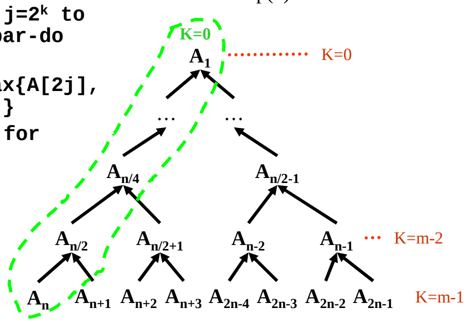
第二篇 并行算法的设计

第四章 并行算法的设计基础
第五章 并行算法的一般设计方法
第六章 并行算法的基本设计技术
第七章 并行算法的一般设计过程

算法6.8: SIMD-TC(SM)上求最大值算法

```
begin
  for k=m-1 to 0 do
      for j=2^k to
   2^(k+1)-1 par-do
   A[j]=max{A[2j],
   A[2j+1]}
      end for
  end for
   end
```

$t(n)=m\times O(1)=O(\log n)$
$p(n)=n/2$



第六章 并行算法的基本设计技术

6.1 划分设计技术
6.2 分治设计技术
6.3 平衡树设计技术
6.4 倍增设计技术
6.5 流水线设计技术

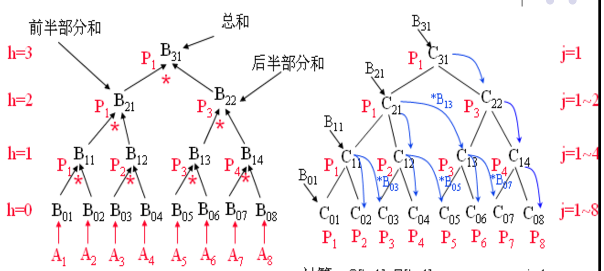
计算前缀和

- 问题定义
  n个元素$\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$，前缀和是n个部分和：
  $S_i=x_1*x_2*\dots*x_i$, $1\leq i\leq n$ 这里*可以是+或×
- 串行算法：$S_i=S_{i-1}*x_i$ 计算时间为$O(n)$
- 并行算法：p154算法6.9 SIMD-TC上非递归算法
  令$A[i]=x_i$, $i=1\sim n$,
  $B[h,j]$和$C[h,j]$为辅助数组($h=0\sim\log n$, $j=1\sim n/2^h$)
  数组B记录由叶到根正向遍历树中各结点的信息(求和)
  数组C记录由根到叶反向遍历树中各结点的信息(播送前缀和)

6.3平衡树设计技术

- 设计思想
  以树的叶结点为输入，中间结点为处理结点，由叶向根或由根向叶逐层进行并行处理。
- 示例
  - 求最大值
  - 计算前缀和

例：n=8, p=8, C01~C08为前缀和



计算：$B[h,j]=B[h-1,2j-1]*B[h-1,2j]$
正向遍历(求和)

计算：$C[h,1]=B[h,1]$ j=1
$C[h,j]=C[h+1,j/2]$ j=even
$C[h,j]=C[h+1,(j-1)/2]*B[h,j]$ j=odd>1
反向遍历(播送前缀和)

Input: Sequence x of $n = 2^k$ elements of type T, binary associative operator $\oplus : T \times T \to T$.
Output: Sequence s of $n = 2^k$ elements of type T, with $s_k = \oplus_{i=1}^{k} x_i$ for $1 \leqslant k \leqslant n$.

