
说 梁

梁，它的概念形成很早。中国在春秋战国时期的文章中就有梁的概念。《国语》上说：“造桥为梁”。人类有记载的桥梁据说是公元前 18 世纪在巴比伦建造的一座拱桥。可以想象，用木头搭的简单的桥还会更早。

人工建造的房屋上的屋梁恐怕比桥梁还要早。中文的“梁”字，最早就是从桥梁和屋梁来的。房屋屋脊上那根重要的梁，一般称为栋。《易》经上说“上栋下宇”的栋，就是指的房屋的脊梁。我们经常说栋梁之才，就是从这里引申出来的意思。

在汉字中，梁的金文是如下图的象形字。右半是一座桥，左半是水。梁字下面的木字是后来加上去的。再后来人们又加了一个木字，写成“樑”。在英文中 **beam** 这个字是梁的意思。它的原来的意义中有“树”的意思。可见无论东方还是西方，古代的梁都是木质的，后来才有钢梁、钢筋混凝土梁和其他材料的梁，等等。

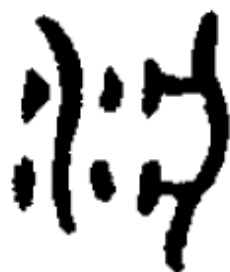


图 1 金文“梁”字

中国在明末翻译外国的力学知识时，把力学翻译为“重学”是很有道理的。因为在动力学的概念还没有形成之前，古代人们最通常打交道的力就是重力。而承受重力的结构，也主要是两种：即梁和柱。它们的形状都是柱或杆状，区别是梁的重力作用线垂直于柱的轴线，而柱的重力作用线平行于柱的轴线。在以砖石和木材为主要建筑材料的时代，柱的承载能力比较高，“立柱可以支千钧”，所以很少有压垮柱的事故。而梁就不同了，大部分的事故出在梁上。所以以前民间建筑房屋时，将“上梁”看作大事，一定要挑选吉利日子，举行严肃的仪式和庆典，以表示对上梁这道工序的重视。所以梁也是力学最早研究的对象之一。

其实，梁岂止在屋梁和桥梁上见到呢，我们日常见到的横向受载的柱状物体多得不可胜数。古时常用的扁担、轿杠、旗杆、桅杆、推磨的磨杠、起重的撬杠都是梁。现今建起的摩天楼、烟筒、电视塔、电线杆在地震时，惯性力是横向作用的，它们所受的风载也是横向作用的，所以都可以看为梁。汽车、火车底盘上有梁，轮船的船身可以看作在浮力与重力作用下的复合梁，飞机的机翼是空气动力作用下的悬臂梁，而机身则是在机翼向上作用力与机身重力作用下的梁。竹、木、庄稼等植物的茎，在风作用下也是梁。动物的骨骼、脊柱在它们横向受力时，也是梁。

正因为梁的普遍性和重要性，所以梁的精确研究和梁的精确概念的形成，是整个材料力学、结构力学和弹性力学最早的事件。也是人类技术科学进步的大事。

1. 伽利略、马略特与胡克的工作

最早系统研究梁的著作是伽利略 (Galilei Galileo, 1564—1642) 在 1638 年出版的《关于两门新科学的对话》(1)，这本书写的一共是三个人在四天中的谈话，其中的第二天就全部是讲梁的强度问题的。在这本书中，伽利略提出了关于柱、梁和杆的强度方面 17 个命题。涉及梁有 8 个命题，实质上提出的是两个问题：一个是悬臂梁的强度问题，另一个是在自重作用下等强度梁的问题。这两个问题一直影响后来近二百年的研究。

