

复杂网络的结构与动力学行为之间的相互关系

——以同步为研究视角

报告人：赵明

2009.12

复杂网络上的动力学行为

✦ 网络的结构对动力学行为的影响

✦ 网络上的动力学行为对结构的反作用：

网络上的交通、疾病传播

✦ 网络的结构和动力学行为之间的相互作用

自适应耦合

——动力学行为对网络结构产生影响

✦ 考虑到节点受到耦合的强度大小与其自身和邻居的状态变量间的差异决定，差异大耦合强度就要增加的快，差异小耦合强度增加的就要缓慢。因此周昌松和Kurths提出了一种自适应的耦合方式来实现网络同步。

状态差异大
↓ ↓ ↓
耦合强度增加速度快；

状态差异小
↓ ↓ ↓
耦合强度增加速度慢

实现办法

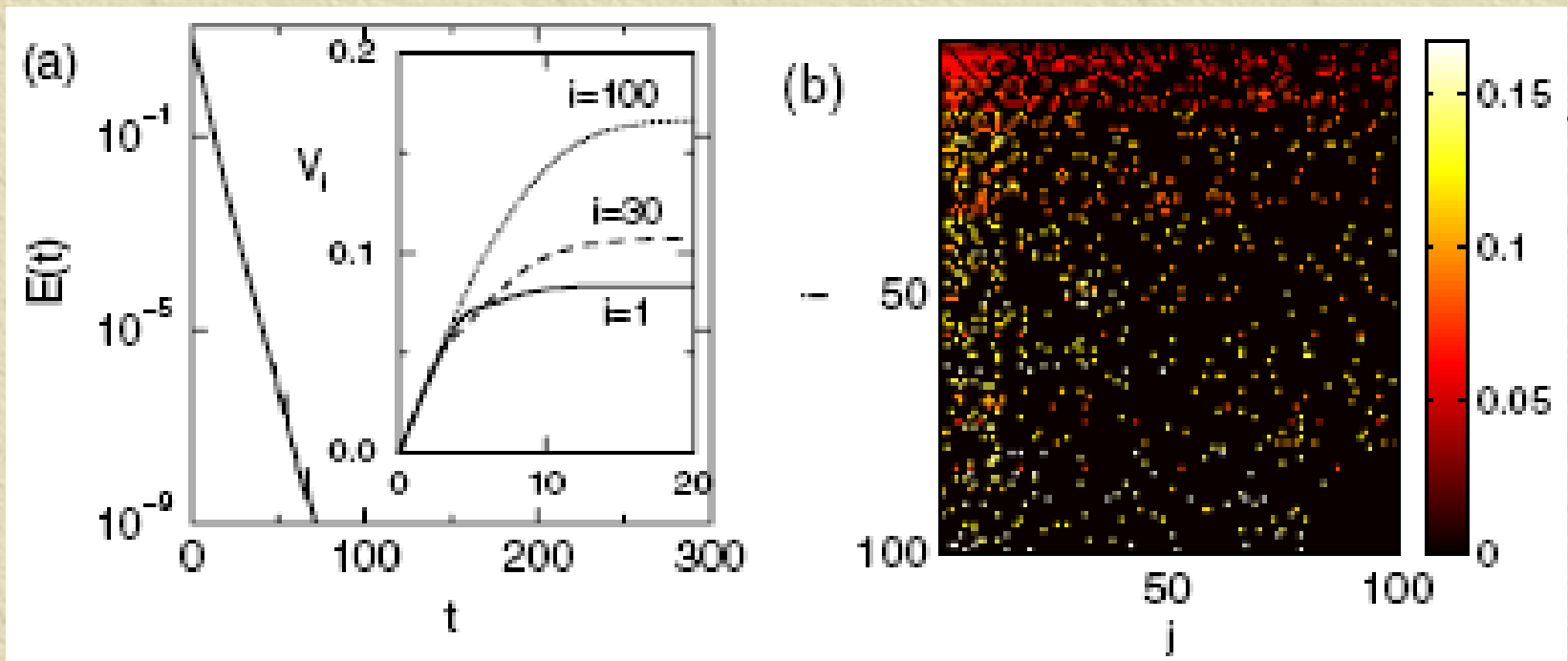
定义耦合矩阵 G :
$$G_{ij}(t) = A_{ij}V_i(t) \quad (1)$$

