

# 说 板

在固体力学中，也许弹性梁的研究是最早的。梁的研究的起因和航海、建筑等工程应用是分不开的。板的工程应用比较晚，最早激起研究板的理论的热情，却不是由于工程应用的要求，而是从人们的好奇心所激发的。

最早讨论弹性板的变形问题的人可能是詹姆斯·伯努利（James Bernoulli, 1654-1705）在 1788 年向彼得堡科学院提交的论文《矩形弹性板的自由振动》（Essai théorique sur les



图 1 克拉尼像

vibrations des plaques élastiques rectangulaires et libres), 该文于 1789 年发表。

詹姆斯·伯努利是以研究概率论出名的，他是丹尼尔·伯努利的侄子。由于他得到的板的振动方程是

$$\left(\frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{d^4 z}{dy^4}\right) = c^4 \frac{d^2 z}{dt^2}$$

他把板看作两个方向弯曲的梁，所以方程是不正确的，因

此对后来的研究影响很小。

据记载，早在 1680 年 7 月 8 日英国物理学家胡克（Robert Hooke, 1635-1703）就已经做过一个实验，用小提琴的弓子拉一块玻璃板的边缘，如果在玻璃板上铺一层细沙粒，结果就会看到细沙粒往某些线上集中，形成不同的花纹。到 18 世纪一位德国律师、业余物理学家和业余音乐爱好者，克拉尼（Ernst Chladni, 1756-1827），重复胡克的实验，并且详细描述了实验，记下了对不同支撑条件、不同摩擦部位、不同形状的板的实验所得到的花纹。这些花纹显示的就是在沙粒集中的

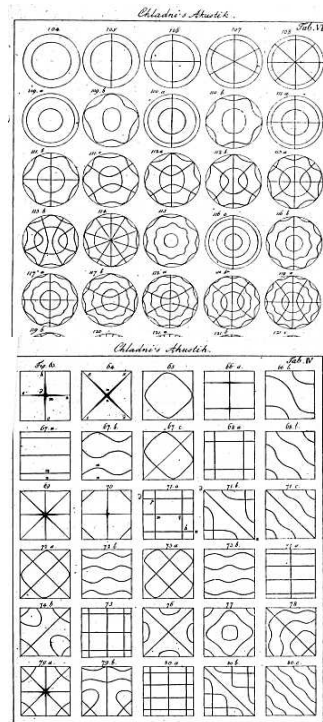


图 2 圆板与方板的克拉尼花纹

地方，板的振幅为零，即所谓的节线。克拉尼把得到的结果写成一本书，*Entdeckungen über die Theorie des Klanges*（声学理论中的新发现，1787 年出版）。其后，克拉尼还计算和测量过声音在不同气体中传播的速度，由于这些研究，克拉尼被誉为“声学之父”。1802 年，克拉尼将他有关声学的研究成果汇编成《声学》一书出版。

1808 年到 1810 年之间克拉尼访问巴黎，他的关于板的振动的讲演和演示引起巴黎科学界的注意。他的《声学》在此期间于 1809 年被翻译为法文。著名的科学家拉普拉斯等一批学者观看了他的演示，一时谁也不能够做出比较合理的解释。拿破仑也观看了他的演示，并且说：“克拉尼使声音变得可以看得见了”。为了解开克拉尼花纹的秘密，巴黎科学院设立了一项悬赏奖金，要给予能够在数学上对于弹性板的克拉尼节线与实验符合的解释的研究者，奖金额为 3000 法郎，为当时一千克金子的价值，时限为两年。这大概就是现代关于弹性薄板理论研究的开始。唯一响应这项悬赏的，是一位带传奇色彩的女科学家热尔曼（Sophie Germain, 1776 - 1831）。她是一位不向命运屈服的妇女。当她 13 岁的时候便阅读各种书籍，她天天泡在图书馆里，阅读数学、外文等书籍。强烈的求知欲与她所处的歧视妇女的社会产生了矛盾。妇女无权上大学，使她进不了她渴望进入的巴黎工科大学。

她没有屈服于命运，她借阅大学生们的笔记，冒用一名男生的名字勒伯兰（Leblanc）去交读书报告。她读正在那里执教的大数学力学家拉格朗日（Lagrange）的名著《分析力学》后，将读书报告交给他，拉格朗日十分欣赏她的才能，最后当拉格朗日发现她是一位妇女后，非常爱护与支持她。

热尔曼后来在数论和弹性力学方面做出了开创性的工作，受到人们的尊敬。德国著名数学家高斯说她：“按照我们的传统和偏见，作为女性的她做这些困难的研究必然会比男人遇到无限多的磨难，而她竟克服了这些困难并能穿透其最不清楚的部分取得成功，她无可怀疑地具有最高尚的勇气、十分异乎寻常的才能和超常的天才。”