PRAM求前缀和算法

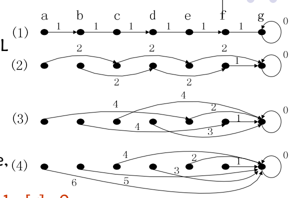
sequenceT SCAN(**sequence**T *x*, $\oplus$: *T* × *T* → *T*)

```
if n = 1 then
    s_1 ← x_1
    return s
endif
forall i ∈ 1 : n/2 do
    y_i ← x_{2i-1} ⊕ x_{2i}
enddo
⟨z_1, ..., z_{n/2}⟩ ← SCAN(⟨y_1, ..., y_{n/2}⟩, ⊕)
forall i ∈ 1 : n do
    if even(i) then
        s_i ← z_{i/2}
    elsif i = 1 then
        s_1 ← x_1
    else
        s_i ← z_{(i-1)/2} ⊕ x_i
    endif
enddo
return s
```

表序问题

◆ 问题描述

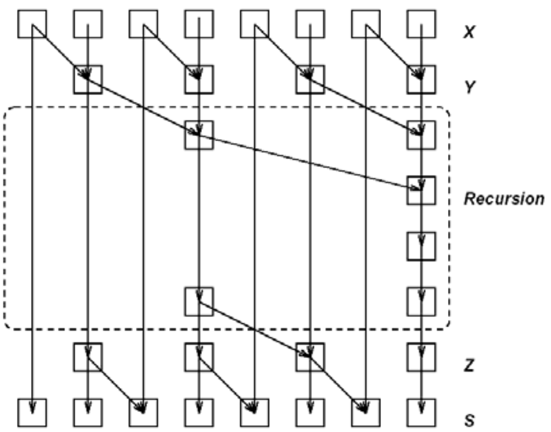
n个元素的列表L，求出每个元素在L中的次第号(秩或位序或rank(k))，rank(k)可视为元素k至表尾的距离；



◆ 示例： n=7

(1)p[a]=b, p[b]=c, p[c]=d, p[d]=e, p[e]=f, p[f]=g, p[g]=g
r[a]=r[b]=r[c]=r[d]=r[e]=r[f]=1, r[g]=0
(2)p[a]=c, p[b]=d, p[c]=e, p[d]=f, p[e]=p[f]=p[g]=g
r[a]=r[b]=r[c]=r[d]=r[e]=2, r[f]=1, r[g]=0
(3)p[a]=e, p[b]=f, p[c]=p[d]=p[e]=p[f]=p[g]=g
r[a]=4, r[b]=4, r[c]=4, r[d]=3, r[e]=2, r[f]=1, r[g]=0
(4)p[a]=p[b]=p[c]=p[d]=p[e]=p[f]=p[g]=g
r[a]=6, r[b]=5, r[c]=4, r[d]=3, r[e]=2, r[f]=1, r[g]=0

8个元素的数据流分析



表序问题

◆ 算法： P155算法6.10

(1)并行做：初始化p[k]和distance[k] //O(1)
(2)执行$\lceil \log n \rceil$次 //O(logn)
  (2.1)对k并行地做 //O(1)
    如果k的后继不等于k的后继之后继，则
      (i) distance[k]= distance[k]+ distance[p[k]]
      (ii) p[k]=p[p[k]]
  (2.2)对k并行地做
      rank[k]=distance[k] //O(1)
运行时间：t(n)=O(logn) p(n)=n

6.4倍增设计技术

◆ 设计思想
- 又称指针跳跃(pointer jumping)技术，特别适合于处理链表或有向树之类的数据结构；
- 当递归调用时，所要处理数据之间的距离逐步加倍，经过k步后即可完成距离为2^k的所有数据的计算。

◆ 示例
- 表序问题
- 求森林的根

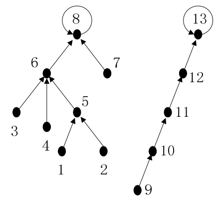
求森林的根

◆ 问题描述

一组有向树F中，如果<i, j>是F中的一条弧，则p[i]=j(即j是i的双亲)；若i为根，则p[i]=i。求每个结点j(j=1~n)的树根s[j].