其中:
$$\dot{V}_i = \gamma \Delta_i / (1 + \Delta_i) \quad \gamma > 0 \quad (2)$$

$$\Delta_i = | \mathbf{H}(\mathbf{x}_i) - (1/k_i) \sum_j A_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j) | \quad (3)$$

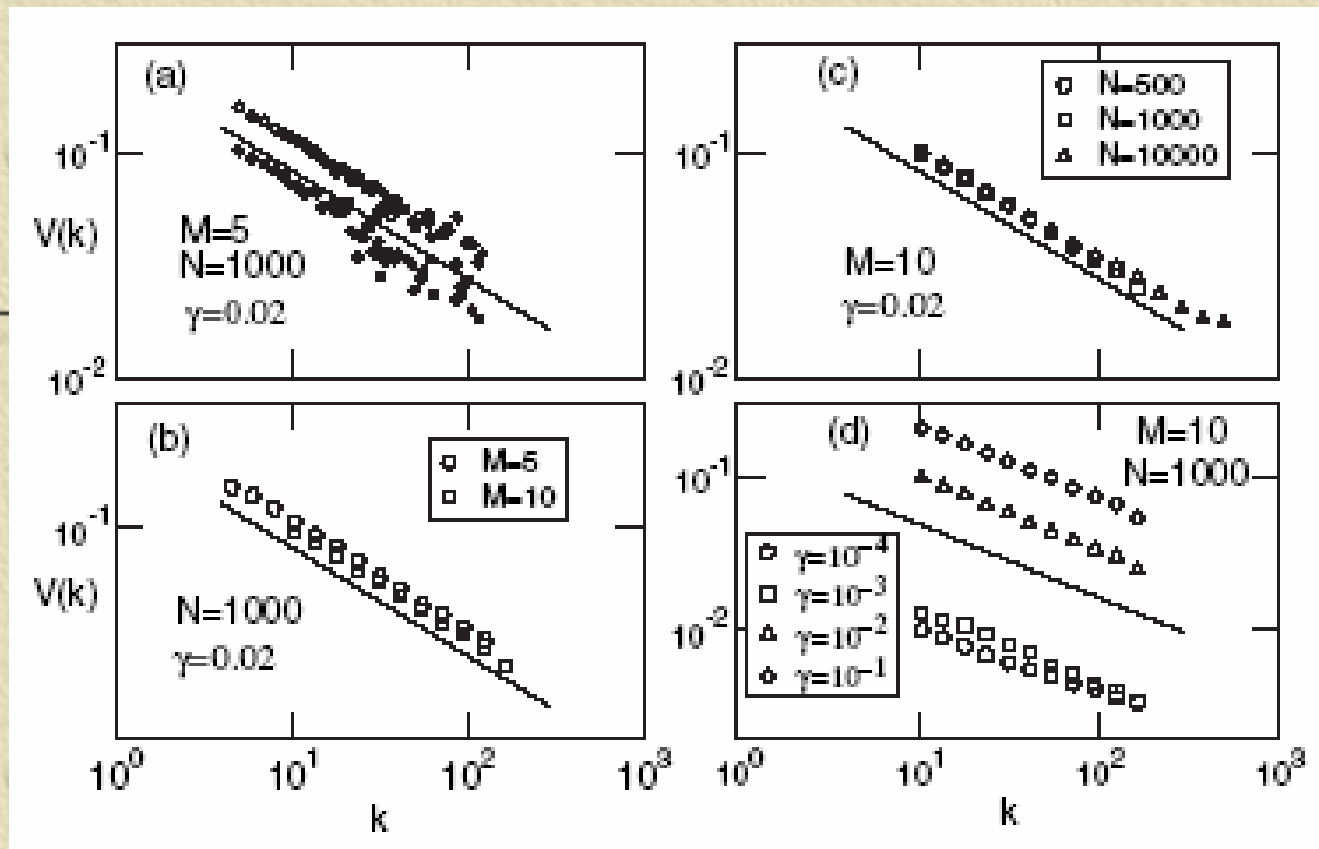
(3)式描述了节点*i*与其邻居间的状态差异；(2)式定义了输入耦合强度，节点*i*与其邻居间的平均状态的差异越大，其增长的就越快，当网络接近同步时其变化率接近于0，输入耦合强度也达到一个稳定值。注意到同一个节点受到的其不同邻居的耦合的强度是相同的。

