节点可以被看作是陷域的原子，离子，光子或者是一个量子点。两个不同的网络节点间的相互作用取决联接它们的量子信道中一个或多个光子（或纠缠）传输。这些通道构成了节点之间的联系，并在网络中发挥了重要作用。

量子密匙分配传输已近实用

- 但是在量子计算，量子teleportation方面，离实用还有很大的距离。
- 其中一个极大的障碍就是**对消相干的控制**。目前还没有一个稳妥之策。

量子网络的特征还知之甚少

- G. Bianconi, 和 A -L Barabási, Phys. Rev. Lett. 86, 5632 (2001)在01年左右提出了量子玻色子网络和费米子网络及两者的混合。并用复杂网络的方法来研究它们并应用于玻色-爱因斯坦凝聚。
- 我们随后的研究发现这些量子网络的拓扑性质和动力学性质是互相关联的。动力学性质对拓扑性质有深刻的影响。
- 量子网络的特征还知之甚少。

有趣的猜想

- 但是量子网络同经典网络最大的不同倒不是拓扑性质的区别而是网络的量子机制，即量子超叠加原理和量子纠缠态。由此出现了量子并行性，量子计算，量子通讯。
- 一个突出的问题是如何控制量子信息处理过程的消相干。

重要性

理论物理学家、2004年诺贝尔物理学奖获得者美国凯乌利理论物理研究所所长大卫·格罗斯教授，在中国科学院理论物理研究所“前沿科学论坛”做了题为《物理学的将来》的演讲，讨论当前物理学面临的25个问题，及它们如何引导物理学未来25年的发展。第15个问题就是：如何构造和发展有效的方法来防止量子计算中的“消相干”。

Quantum Computing

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\sum_n \alpha_n \varphi_n \to \sum_{n'} \alpha_{n'} \varphi_{n'}$$

$$\Updownarrow$$

$$\varphi_1 \to \varphi_{1'}$$

$$\varphi_2 \to \varphi_{2'}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n \to \varphi_{n'}$$

什么是量子消相干？

A Crucial Problem for Quantum Computing is Decoherence

$$\Psi = \varphi \otimes \phi \rightarrow \Psi' \neq \Psi$$

争论焦点

- 近几年量子理论的一个重要进展，就是发现了量子抗消相干的子空间。
- 有许多理论和模型。许多方案已考虑控制马尔可夫近似类型的消相干。
- 也存在些文献，考虑处理非马尔可夫近似类型的消相干。

有意义的问题

- 实验上，无消相干子空间最近已发现，表明，这种无消相干子空间确实存在，它使量子逻辑编码能够免于消相干[1]。
- 然而，发现一个高效，实用的无消相干子空间方案，仍然是一个非常有意义的问题，因为大多数无消相干子空间是近似的，实施起来也不那么容易。

[1] P. G. Kwiat, A. J. Berglund, J. B. Altepeter, and A. G. White, Science 290, 498 (2000).

投影子空间

- 我们发现SKE 投影子空间可以构造为一个DF子空间，当总体空间有消相干时，这一投影子空间可以在适当的（控制）条件下，保持量子态无消相干。

SKE: 从普利高津谈起

1977年，在获得了NOBEL化学奖之后，普利高津陷入了沉思……

在非平衡系统中，在与外界有着物质和能量交换的情况下，系统内各要素存在着复杂的非线性的相互作用可以产生自组织有序态，可称为耗散结构。

普利高津沉思什么？

什么是耗散结构产生的微观机理？也就是说它的量子力学基础是什么？

Time Evolution Paradox

广义相对论和量子场论的矛盾（超弦理论，圈引力理论）

量子力学和热力学的矛盾（引发什么？）

Schrodinger 方程是时间可逆的，正时间和负时间带入所得的结果是一样的。表现出它的演化算子是unitary

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = H\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(t) = e^{-iHt}\varphi(0) = U(t)\varphi(0),\ t \in (-\infty, \infty)$$

$$e^{-iH(-t)}\varphi(t) = \varphi(0) = U^{+}(t)\varphi(0),\ t \in (-\infty, \infty)$$