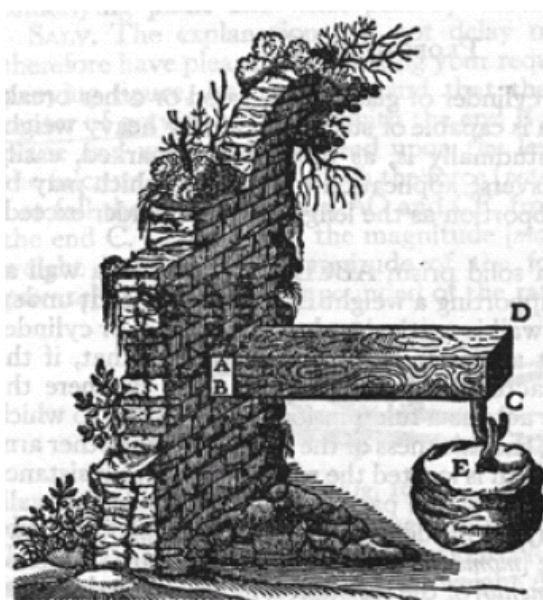


图 2 伽利略《关于两门新科学的对话》中悬臂梁的插图

伽利略并没有正确解决他提出来的问题。在讨论悬臂梁的强度的论证时，隐含了两个错误，一是把根部 AB 上的拉应力看作是均布的，二是把梁的中性层取在梁的下侧。不过由于他在讨论力的平衡时所用的平衡条件是对的，所以也得出了一些正确的结论。如说等长圆截面梁的强度与截面直径的三次方成正比等。

据 1886 年出版的托德汉塔 (I. Todhunter, 1820-1884) 所写的《弹性理论与材料力学的历史》(2) 一书的第一部分评论说，他的错误是假定了梁的纤维是不可伸长的，因而还没有中性层的概念，实际上是把梁的下面的纤维误认为是中性层。这说明，梁既然是变形体，如果不考虑梁的变形，在理论上是不可能彻底解决梁的强度和变形问题的。

法国学者马略特 (E. Mariotte, 1620-1684) 在 1686 年出版了研究输水装置的著作《论水和其他流体的运动》(3)，这本书是第一部研究流体阻力的著作，在书的第 5 部分中，讨论了固体的抗力和水管的强度问题。在伽利略关于梁的断裂抗力的结论中有

$$W = \frac{1}{2} \frac{Td}{L}$$

其中 W 是悬臂梁端的断裂载荷， T 是通过悬臂梁底中心纵向作用力， d 是梁高或梁的直径， L 是梁长。马略特实际做了实验来确定梁的抗力，得到的结果是

$$W = K \frac{Td}{L}$$

马略特得到的 K 为 $1/3$ 或 $1/4$ 。

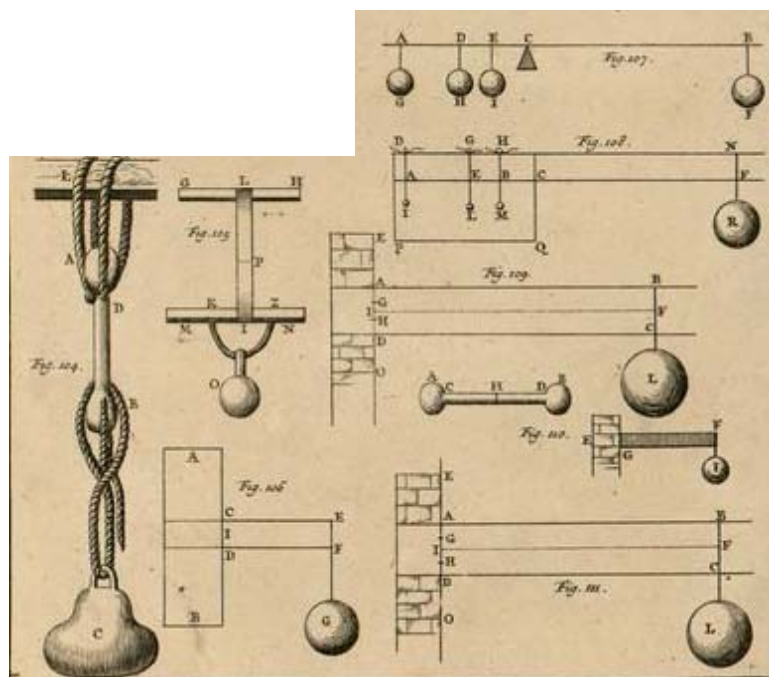
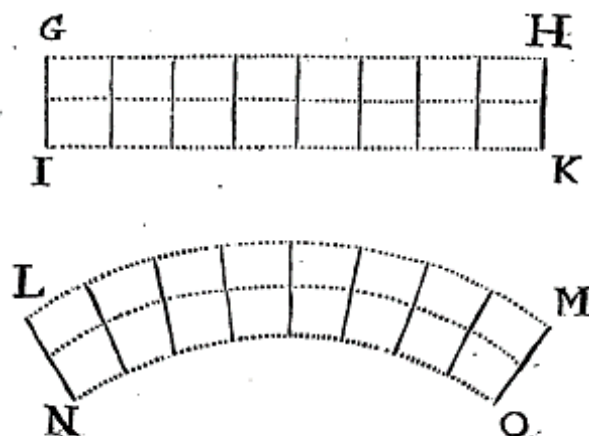