◆ 示例

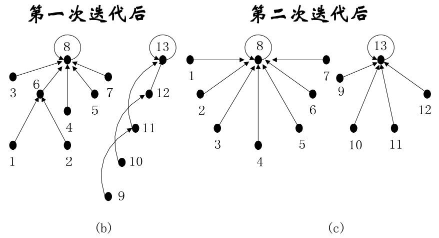
初始时
P[1]=p[2]=5 p[3]=p[4]=p[5]=6
P[6]=p[7]=8 p[8]=8 P[9]=10
p[10]=11 p[11]=12 p[12]=13 p[13]=13
s[i]=p[i]



(a)

求森林的根

- 示例



- 算法：P157算法6.11
- 运行时间：t(n)=O(logn) W(n)=O(nlogn)

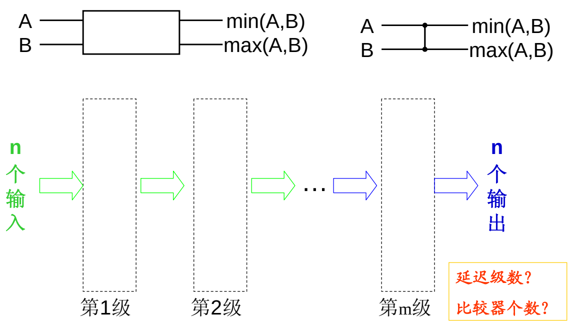
Batcher归并、排序网络

- 比较器操作和[0,1]原理
- 奇偶归并网络
- 双调归并网络
- Batcher排序网络
- 2D-Mesh上的排序算法

6.2 分治设计技术

6.2.1 并行分治设计步骤
6.2.2 比较器排序网络
6.2.3 凸壳问题

比较器操作和[0,1]原理



并行分治设计步骤

- 将输入划分成若干个规模相等的子问题；
- 同时(并行地)递归求解这些子问题；
- 并行地归并子问题的解，直至得到原问题的解。

[0,1]原理：如果一个n输入的网络能够排序所有2^n种0,1序列，那么它也能排序n个数的任意序列。

0, 1, 0, 0, 1, 1, 0 => 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1

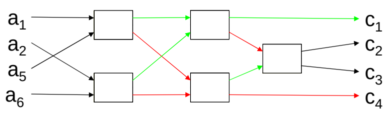
反证法：设f是单调函数，且网络对于序列$(a_1,\ldots,a_n)$排序的结果$(b_1,\ldots,b_n)$中存在b_i有$b_i>b_{i+1}$,即b序列不是有序的.

那么，该网络对于序列$(f(a_1),\ldots,f(a_n))$排序成$(f(b_1),\ldots,f(b_n))$且$f(b_i)!=f(b_{i+1})$时有$f(b_i)>f(b_{i+1})$.

令$b_j<b_i$:$f(b_j)=0$; $b_j>=b_i$:$f(b_j)=1$,则有

$f(b_i)=1,f(b_{i+1})=0$, 所以$(f(b_1),\ldots,f(b_n))$不是有序的，即不能够对输入的(0,1)序列排序。

四个数的排序网络



- 两个序列中的奇数位元素拿出来组成两个有序序列，由奇归并器归并；
- 两个序列中的偶数位元素拿出来组成两个有序序列，由偶归并器归并；

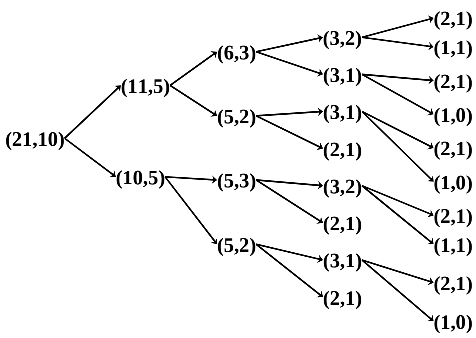
$$(a_1,a_3,\dots,a_{2\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}),(b_1,b_3,\dots,b_{2\lceil\frac{m}{2}\rceil-1}) \Rightarrow (d_1,d_2,\dots,d_{\lceil\frac{n}{2}\rceil+\lceil\frac{m}{2}\rceil})$$

$$(a_2,a_4,\dots,a_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}),(b_2,b_4,\dots,b_{2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}) \Rightarrow (e_1,e_2,\dots,e_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor})$$