同步区域half-bounded的情况



(a) 网络通过自适应耦合实现同步的过程，其中 $E(t) = \langle |\mathbf{x}^i - \langle \mathbf{x}^i \rangle| \rangle$ ， $\langle \cdot \rangle$ 表示对各个节点的平均。插图是三个节点的输入耦合强度随时间的变化关系；

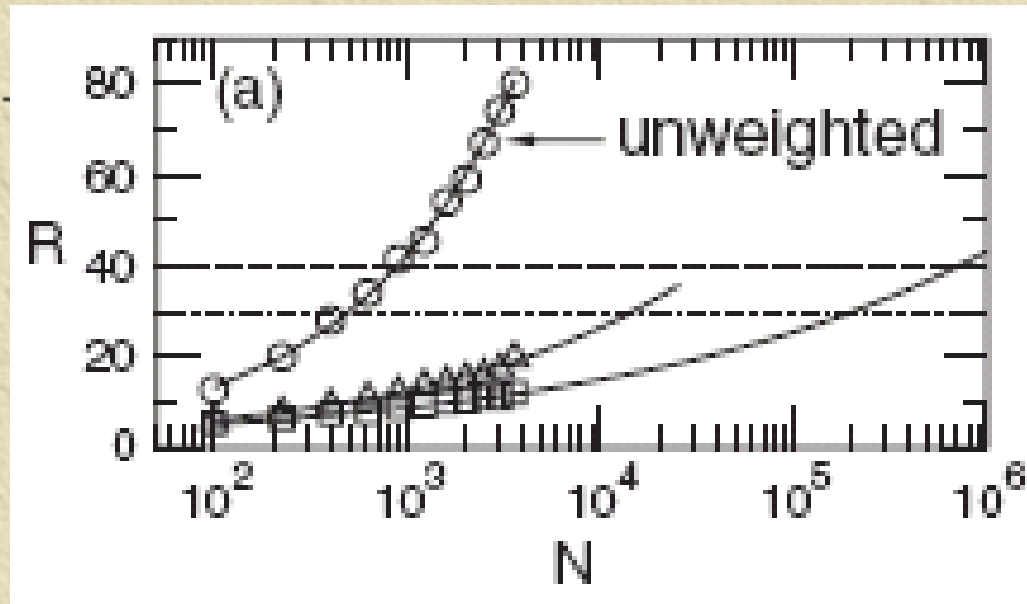
(b) 同步稳定后节点间耦合强度的分布。



节点的平均输入耦合强度随节点度的变化关系

可以看到节点的平均输入耦合强度 $V(k)$ 与节点度 k 之间满足幂率关系: $V(k) \sim k^{-\theta}$, 并且该关系不随幂指数不随最小度 (b)、网络规模 (c) 和自适应参数 (d) 而改变。

同步区域有界的情况



同步稳定后自适应耦合的稳定耦合矩阵的特征值比和传统对称耦合方式下的耦合矩阵的特征值比 R 随网络规模 N 的变化关系；图中un-weighted标记传统的对称耦合方式。


该种情况下节点的平均输入耦合强度 $V(k)$ 与节点度 k 之间满足与前述相同的幂率关系，但幂指数有所不同。

利用该种方式进行耦合，网络的同步能力要远强于传统的对称耦合方式下网络的同步能力。

自适应耦合的特点

- ✦ 考察了网络上的动力学行为对网络结构以及网络的同步性质的影响。
- ✦ 耦合强度稳定后获得了耦合网络，其每个节点的强度并不均匀，使得网络的同步能力没有处于最优化状态。