图 3 马略特原著中关于梁的实验的插图

马略特的讨论比起伽利略进了一步，伽利略认为在梁的截面上应力是均匀分布的，而马略特则认为应力是从梁的下面纤维起沿高度是线性分布的。马略特的结果虽然比伽利略进了一步，但 k 的值还是不正确的。因为他同样没有精确考虑梁的变形，而且与伽利略一样也默认中性层是在梁的下侧。

Having thus explained the most simple way of springing in solid bodies, it will be very easie to explain the compound way of springing, that is, by flexure, supposing only two of these lines joyned



together as at G H I K, which being by any external power bended into the form L N N O, L M will be extended, and N O will be diminished in proportion to the flexure, and consequently the same proportions and Rules for its endeavour of restoring it self will hold.

图 4 胡克《论弹簧》中的一段与插图

1678 年，英国学者胡克（Robert Hooke, 1635—1703）出版了他的著名的著作《论弹簧》（4），书中不仅叙述了他对各种材料弹性实验的结论，还描述了一根受弯曲的杆的变形。他正确地指出，在弯曲时杆的一侧的纤维伸长，另一侧被压缩。不言而喻，按照胡克得到的弹性定律，梁截面内的应力分布应当是以梁的中性层为零的线性分布，即一侧受拉另一侧受压。不过这个思想他没有进一步展开，也仅是如上图所说为止。

亚·沃尔夫（Abraham Wolf, 1877—1948）在他 1935 年出版的《十六、十七世纪科学、技术和哲学史》（5）一书中，把前面，伽利略、马略特和胡克的理论得到的应力分布列在下面：

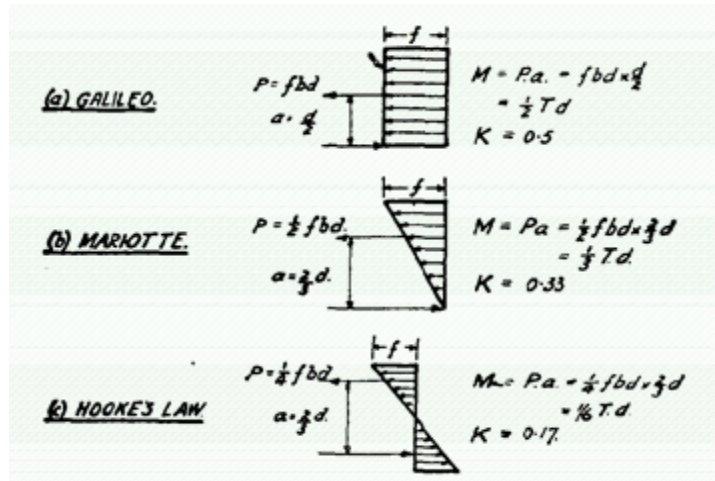


图5 亚·沃尔夫根据伽利略、马略特和胡克的表述画出的应力沿截面分布图

2. 瓦利农与伯努利的工作

从以上关于梁的研究中，我们看到，要精确解决梁的强度问题，必须涉及梁的变形的精确描述。而关于梁的变形问题，虽然在达·芬奇（Leonardo Da Vinci, 1452—1519）的笔记中、在荷兰物理学家和力学家比克门（Beeckman I.）于1620年的描述中、在1684年莱布尼兹（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716）关于固体抗力的论文中、在胡克1678年关于弹簧的论著中，都先后提及。但都是定性的描述，而没有精确的表述。