热力学第二定律:

For a isolated and closed system, the intrinsic entropy is (never) decreased, which defines a time arrow, i.e.,

$$\Delta S_{system} \geq 0$$

Time Evolution Paradox告诉我们：

仅仅Schrödinger or quantum Liouville equation 不能解释不可逆性，不能解释万事万物的演化! 那么什么是解释不可逆性的基本量子（统计）力学方程?

存在着两类不可逆过程：

- Intrinsic irreversibility: (including 封闭的，保守的系统)，Chaotic System，衰变体系。

- Extrinsic irreversibility（相互作用的开放系统）

- 量子力学是描述单个粒子运动的方程，同热现象无关，所以不存在量子力学同热力学第二定律的矛盾?
- 量子力学不仅仅是描述单个粒子运动的方程，也可以利用波函数张量积的形式来描述量子多粒子体系。从而同热现象发生关系。
- 量子力学可逆性，不能解释**Intrinsic irreversibility**！

Brussels-Austin Group 两大工具

(1)子动力学

(2)扩张空间

特别用来解释和描述Intrinsic irriversibility

Subdynamics

$$i\frac{\partial\rho_{proj}}{\partial t}=\Theta\rho_{proj}$$ (投影空间)

$$\updownarrow\ \Omega\Theta\Omega^{-1}=L$$ （相似变换）

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t}=L\rho$$ (Liouville 空间)

Rigged Hilbert Space

Hilbert space

$$\Phi \subset L^2 \subset \Phi^+$$

Dense subspace

Dual subspace

SE for Quantum Open System

From original SE to SE of quantum open system:

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(H_0 + \lambda V\right)\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$i\frac{\partial \varphi_{proj}}{\partial t} = \left(H_0 + \lambda VC\right)\varphi_{proj}$$

$$-i\frac{\partial \varphi_{proj}^{+}}{\partial t} = \left(H_0 + \lambda DV\right)\varphi_{proj}^{+}$$

可以认为：

- 如果相似变换是幺正的，则子动力学是原Schrodinger或Liuville方程的等价表示，表示空间：Hilbert or Liouville 空间;
- 如果相似变换是非幺正的，则子动力学是原Schrodinger或Liuville方程的扩张表示，表示空间：Rigged Hilbert or Rigged Liouville 空间.

SE或LE能够应用于不可逆过程中，但不是在Hilbert (Liouville)空间中；如果限于传统的Hilbert (Liouville) 空间中来处理不可逆问题，那么everything may be wrong.

SKE的提出，看到了新的扩张空间同投影算子代数结合的应用前景，在大量不可逆量子系统（包括原子核衰变系统，混沌系统）的复本征值问题求解中去得了很大的成功（Brussels-Austin group 1988-2003几百篇文章在国际刊物上发表）

Complex spectrum for Self-adjoint operator H

$$\varphi = \varphi_0 e^{-iHt} = \varphi_0 e^{-(i\alpha + i\beta)t}$$

$$= \varphi_0 e^{-i\alpha t + \beta t}$$

$$= \varphi_0 e^{+\beta t} e^{-i\alpha t}$$

Where $\alpha \quad + \quad i\beta \ t$ is an complex eigenvalue of H **in a Rigged Hilbert Space.**

SKE发现了DF(2001）

- One of interesting advantages to use the above formalism is to construct a precise decoherence-free (DF) subspace.
- It is marvelous that the projected space on which subdynamics works is just a kind of DF subspace naturally by choosing proper basis.