- 奇归并器输出的第一个数做为结果，第**i**个数与偶归并器输出的第**i+1**个两两比较，依次作为结果。

$$d_1,\quad e_1:d_2,\quad \dots\quad e_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1}:d_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor},\quad c_*,\quad c_{**},\quad c_{***}$$

(m,n)奇偶归并网络



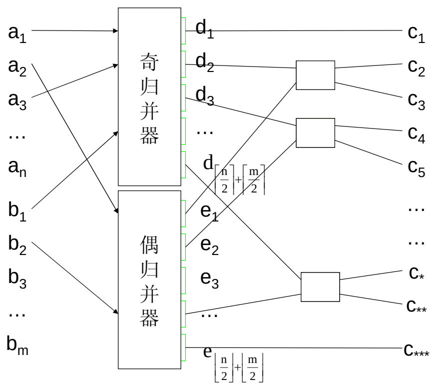
结果序列（c序列）

$$d_1,\quad e_1:d_2,\quad \dots\quad e_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1}:d_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor},\quad c_*,\quad c_{**},\quad c_{***}$$

$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$与$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor$之差：

0	$c_* = e_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}$,	c_{**}不存在	c_{***}不存在
1	$c_*:c_{**} = e_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}:d_{\lceil\frac{n}{2}\rceil+\lceil\frac{m}{2}\rceil}$		c_{***}不存在
2	$c_*:c_{**} = e_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}:d_{\lceil\frac{n}{2}\rceil+\lceil\frac{m}{2}\rceil-1}$		$c_{***} = d_{\lceil\frac{n}{2}\rceil+\lceil\frac{m}{2}\rceil}$

(m,n)奇偶归并网络



定理：Batcher奇偶归并网络能够产生正确的归并。

采用[0,1]原理证明如下：

假设：a： k个0， $n-k$个1　d： $\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil$个0

b： l个0， $m-l$个1　e： $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor$个0

$\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil$与$\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor$之差：

0　$c_* = 0$,且为第$2(\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor) = (\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor)+(\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil+\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil) = k+l$项

1　$c_*:c_{**} = e_{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+\lfloor\frac{l}{2}\rfloor}:d_{\lceil\frac{k}{2}\rceil+\lceil\frac{l}{2}\rceil} = 0:0$且分别是第$k+l$-1和$k+l$项

2　$c_{***} = d_{\lceil\frac{n}{2}\rceil+\lceil\frac{m}{2}\rceil} = 0$且为第$k+l$项

$$C_{OE}^{M}(m,n)=\begin{cases} mn, & mn\le 1\\ C_{OE}^{M}\left(\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)+C_{OE}^{M}\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+\left\lceil\frac{m+n-2}{2}\right\rceil, & mn>1\end{cases}$$

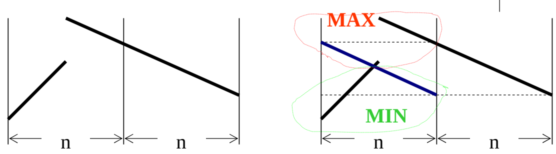
$$\lim_{n\to\infty} C_{OE}^{M}(n,n)=O(n\log n)$$

$$m=n=2^{t}:\quad C_{OE}^{M}(m,n)=2C_{OE}^{M}\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)+n-1=n\log n+1$$

$$D_{OE}^{M}(m,n)=1+\max\left(D_{OE}^{M}\left(\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right),D_{OE}^{M}\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\right)$$

$$m=n=2^{t}:\quad D_{OE}^{M}(m,n)=1+\log n=1+t$$

② 不对半情况



③ 其他情况：如果a序列不是上述两种情况，则根据双调序列定义，通过循环移位可变成上述情况之一。再按①、②得到MIN和MAX，对于二者进行逆向循环移位，则仍是双调的，则结论成立。