法国数学家瓦利农（Pierre Varignon, 1654—1722）是在法国早期研究和发展数学分析的学者，他在静力平衡和分析方面都有重要的贡献。他沿着伽利略和马略特的思路对梁进行讨论，在1702年他发表的关于固体抗力的论文，把梁内不同层的纤维有不同的伸长，认为对应的应力也在变化，他用积分工具来求这些应力的合力，并且比较了伽利略和马略特的结果。遗憾的是他仍然默认了梁的下侧为中性层的位置，所以结果也是不对的。

从变形角度第一次比较精确的研究梁的问题，应当说是从雅科比·伯努利（Jacob Bernoulli, 1654—1705）。在1694年的论文《弹性梁的弯曲》以及他在1705年的论文中，不是像以前研究梁从应力出发，而是最早用微积分工具研究梁的变形。他假定梁在变形时梁的横截面保持平面，这就是平截面最早的提法。由此，他得到了悬臂梁的变形的微分方程

$$C \frac{1}{r} = Px$$

这里 r 是梁的曲率半径， P 是梁端的荷载， x 是所计算曲率的地方与梁端的距离， C 是常数。雅科比·伯努利得到的 C 是

$$C = \frac{mbh^3}{3}$$

这里 b 和 h 分别是梁的宽与高， m 是材料的弹性常数，即现在说的杨氏模量。

平截面假定是材料力学的重要假定，因为它抓住了梁的变形的主要特征。所以后人把基于平截面假定的梁的理论称为伯努利梁。

不过，伯努利并没有彻底解决梁的问题，原因是，他对中性层的位置仍然没有跳出马略特的思路。所以他的常数 C 定得还不对。这一点从他 1705 年文中如下的插图可以清楚地看出，他的中性层画的地方还是不正确的。另外，由于在他所得到的微分方程中，是用的曲率的表达式，而没有根据位移的微小性加以简化处理，所以在实际工程中也没有得到广泛应用。

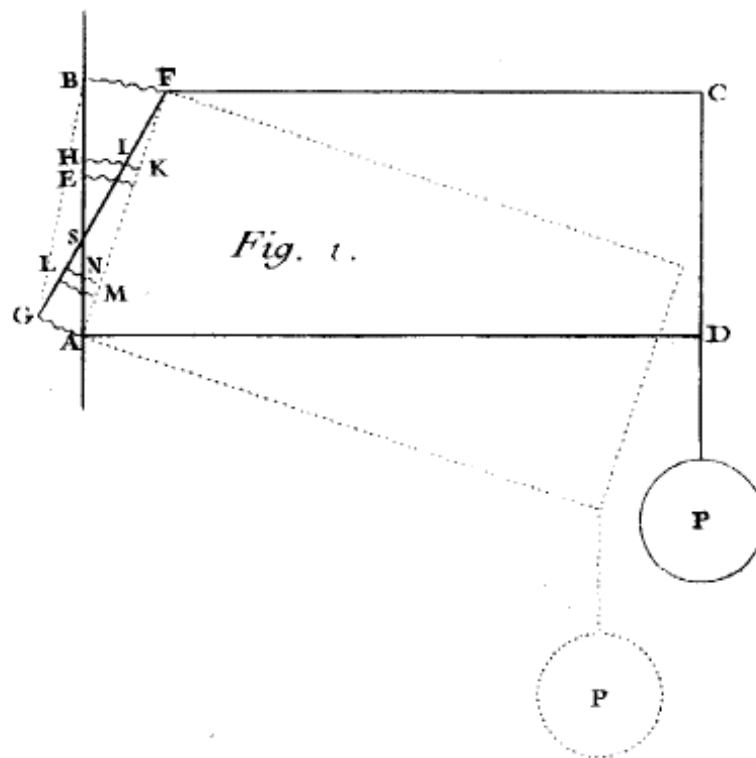


图 6 伯努利 1705 年关于梁的论文的插图

3. 帕朗、纳维与后继的工作

直到伯努利的研究，虽然对于梁的变形有了比较准确的描述。但一直被一种错觉所支配，即认为在弯曲时梁的截面上纤维的伸长是主要的，压缩似乎不明显，所以对中性层的位置一直没有取准，也就不会得到正确的结果。

