模糊现象

模糊现象对人们来说司空见惯，但长期以来未登科学大雅之堂，直到 1965 年有个美国人 L·扎德提出了模糊集合论，才开创了模糊科学之新领域。但考察迄今为止的研究，都专注于数学理论，对模糊现象本身规律的研究鲜见。在 4.1 节我们已说明了产生模糊现象的本质原因，本节将从经验或实证科学的角度探讨模糊现象尤其是模糊概念的描述方法。

1 描述模糊现象的基本概念

传统模糊数学著作中对模糊子集的定义是：

设给定论域U，U 到$[0,1]$闭区间的任一映射 $\mu_{\underline{A}}$：

$$\mu_{\underline{A}}: U \to [0,1]$$

$$u \to \mu_{\underline{A}}(u)$$

确定了U的一个模糊子集$\underline{A}$，$\mu_{\underline{A}}$叫做A的隶属函数，$\mu_{\underline{A}}(u)$叫做u对A的隶属度。

这一定义是一个纯数学模式的语言，没有说明模糊现象和模糊概念的本质。下面给出了一种经验科学意义上的定义。

首先，我们讨论两个预备概念。

人类交流和思维使用的概念可以分为两大类：类概念和性质概念。**类概念**是对事物分类用的，根据其外延的大小和关系，可以形成一个层次体系，如：

人科→灵长目→真兽亚纲→哺乳纲→脊椎动物亚门→脊索动物门→动物界→生物

性质概念是描述一类事物的性质的概念，如颜色、温度、数量、产量、质量等。类概念与性质概念的划分具有相对性。如颜色对于具体事物而言是一个性质概念，但颜色本身也是一种事物，它可以归属于物体的外观等更大的概念，因而是一个类概念。

人们在使用类概念和性质概念时都会发生模糊现象。如，类概念年轻人、优秀科学工作者、冷颜色等都是模糊概念，性质概念轻重、高下、平滑、安全、优良等也都是模糊概念。

在具体事物与概念的关系上，我们说一事物属于某个类或具有某性质。

根据在“不确定性现象的基本类型”中对模糊现象本质的描述，我们给出模糊概念的定义如下：

定义 1 设有类概念或性质概念B，若存在一事物b，无论对b的信息如何充分，认识主体都不能绝对肯定或绝对否定b属于B或b具有B，则称概念B具有**模糊性**。

对于清晰概念我们有普通集合，如所有具有中国籍的人，组成一个中国人集合，所有的中国大学生组成一个中国大学生集合。这里的中国人、中国大学生都是一个清晰概念。对于模糊概念人们也可以建立相应的集合，但是这种集合中的元素与集合的关系不能再用简单的$\in$或$\notin$来表示。比如，所有青年人是一个集合，但是这个集合的外延是不清晰的，我们称为

模糊集合。假如一个人是45岁，那么，它还是青年人吗？50岁呢？实际中，人们在不同的情况下规定了不同的青年人范围。如中国共产主义青年团的退团年龄是28周岁，而有些青年组织如青年科协的年龄可放宽到45周岁。如果从生理和心理的特征来考虑，从青年人到中年人是一个渐变的过程，所以，在人们的意识中，一个人是渐渐离青年而去的，即视他为青年人的肯定性态度在逐渐减弱，由此，我们引出了隶属的概念。

2 隶属度与隶属函数

模糊现象的一个重要特征是肯定程度或隶属程度，即“某事物属于某类或具有某性质 ”这一命题被认识主体肯定的程度。如“为大多数人谋利益”这句话中的“大多数”就是一个模糊概念：50%的成员算不算大多数？甚至60%或70%算不算大多数？有的决议只要半数以上的人通过就行，有的决议却需要三分之二以上的人数通过才行。

又如“三好学生”，这也是一个模糊概念，有的人众口同声认为是“三好”，有的却只有微弱多数通过；即使由一个人来评，对有的学生，他一百个赞成为“三好”，而对另一个学生却说“也算一个吧”。

再比如，说“张三在班上是一个中游学生”，这“中游学生”即是一个模糊概念，怎样的学生才算中游学生呢？张三和李四都是中游学生，而张三的实际水平比李四要高些，那么如何给出他们的差别呢？

为描述以上评价和判断中的模糊现象，我们给出下面隶属度的概念

定义 2 设有一事物被认识主体判断为绝对属于模糊概念A代表的事物类，则该事物对此模糊事物类的隶属度为 1，记此事物为A_0；若该事物被判断为绝对不属于所给模糊事物类，则将其对此事物类的隶属度规定为 0，并记该事物为$\boldsymbol{A}_{\varphi}$；其它事物对该模糊事物类的**隶属度**根据其对A_0或$\boldsymbol{A}_{\varphi}$的相似程度取$[0,1]$上的值。若事物b_2比事物b_1更与A_0相似，则b_2对A的隶属度必大于b_1对A的隶属度。

一个模糊概念总是针对一定的事物集类的，我们把这个事物集类叫做该模糊概念的论域，如果我们能给出论域中的每一个事物对该模糊概念的隶属度，则就在论域与区间$[0,1]$之间建立了一个映射关系，我们称之为隶属函数。严格定义如下：

定义 3 对给定模糊概念B及其论域U，若存在U到$[0,1]$的单值映射μ_B：

$$\mu_B : U \to [0,1]$$

$$w \to \mu_B(w)$$

使对$\forall w \in U, \mu_B(w)$为$w$对$B$的隶属度，则称$\mu_B$为$U$关于$B$的**隶属函数**，并构成**模糊集合**$U_B$。记作$U_B = \{U;\ \mu_B(U)\} = \{\mu_B(w), w \in U\}$