节点的强度(intensity)定义为该节点的输入耦合强度的和，对于一个随机的并且最小度比较大的网络来说，节点强度的分布越均匀网络的同步能力越强。

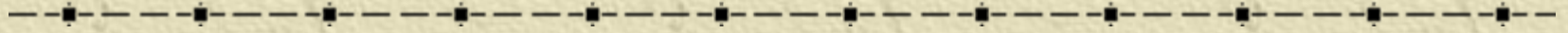


考察网络的结构和动力学行为之间的相互影响
——广义自适应耦合和网络

缘起

-
- ✦ 在自适应耦合网络中节点的被耦合的强度仅由网络中节点的动力学状态决定。
 - ✦ 在研究网络的结构对同步能力的影响中节点的被耦合强度仅由网络的结构决定。
 - ✦ 我们的工作：将自适应耦合(动力学部分)与度标准化的耦合方式(结构部分)相结合，使通过自适应耦合获得的输入耦合强度受到节点度的调节，进而讨论在网络的结构和动力学行为的共同作用下网络的同步性质。

方法



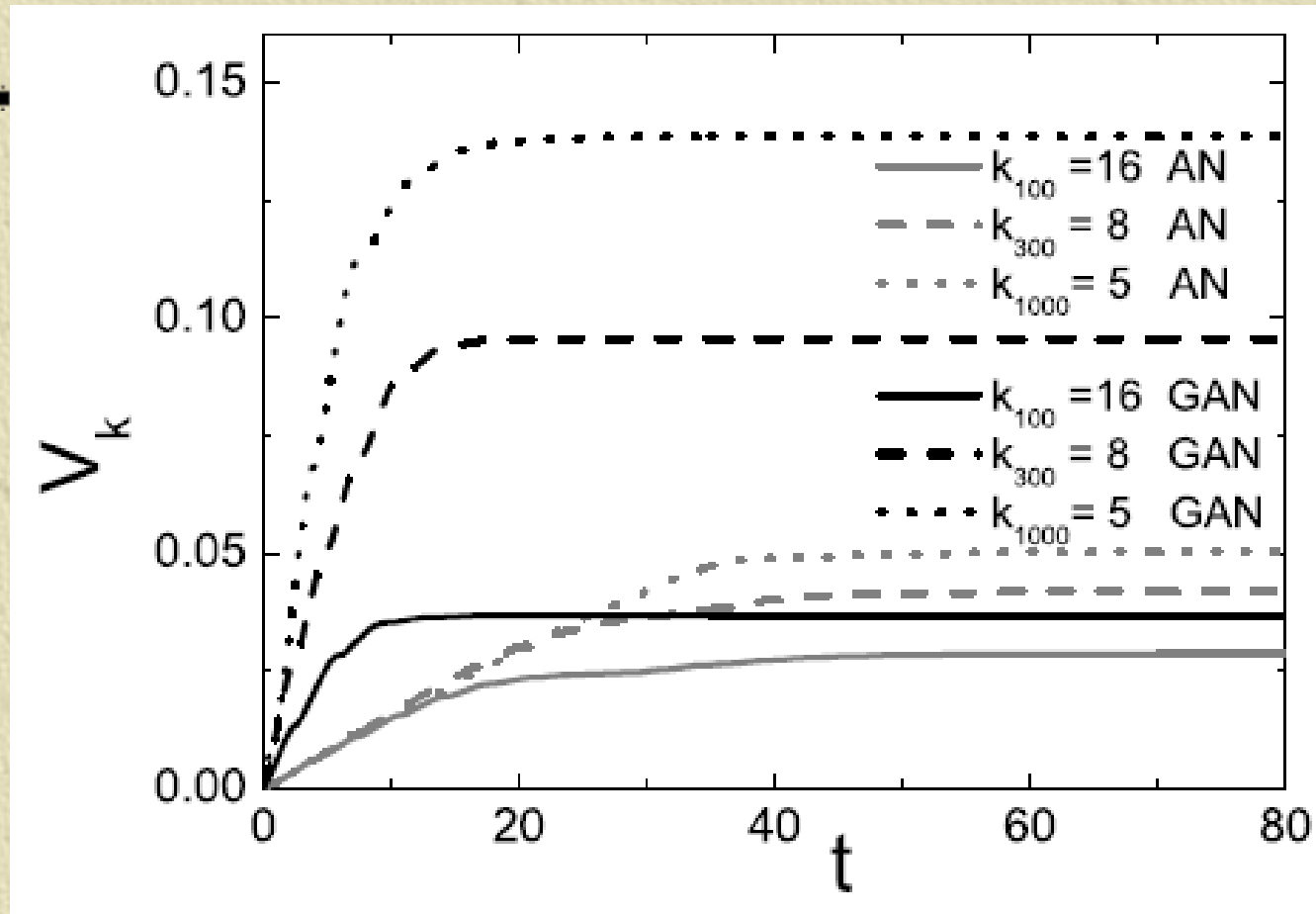
Original

$$\dot{V}_i = \gamma \Delta_i / (1 + \Delta_i)$$

Generalized

$$\dot{V}_i' = \dot{V}_i / k_i^\alpha = \gamma' \Delta_i / (1 + \Delta_i) \quad \gamma' = \gamma / k_i^\alpha$$

耦合过程(bounded情况)



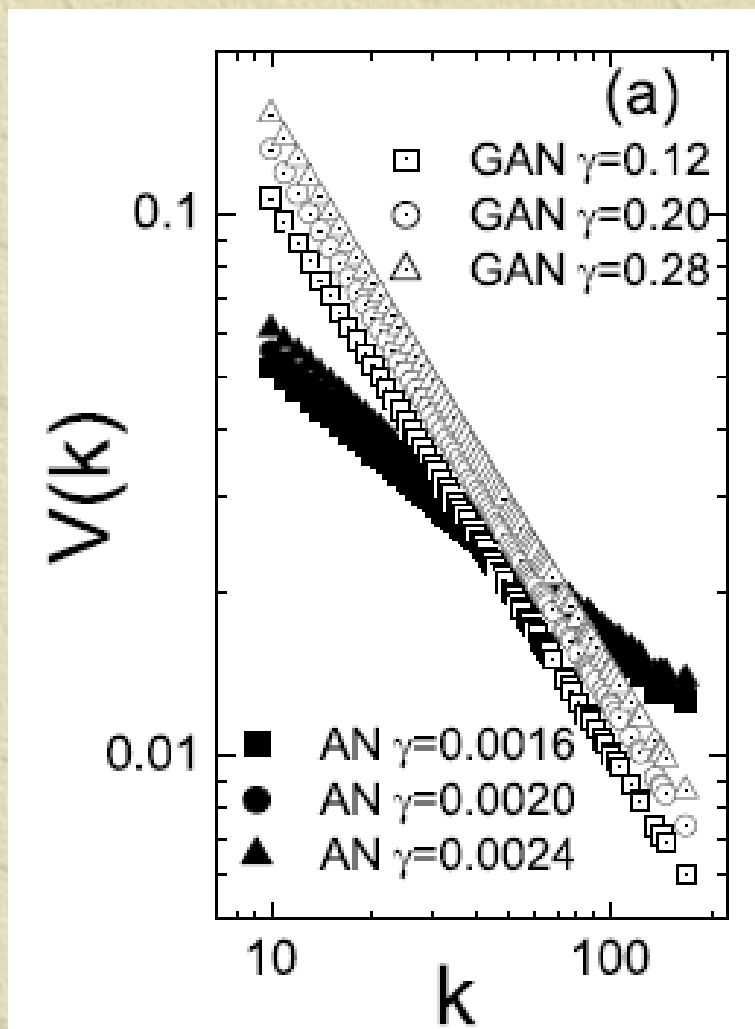
BA网络的几个典型节点的输入耦合强度随时间的变化，灰线：原自适应网络(AN)，黑线：广义自适应网络(GAN $\alpha=1$)