历史上第一次认真讨论悬臂梁的中性层,即梁截面上没有应力作用的那一层的位置的学者是法国数学家帕朗 (Parent Antoine, 1666-1716)。因而他得到的悬臂梁的截面上的应力分布也比较正确。

帕朗的论证是从马略特的假定开始的,既然马略特认定悬臂梁在受载荷后,截面上的应力分布是根部下侧为零,整个截面上都是受线性分布的拉应力。从简单的平衡就可以得出推论,梁根部下侧所受的一定是压应力。由此他认定中性层一定是处于梁的中间某个位置。他经过与实验对照,确定对矩形截面梁,中性层与梁的上侧距离和梁高之比为 9:11 的地方。

梁的中性层最后准确定位是直到 1826 年法国力学家纳维 (Navier, *claude-Louis-Marie-Henri*, 1785—1836)给出的。纳维 1826 出版的《力学在机械与结构方面的应用》(6) 是系统讲述材料力学的第一本书,也是他在巴黎综合工业学校讲课的讲义。在这本书中,他第一次给出中性层准确定义。他的结论是:中性层通过截面的形心。

至此,关于悬臂梁的正确的应力分布问题才算是尘埃落定了。

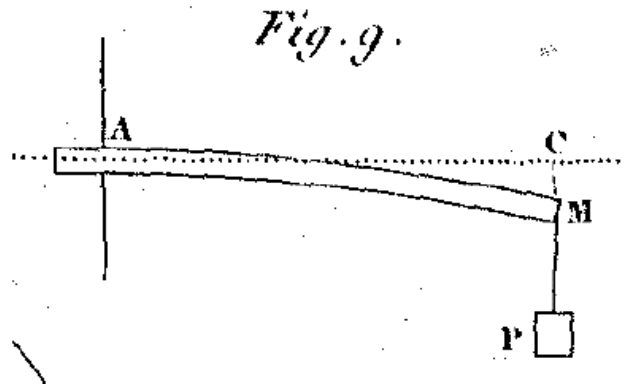


图 7 这是纳维讲义中的原始插图,图示他对中性层的位置画的是正确的

在伯努利平截面的假设中,在梁的变形过程中,截面始终垂直于中性层,这不言而喻是忽略了在梁中的剪应力的,因而不能满足梁内局部的平衡条件。纳维给出了正确的中性轴的位置,因而可以说他最后解决了梁的线性理论问题。又由于在其后的材料力学中,梁的理论占有突出的位置,所以可以说,现代的材料力学是从纳维在巴黎综合工业学校的教材《力学在机械与结构方面的应用》开始的。

俄罗斯铁路工程师儒拉夫斯基 (Журавский, Дмитрий Иванович., 1821-1891) 于 1855 年 (6) 得到横力弯曲时的切应力公式。

在同一年,即 1855 年,在彼得堡出版了俄罗斯工程师别斯帕罗夫 (Беспалов П.) 的一本小册子《用初等方法求解关于材料力学与结构稳定性的问题》,书中最早介绍

了弯矩图并开始使用弯矩图求解问题。

梁的力学模型一旦提清楚以后，人们便进一步处理更为复杂的问题。

后来，人们逐渐发现柱的受压和弯曲经常是不能分开处理的。1744 年欧拉 (Leonhard Euler, 1707—1783) 解决了压杆的屈曲和杆的弯曲大变形问题，拉格朗日 (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813) 在 1770 年前后也深入讨论了这类问题的求解。基尔霍夫 (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813) 则在 1859 年把柔韧的细杆在弯曲与扭转下的一般情况与刚体绕固定点的动力学问题对应了起来。