本征函数在子空间不变

$$i\frac{\partial \varphi_{proj}}{\partial t} = (H_0 + H_1 C)\varphi_{proj}$$

$$\Downarrow$$

$$(H_0 + H_1 C) = \sum_n \langle \phi_n | (H_0 + H_1 C) | \phi_n \rangle | \phi_n \rangle \langle \phi_n |$$

where in projected space the eigenvector is invariant :

$$(H_0 + H_1 C)|\phi_n\rangle = \left(E_n^0 + \langle \phi_n | H_1 C | \phi_n \rangle\right)|\phi_n\rangle$$

$$H_0|\phi_n\rangle = E_n^0|\phi_n\rangle$$

$|\phi_n\rangle$ is an invariant eigenvector for $(H_0 + H_1 C)$ and H_0

Stabilize Quantum Computing: Using the property of eigenvectors in the projected subspace

$$\left(H_0 + H_1 C\right)\left|\phi_n\right\rangle = \left(E_n^0 + \left\langle\phi_n\right|H_1 C\left|\phi_n\right\rangle\right)\left|\phi_n\right\rangle$$

$$H_0\left|\phi_n\right\rangle = E_n^0\left|\phi_n\right\rangle$$

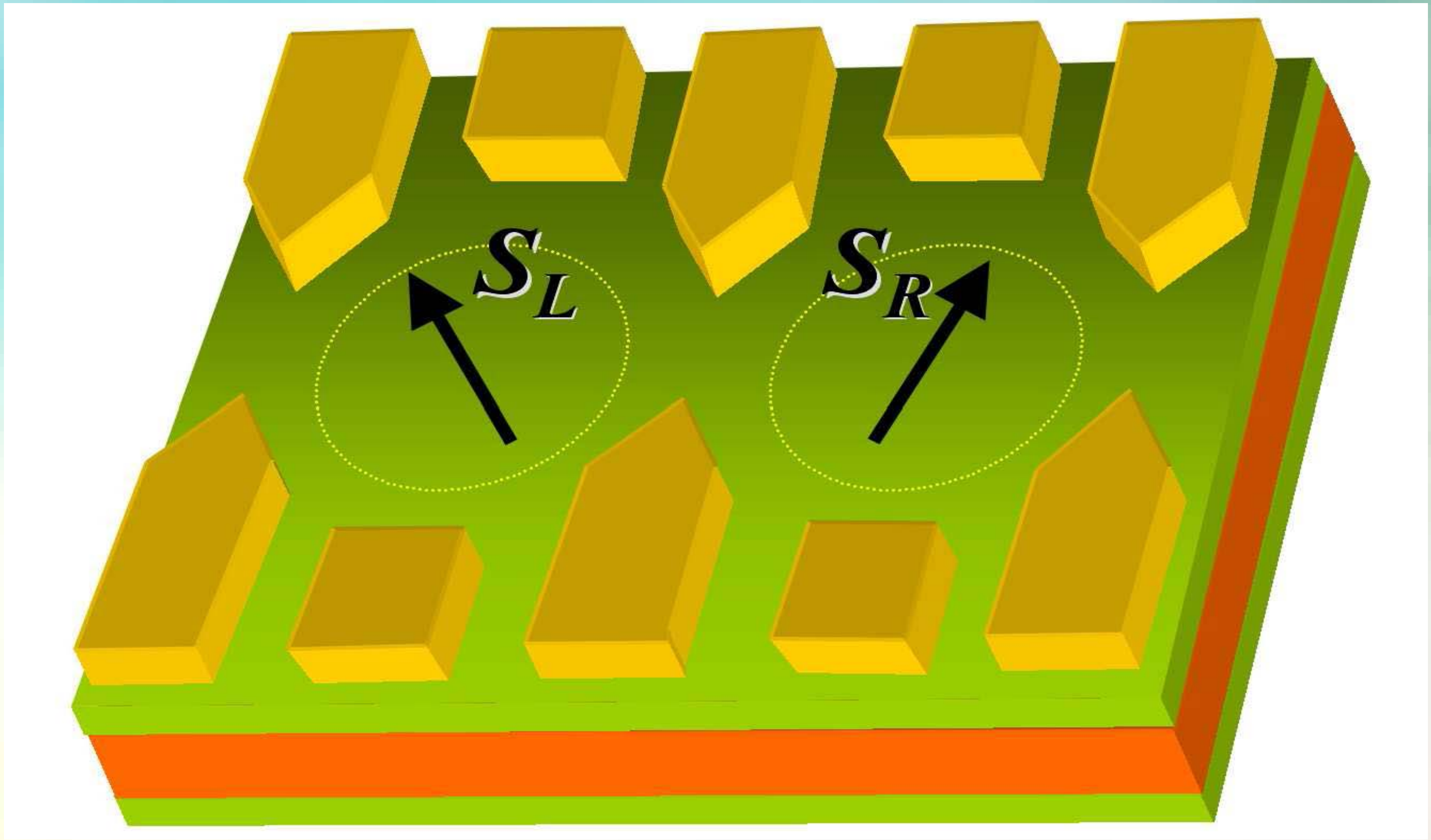
子空间无消相干理论?