在耦合过程中，在自适应网络和广义自适应网络间存在明显差异：

✦ 在自适应网络里，在耦合之处，所有的节点输入耦合强度几乎以相同的速率增加

✦ 在广义自适应网络中，由于结构对输入的影响，使得在耦合之初就存在明显的差异：耦合强度越大的节点其输入速率就越慢

重要结论



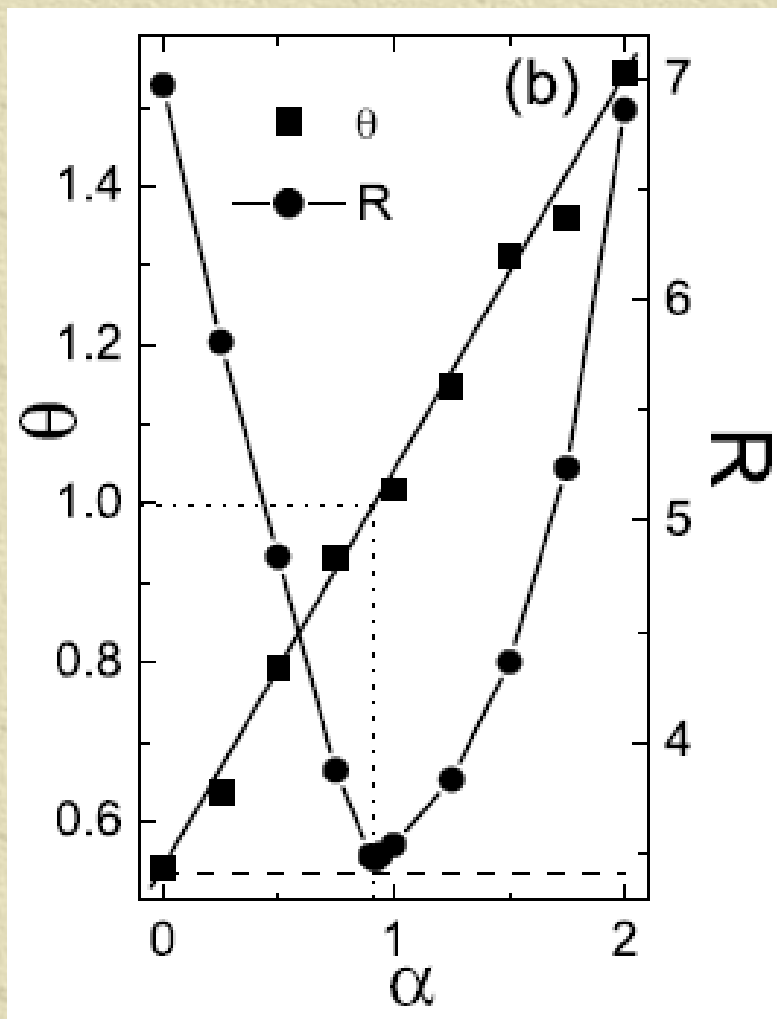
✦ 稳定后的输入耦合强度与节点的度之间仍满足幂律关系

$$V' \propto k^{-\theta}$$

✦ 这个幂指数的大小与参数 α 有关

$$\alpha=1$$

幂指数 θ 与参数 α 之间的关系



理论分析结果:

$$\theta = (1 + \alpha) / 2$$

数据拟合结果:

$$\theta = \theta_0 + \alpha / 2$$

θ_0 为原自适应网络耦合稳定后输入耦合强度分布的幂指数, 经数值模拟获得其值为 0.54

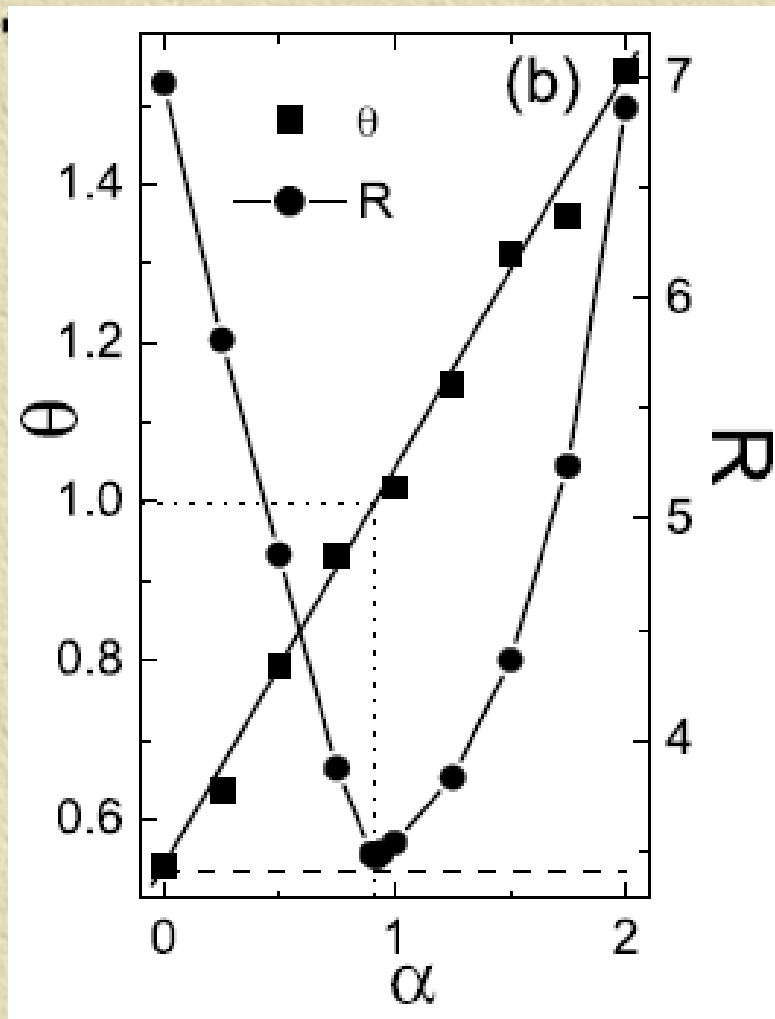
稳定的广义自适应网络的同步性质

节点的强度

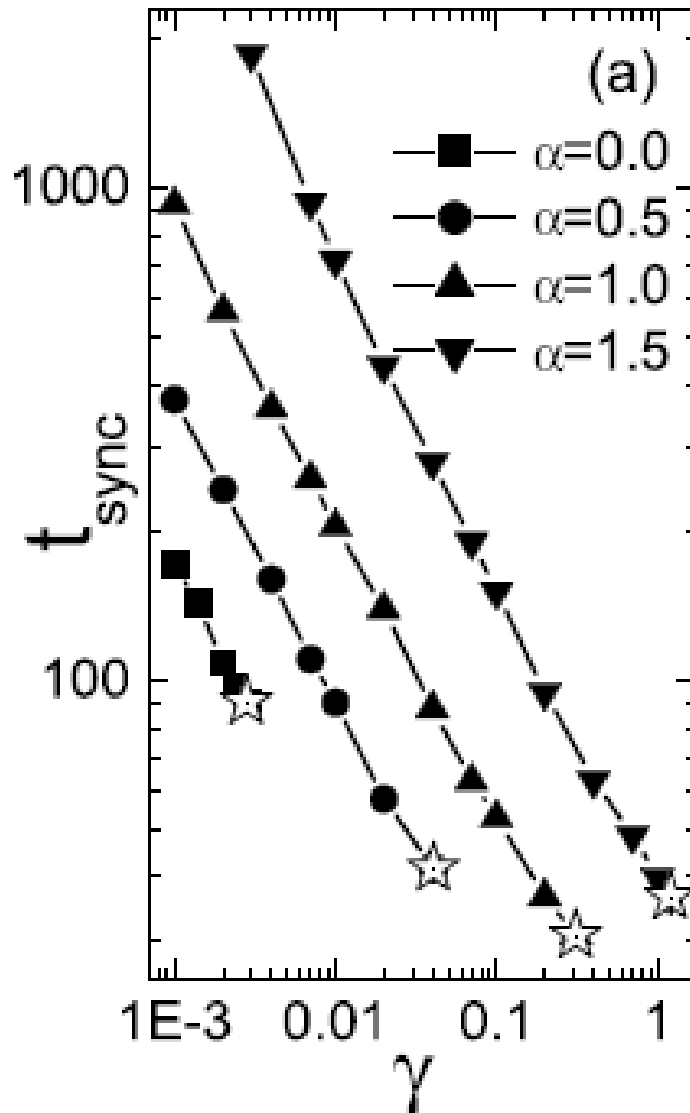
$$S_i = k_i V_i \propto k^{1.0-\theta}$$