又由于梁的弯曲与扭转，在很多情况下也是耦合在一起的。对于横截面不是圆截面的情形的扭转问题也变得比较复杂，而且对于一般情形，外力的也经常会同引起扭转和侧向弯曲。关于梁的弯曲与扭转问题的一般提法和解决是法国力学家圣维南 (Saint-Venant, Adhemar Jean Claude Barre. de. 1797—1886) 在 1855 年前后给出的。他给出了一般截面的柱体，受横向力时，不发生扭转的条件，给出了弯曲中心的概念。即横向力的合力通过弯曲中心时，柱体不会产生扭转。他还给出了计算截面上弯曲中心位置的方法。

4. 铁摩辛科梁

直到 19 世纪发展起来的已有的梁的理论，对于求解静力学问题，在工程实际问题中，精确程度是足够了。但是对于求解动力学问题却表现出明显的不合理。原来在以伯努利梁的静力学方程，简单地添加梁的惯性项，所形成的梁的动力学方程，冲击的传播速度可以是无限大的。这有点像线性热传导方程，是属于抛物型的。对于热传导问题，得到的热传播速度的不合理还可以忍受。而对于梁的冲击传播速度是无限大，就会在实际工程问题中引起很大的误差。

为了克服这种不合理情况，曾在乌克兰基辅大学执教，1922 年移居美国的铁摩辛科 (Stepan (Stephen) Prokofyevich Timoshenko, 1878 - 1972) 提出了一种对伯努利梁的修正理论，并于 1921 年发表 [8]。其中最重要的改进是考虑了梁内的剪切变形的一阶近似，从而放弃了平截面假定。另一项改进是在惯性项中加进了截面转动的惯性力。由于这一改进，梁的振动问题的方程就变成双曲型方程，相应的冲击传播速度也就是有界的了。目前铁摩辛科梁被广泛地应用于求解动力传播问题和控制问题中。

5. 小结

如果从 1638 年伽利略的《关于两门新科学的对话》梁的问题的提出开始，到 1921 年铁摩辛科梁对于动力问题的完善，其间经过了漫长的近 400 年的时间。可见一个实际问题的完全解决，绝不是一朝一夕之功。需要许多学者的努力，还需要实践的不断检验和修正。

梁的问题虽然已经可以说能够告一段落了。不过人类的科学技术发展是无穷尽的。工程技术还会提出更精确的要求。例如梁的材料可以是压电材料、各向异性材料、不均匀材料、有时效的材料、组合材料等问题。又例如在失重下杆的行为的问题、有磁电感应力作用的问题。再例如由于更精确的需要，从三维弹性力学出发研究梁的问题，讨论不要任何变形假定的梁的理论。梁的问题还不断有人继续研究。可以说，梁的问题至今还是一个开放的问题，还会吸引许多的人投入。

作者感谢魏丰博士提供的若干原始文献，包括〔2〕和〔4〕的复印本。

参考文献

- 〔1〕 伽利略著，武际可译，关于两门新科学的对话，北京大学出版社，2006
- 〔2〕 I. Todhunter, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, from Galilei to the Present*, Dover Publications, 1886
- 〔3〕 E. Mariotte, *Traité du mouvement des eaux et des autres corps fluides*, Oeuvres de Mr. Mariotte Tom. II, 1886
- 〔4〕 R. Hooke, *Lectures (de Potentia Restitutiva) (Lectures of springs)*, 1678
- 〔5〕 亚·沃尔夫，十六、十七世纪科学、技术和哲学史，商务印书馆，1991
- 〔6〕 M. Navier, *L'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, 1826
- 〔7〕 Журавский, Дмитрий Иванович, *О мостах раскосной системы Гау*. СПб, 1855
- 〔8〕 S. P. Timoshenko, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars. *Phil. Mag.*, **XLI**, 744-746, 1921. Reprinted in *The Collected Papers of Stephen P. Timoshenko*, McGraw Hill, London, 1953. See also [18], pp. 329-331.

英文标题：A brief talk about the development of the theory of elastic beam