- 但是，本征值的变化引起了相位漂移。如何克服它呢?
- 为此我们进行了很长时间的努力，考虑了很多近似方法，并希望能找到一种精确的方法消掉相位漂移。最后的结论是精确的消掉相位漂移是不可能的。
- **所有的子空间无消相干理论可能都是近似的。**

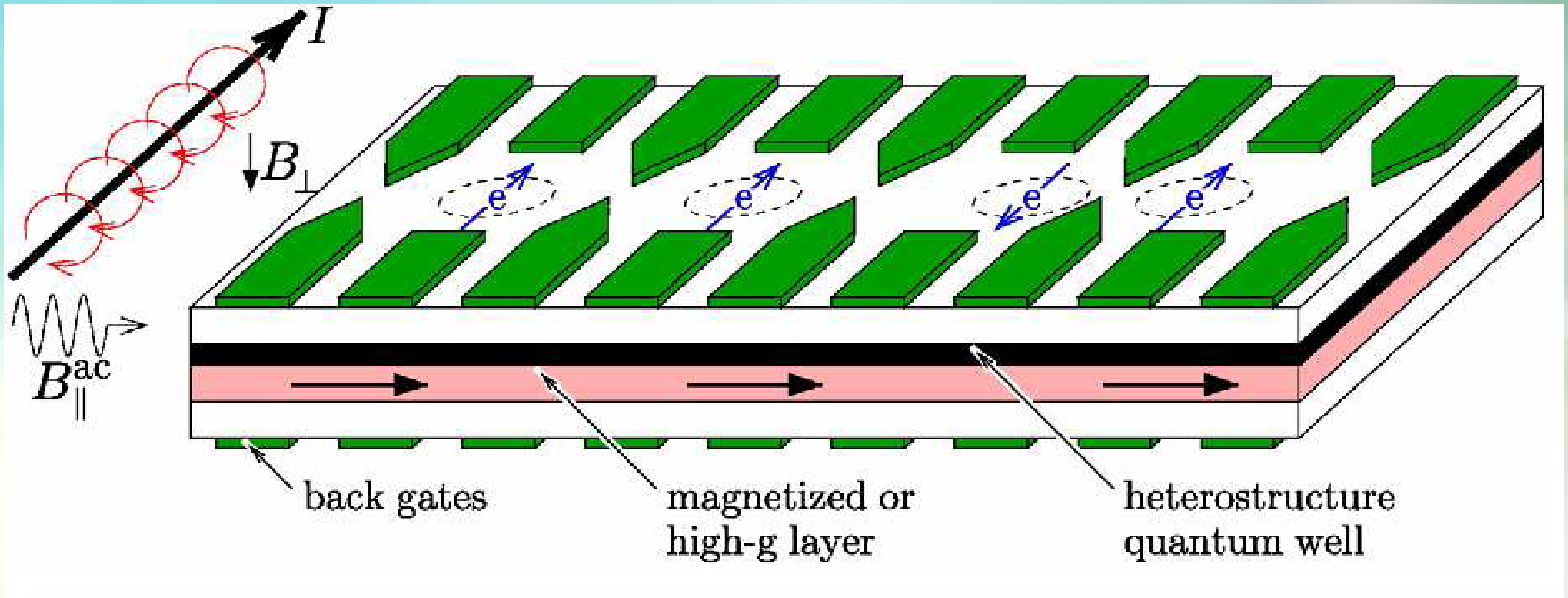
构造只对环境指标三角化的子空间也许是一个：

途径

For example: Two qubits quantum computing system



Physical Model



两个比特的量子计算系统S

- Consider a typical two qubit quantum computing system S, consisting of the spins S_1 and S_2, such as the two electrons of two ^{31}P confined in a germanium/silicon heterostructure of an electron spin-resonance transistor or the two electrons confined in two quantum dots.

Hamiltonian for *S System*

忽视环境的影响，利用海森伯模型，哈密顿量有如下形式：

$$H_S(t) = J(t) S_1 \cdot S_2$$

这里 $J(t)$ 是依赖于时间的交换耦合参数。

Using quantum states

- Using the relationship between $S_1 \cdot S_2$ and the square of the sum of S_1 and S_2, the eigenvalues and eigenvectors of $S_1 \cdot S_2$ can be found from

$$S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{2}\left(S^2 - \frac{3}{2}\right)$$

giving :

$$E_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{ \left|\phi_1\right\rangle = \left|11\right\rangle, \left|\phi_2\right\rangle = \left|00\right\rangle, \left|\phi_3\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|01\right\rangle + \left|10\right\rangle\right) \right\}$$

$$E_2 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \left|\phi_4\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|01\right\rangle - \left|10\right\rangle\right)$$

Quantum CN gate

A quantum control-Not (CN) gate can be given by the sequence of operations（D. Loss, 1998),