读者可以比较此定义与原模糊数学定义的不同。根据定义 3，对 $\forall w \in U$ ，w 以隶属度 $\mu_B(w)$ 属于 U_B 。

3 模糊变量与模糊数

定义 4　X 是一个**模糊变量**，当且仅当 X 的值域 L 中至少有一点 x 对论域 U 是个模糊类，即对 $\forall w \in U$ ，判断“$X(w) = x$”为模糊的。

模糊类是对模糊概念的推广。模糊类强调了论域与值域中元素的关系，减弱了其概念抽象特点。

推论：若 X 是一个模糊变量，则其值域中至少有两个点对 U 各是一个模糊类。

例 1　中国人语言中日常说的“岁数”是一个模数变量，以 Y 记之。设现在是 2004 年 5 月 6 日，某人 A 生于 1963 年 5 月 6 日，则他的岁数 $Y(A) = 41$ 岁，且 $\mu_{41}(A) = 1$；若某人 B 生于 1963 年 1 月 5 日，则 $Y(B) = 41$ 岁，且，

$$\mu_{41}(B) = \frac{1月5日 - 上12月31日}{5月6日 - 上12月31日} = \frac{5}{31\times 2 + 29 + 30 + 6} = \frac{5}{127}$$

若某人 D 生于 1963 年 1 月 1 日之前或 1963 年 12 月 31 日之后，则 $\mu_{41}(\mathrm{D}) = 0$

若某人 C 生于 1963 年 8 月 20 日，则 $Y(C) = 41$，且

$$\mu_{41}(C) = \frac{下1月1日 - 8月20日}{下1月1日 - 5月6日} = \frac{31\times 3 + 10 + 30\times 2}{31\times 4 + 25 + 30\times 3} = \frac{163}{249}$$

定义 5 对给定 $w \in U$ ，$X(w)$ 是一个**模糊数**，当且仅当主体对 w 在属性 X 上的取值判断是模糊的。

对模糊数 $X(w)$ ，其论域是 X 的值域 L ，$X(w)$ 是个模糊集合，记作 $X(w) = \{L;\ \mu_w(L)\} = \{\mu_w(x), x \in L\}$

在例 1 中，Y（B），Y（C），都是一个模糊数。

定义 4′　X 是一个模糊变量，当且仅当论域 U 中至少有一个 w 使 $X(w)$ 成为一个模糊数。

公理 1[1]　设 X 是一个模糊变量，对 $\forall w \in U$, w 对 $x \in X$ 的隶属度记为 $\mu_x(w)$，则

$$\int_{x\in L} \mu_x(w) = 1$$

[1] 这里的积分号表示可能出现求连续和，即 w 可在 L 上连续取值

这个公理规定了隶属函数的归一性，即论域中的每个元素的总隶属度为 1，这就避免了一个元素同属两个相斥集合的悖论。

4 模糊变量的隶属函数分布

定义 6 设 X 是一个模糊变量，值域为 L，论域为 U。若对 $\forall x \in L$，存在一隶属函数 $\mu_x(w)$，$w \in U$，则 $\left\{\left\{\mu_x(w): w \in U\right\}: x \in L\right\}$ 叫做 U 对 X 的**隶属函数分布**。对于固定的 w，$X(w)$ 是一个模糊数，即 $X(w)=\left\{\mu_w(x), x \in L\right\}$，对于固定的 x，$x(w)$ 即 $x(w)=\left\{\mu_x(w), w \in U\right\}$ 是一个模糊集合，它的**支撑集**为 $\left\{w: \mu_x(w)>0, w \in U\right\}$。

关于 U 对 X 的隶属函数分布，认为下面几种记法等效：
$\left\{\left\{\mu_x(w): w \in U\right\}: x \in L\right\}=\left\{\left\{\mu_w(x), x \in L\right\}: w \in U\right\}=\left\{\mu(x, w): x \in L, w \in U\right\}$，即当 x 和 w 都固定时，$\mu_x(w)=\mu_w(x)=\mu(x, w)$

5 模糊数公理

设 $X(w)$ 是一个模糊数，则认识主体对 $X(w)$ 的判断具有以下特性：

1)若 X 是类变量，则 $X(w)$ 分布在三个值 x_1, x_0, x_2 上，或，$X(w)$ 分布在两个值 x_1, x_2 上，且，$\mu_w(x_i) \in (0,\ 1), i=0,1,2,\quad \sum_{i=0}^{2} \mu_w(x_i)=1$。

2)若 X 的值域是连续的或区间的，则 $\exists$ 区间 $[x_1, x_2]$，使得当 $x \in [x_1, x_2]$ 时，$\mu_w(x) \in (0,1)$；当 $x \notin [x_1, x_2]$ 时，$\mu_w(x)=0$。

上述 $X(w)$ 的特性可以表示成下面的表及图像：

X	x_1	x_0	x_2
$\mu_w(x_i)$	μ_1	μ_0	μ_2

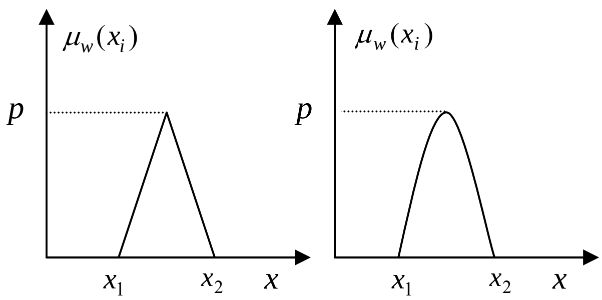

图 4-1 $X(w)$ 的隶属函数特性

这里没有讨论 X 的值域是模糊集的问题(即 $x \in L$ 是模糊的)。对模糊数 $X(w)$ 要注意，其论域是 X 的值域 L。例 1 中的“岁数”是 L 为连续区间的一个例子。