显然，当 $\theta = 1$ 时，节点的强度分布最均匀，网络具有最强的同步能力。

在数值模拟中，由于 θ_0 的偏离，使得网络的同步最优位置在 $\alpha = 0.92$ ，如图所示。

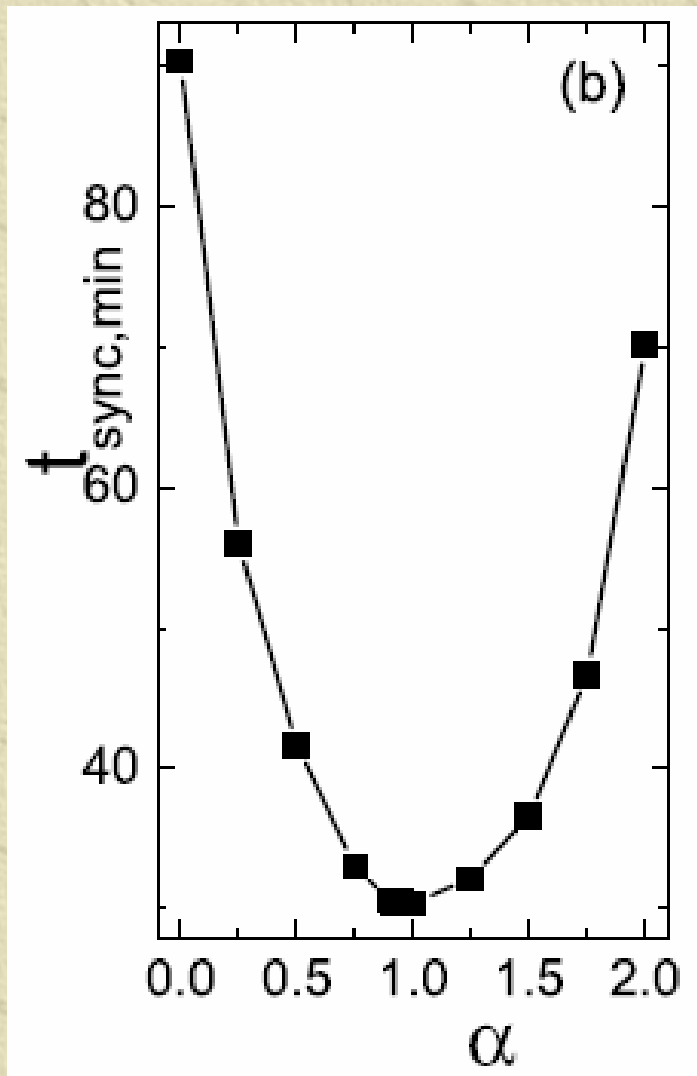


同步时间分析I



在不同的参数 α 下，随着 γ 的增加同步时间都会减小，知道当耦合网络的最大特征值达到区域上限 α_2 ，但不同参数 α 下网络的最短同步时间是不同的

同步时间分析II



在同步时间最短的位置

$$\lambda_N \approx \alpha^2$$

因此 $\lambda_2 = \lambda_N / R \approx \alpha^2 / R$

由于网络的同步时间

$$t_{\text{sync}} \propto 1 / \lambda_2$$

所以，我们获得

$$t_{\text{sync,min}} \propto R$$

总结与展望

- ✦ 在网络的结构和动力学行为的相互作用下，当网络的结构部分对动力学部分的调节程度不同时网络的同步过程以及耦合强度稳定后的网络的同步能力都受到了显著的影响。
- ✦ 在下面的工作中我们将考察动力学部分的影响力大小对网络的同步性质的影响。



谢谢!