$$U_{CN} = e^{i(\pi/2)S_1^z} e^{-i(\pi/2)S_2^z} U_{sw}^{1/2} e^{i\pi S_1^z} U_{sw}^{1/2}$$

where U_{sw} is an ideal swap operator which can exchange the quantum states of qubits 1 and 2.

The swap operator

It can be determined generally by an evolution operator by adjusting the coupling time between the two spins in the evolution of the system:

$$U_{sw} = e^{-i\int_0^{\tau_s} H_s(\tau)d\tau} = \sum_{n=1}^{3} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left|\phi_n\right\rangle\left\langle\phi_n\right| + e^{i\frac{3\pi}{4}} \left|\phi_4\right\rangle\left\langle\phi_4\right|$$

The environment

在环境的影响下， swap算符的非理想行为必须考虑到，因为环境的影响可以在理想swap算符中引入消相干。

Total Hamiltonian

Then, the Hamiltonian for the total system is

$$H(t) = H_S(t) + H_B + \lambda H_{\text{int}}$$

where the environment is assumed to consist of a set of two-level particles randomly embedded in an environment

$$H_B = \sum_k \omega_k \sigma_k^z$$

The Hamiltonian coupling the two qubits spin system is

$$\lambda H_{\text{int}} = \sum_k \left(\sigma_1^z + \sigma_2^z\right)\left(g_k \sigma_k^+ + g_k^* \sigma_k^-\right)$$

Interaction

The Hamiltonian coupling the two qubit spin

system is

$$\lambda H_{\text{int}} = \sum_k \left(\sigma_1^z + \sigma_2^z\right)\left(g_k \sigma_k^+ + g_k^* \sigma_k^-\right)$$

where σ_k^+ and σ_k^- is raising/lowering operator for the kth two-level particle, characterized by a generally complex coupling parameter g_k .