图 3 热尔曼像

1811年热尔曼以匿名向巴黎科学院投递了她响应悬赏的论文，由于她没有受过正规的教育，而且是初次接触到这个问题，所以她没有得到奖赏。这项奖金因为没有人获得而延后。

两年以后，1813年10月1日，她再次投递了响应悬赏的论文，这篇论文曾经受到过拉格朗日的帮助，作为评委的拉格朗日指出过文中推导的错误。这一次她虽然没有得到奖赏，但由于论文的高水平，得到评委们的赞赏。最后，由于她坚持不懈的努力，于1815年投出了关于薄板振动的论文，终于在1816年获得了科学院的奖励。令公众失望的是她并没有出席授奖仪式，原因可能是她感觉到公众没有对她应有的尊重。

热尔曼遇到的困难，不仅是她不熟悉不久才由欧拉与拉格朗日发展的变分法，而且由于在当时弹性力学的一般理论还没有建立，唯一可以参考的是欧拉关于梁的工作。她的天才的表现是她引进了板的弯曲的平均曲率的概念，并认为板的变形能密度是平均曲率的函数。即

$$V((1/r) + (1/r')) = \frac{c}{2}((1/r) + (1/r'))^2$$

其中括弧内的两项是平均曲率。但是由于她的变分法运用得不正确，所以得到的方程为

$$\frac{d^2z}{dt^2} + gEbc\left(\frac{d^6z}{dx^4 dy^2} + \frac{d^6z}{dx^2 dy^4}\right) = 0$$

后来由于拉格朗日的指正，她才得到正确的方程。拉格朗日指明的方程是

$$\frac{d^2z}{dt^2} = k^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right)$$

热尔曼在得到奖励后，并没有停止对板的振动问题的研究。后来还发表了若干篇关于板的振动问题的论文。特别是在1821、1828年提交的论文，由于还有缺陷而没有被重视。



图4 纳维像

或许有人会问，既然热尔曼得到的方程中，连前面的刚度系数k平方也没有给定。更没有关于薄板问题边界条件讨论，为什么法国科学院还会授予她奖赏呢？问题很简单，法国科

学院悬赏的问题是要解释板振动时的节线，节线处的挠度是零，求解节线和刚度系数没有关系。在板作自由振动时，边界条件也是容易满足的，无需专门讨论。因此她得到奖金是很自然的。

1823年法国学者纳维（Claude-Louis Navier, 1785-1836）发表了论文《弹性板挠曲研究摘要》（Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques）。论文得到了弹性板的方程，随后用重三角级数求解了矩形板在自重和集中力作用下的挠度。这个解被后人称为板问题的纳维解。

提到板的问题，应当提到泊松（Simon Denis Poisson, 1781-1842）的工作。他在1814年发表的论文“弹性薄板”（Mémoires sur les surfaces élastiques）。泊松在这篇文章中首先正确地提出受均匀张力的薄膜的平衡方程，随后，他以不同的方式得到了弹性薄板的平衡与运动方程。随后他在1816年又得到了板的弯曲方程。他的推导与热尔曼不同在于利用板弯曲时板曲面面积的变分为零来得到的。在1829年，泊松发表了他的重要著作《论弹性体的运动与平衡》（Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques）。



图5 泊松像

文中除了讨论弹性体的一般平衡与运动方程外，还最早引进了现今称为泊松比的系数。文章最后讨论了板方程的边界条件，不过从现在的观点看，他提的边界条件是不正确的，比正确提法的要求要多。

泊松关于板的研究中的错误，虽然有一些学者指出过，不过在德国物理学家基尔霍夫

（G. R. Kirchhoff, 1824-1887）之前一直没有彻底解决问题。1850年，在柏林大学执教的基尔霍夫发表了他关于板的重要论文《弹性圆板的平衡与运动》

（Ueber das Gleichgewicht und die elastischen

Scheibe: Credles Journal, Bd. 40, S. 51-88）。

基尔霍夫的论文指出泊松的错误。论文从三维弹性力学的变分开始，引进了关于板的变形的假设，这就是：

1. 任一垂直于板面的直线，在变形后仍保持垂直与变形后的板面。

2. 板的中面，在变形过程中没有伸长变形。

这个假设后来被逐步改进，形成现今的直法线假设。在论文中基尔霍夫给出了板的边界条件的正确提法，并且给出了圆板的自由振动解，同时比较完整地给出了振动的节线表达式，从而较好地回答了克拉尼问题。至此弹性板的理论问题才算是告一段落。

1888年，英国力学家乐甫 (A. E. H. Love, 1863–1940) 推广了基尔霍夫关于板的直法线假设，把它应用于薄壳理论中，之后系统发展了弹性薄壳理论。后来直法线假设也被称为基尔霍夫—乐甫假设。

进入二十世纪后，随着铁摩辛科梁的研究，也开始了厚板的研究，提出了不同类型的厚板方程和边界条件。



图6 乐甫像

## 参考文献

1. *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*, 1787
2. Louis L. Bucciarelli and Nancy Dworsky, *Sophie Germain*, D. Reidel Publishing Company, 1980
3. Todhunter, *A history of the Theory of Elasticity and of the Strength of material*, Vol. 1, Vol. 2, Cambridge University Press, 1893