The eigenvectors

The corresponding complete set of eigenvectors for

$$H_S(t) + H_B$$

is denoted as

$$\left\{ \left| \{k\} \otimes \phi_j \right\rangle, \left\langle \phi_j \otimes \{k\} \right| \right\}$$

The eigen-projectors

To control the induced decoherence, we choose the time-independent eigen-projectors of

$$H_S(t)+H_B$$

as

$$P_{nk} \equiv |\phi_n\rangle\langle\phi_n| \otimes |\{k\}\rangle\langle\{k\}|$$

$$Q_{nk}+P_{nk}=1 \quad \text{for } n=1,2,3,4$$

子空间两种情况的比较

- If there is no interaction,

$$\Theta_k(t)=\sum_{n=1}^{4}\langle\varphi_{nk}|H_S(t)+H_B|\varphi_{nk}\rangle P_{nk}$$

- If there is the interaction,

$$\Theta_k(t)=\sum_{n=1}^{4}\langle\varphi_{nk}|H_S(t)+H_B|\varphi_{nk}\rangle P_{nk}$$

$$+\lambda^2\langle\varphi_{1k}|H_{\text{int}}Q_{1k}\frac{1}{E_{1k}-Q_{1k}H(t)Q_{1k}}Q_{1k}H_{\text{int}}|\varphi_{1k}\rangle P_{1k}$$

$$+\lambda^2\langle\varphi_{2k}|H_{\text{int}}Q_{2k}\frac{1}{E_{2k}-Q_{2k}H(t)Q_{2k}}Q_{2k}H_{\text{int}}|\varphi_{2k}\rangle P_{2k}$$

The eigen-projectors are invariant

这表明 $\Theta(t)$ 的本征函数是不变的，且在构建的子空间中同相互作用无关。然而，其本征值是变化的（指数*n*仍然是的对角化，而指数*k*是非对角化的），这使得我们在这种情况下引入了一个相位改变。这种相位变化可以引入一种消相干，称：phase shift 。

Triangulation

For cancelling this phase shift, we consider the triangular decomposition in the upper-triangular or lower-triangular subspaceas, respectively

$$H_{\mathrm{int}} = H_{\mathrm{int}}^{utri} + H_{\mathrm{int}}^{dtri}$$

The upper-triangular (or lower-triangular) subspace to *k*

Then we get：

$$\left\langle \varphi_{nk} \right| \left(H_{\text{int}}^{utri} + H_{\text{int}}^{dtri} \right) \frac{1}{E_{nk}(t) - Q_{nk} H(t) Q_{nk}} \left(H_{\text{int}}^{utri} + H_{\text{int}}^{dtri} \right) \left| \varphi_{nk} \right\rangle P_{nk}$$

$$= \left\langle \varphi_{nk} \right| H_{\text{int}}^{utri} \frac{1}{E_{nk}(t) - Q_{nk} H(t) Q_{nk}} H_{\text{int}}^{dtri} \left| \varphi_{nk} \right\rangle P_{nk}$$

$$+ \left\langle \varphi_{nk} \right| H_{\text{int}}^{dtri} \frac{1}{E_{nk}(t) - Q_{nk} H(t) Q_{nk}} H_{\text{int}}^{utri} \left| \varphi_{nk} \right\rangle P_{nk}$$

$$= 0$$

General DF Subspace constructed by triangulation

这里上三角或下三角子空间是通过上三角或下三角的投影算符来定义的，且上三角和下三角的内积为

$$P_{kk'} = |k\rangle\langle k'|, k' \leq k\,(\text{或}\,k' \geq k)$$

Triangular Matrix

对于任意的A，都有

$$\langle k | A | k' \rangle$$

for $k' \le k$, or $k' \ge k$

对环境指数*k*的上三角子空间

- 例如，任意算符*A*被定义为上三角子空间的算符，同指标*k*相关，这里*A*被表示成：

$$A = \sum_{k' \geq k} \langle k | A | k' \rangle | k \rangle \langle k' |$$

。

- 因此我们引入一个对环境指数*k*的上三角子空间，它同使得等效相互作用为0。

等效相互作用为0

$$\left\langle \varphi_{jk} \middle| \lambda H_{\text{int}} Q_{jk} \frac{1}{E_{jk}(t) - Q_{jk} H(t) Q_{jk}} Q_{jk} \lambda H_{\text{int}} \middle| \varphi_{jk} \right\rangle P_{jk} = 0 \text{ ， } j = 1, 2$$

这表明在上三角子空间构建的中间算符是独立于原始哈密顿量的相互作用部分的。因此，通过消除子空间中的等效相互作用可使得相位改变为0。

量子控制非逻辑运算仍生效

在上三角子空间，量子控制非逻辑运算通过一系列运算生效，在环境作用前后仍旧保持不变。我们用一个公式描述：

$$Tr_B \exp\left(-i\int_0^{\tau_S} \Theta(\tau)d\tau\right) = Tr_B \exp\left(-i\int_0^{\tau_S} \left(H_S(\tau)+H_B\right)d\tau\right)$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{3} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)|\phi_n\rangle\langle\phi_n| + \exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right)|\phi_4\rangle\langle\phi_4|\right]$$

$$\times \sum_k \left[\exp\left(-i\left(\frac{-a^2\omega_k+\omega_{k+1}}{-a^2+1}\right)\right) + \exp\left(-i\left(\frac{-a^2\omega_{k+1}+\omega_k}{-a^2+1}\right)\right)\right]$$

由三角化构建的广义退消相干子空间

考虑到在各种模型中环境与系统的相互作用可能会有很大的不同，这里我们提出一个由三角化来构建DF子空间的一般过程：设在量子计算系统中使用的各种态是自由哈密顿量的本征矢，那么自由哈密顿量的矩阵是对角的。其本征投影算子为

$$P_{nk}$$

广义的情况

现在，如果系统受到来自环境的诱导相干（广义的），则哈密顿量矩阵对于环境指标变成了非对角的（对于原系统的指标是对角的）。因此，通过定义在这一空间上的上三角内积规则，我们可以构建上三角子空间，这样：

$$\Theta_{\text{int}} = \sum_{k' \geq k} P_{nk} H_{\textbf{int}} P_{n'k'} C_{nk} P_{nk} = 0$$

$\Theta = H_0$的谱分解保持不变

- 也许有必要强调的是，在DF（三角）子空间中各种态只是投影态，在子空间中投影态是可测量的，因为是正交的（和关于的三角）且可区分的，其中三角内积只有对与环境有关的指标是有效的，这里是指*k*，而对于其他与原系统有关的指标*n*，正常的内积仍在使用。所以可称偏三角子空间。
- 最后，在这一空间中三角内积规则是否会限制或改变原来的控制非门逻辑运算而引入错误呢？答案是否定的，因为人们在前面已看到量子控制非门逻辑运算在三角化的子空间中仍是正常工作的。

实现程序

那么，如何才能在量子计算实际过程中实现上面的过程？我们想建立一个附加测量和转换系统来读取或计算一些数据，如传递相关原系统的本征值和本征矢数据到偏三角子空间，然后用偏三角子空间中的点积规则进行运算。这里的关键是为构建偏三角子空间而建立一个测量和变换体系，它允许在偏三角子空间阅读和运算本征值和本征矢的数据。

结论

这意味着，在量子计算过程中，如果我们在SKE所对应的子空间或子网络系统中构造对环境指标为三角内积而保持原系统指标关于内积关系不变，那么量子信息在子动力空间中的消相干可以完全被取消。马尔可夫或非马尔可夫过程等消相干限制条件没有必要。这种方案具有一定的普适性。

谢 谢