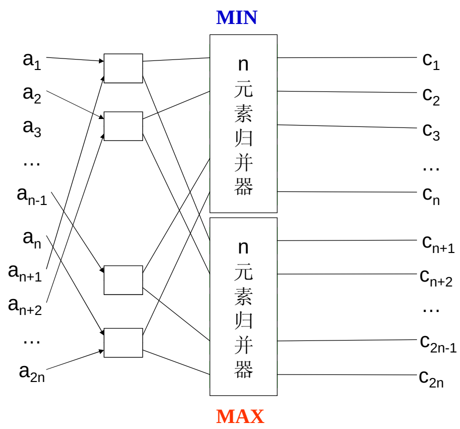
双调归并网络

定义：一个序列$a_1,a_2,\ldots,a_n$是双调序列，如果（1）存在着一个a_k,$1<=k<=n$使得$a_1>=\ldots>=a_k<=\ldots<=a_n$成立；或者（2）此序列能够通过循环移位使得条件（1）成立。

举例：一个元素是；两个元素是。

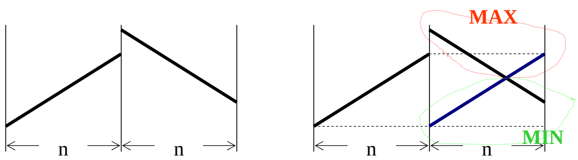
对半情况：　1，3，5，7，9，8，4，2

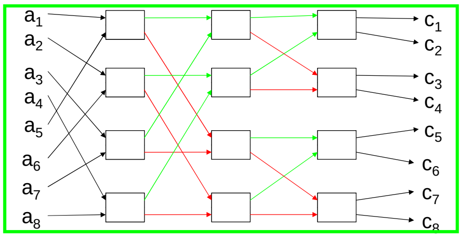
不对半情况：　6，4，2，0，1，7，9



定理(Bathcer定理)：给定一个双调序列$a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$，对于每一$1<=i<=n$执行a_i和a_{i+n}比较交换得到$b_i=\min(a_i,a_{i+n})$, $c_i=\max(a_i, a_{i+n})$所形成的两个子序列$MIN=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$和$MAX=(c_1, c_2, \ldots, c_n)$均是双调序列，且对于所有的$1<=i,j<=n$ 满足$b_i<=c_j$.

① 对半情况



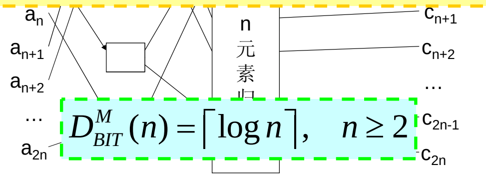


a_1	1	1	1	1	c_1
a_2	3	3	2	2	c_2
a_3	5	4	4	3	c_3
a_4	7	2	3	4	c_4
a_5	9	9	5	5	c_5
a_6	8	8	7	7	c_6
a_7	4	5	9	8	c_7
a_8	2	7	8	9	c_8

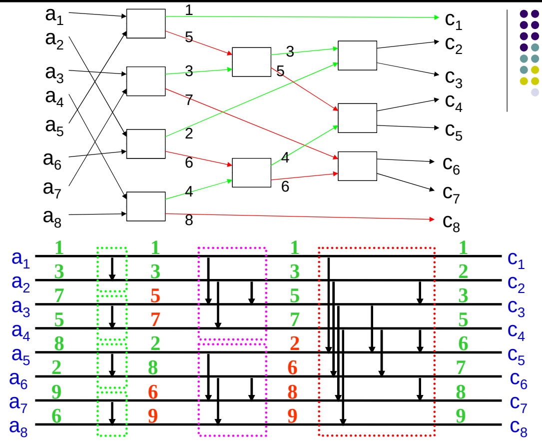
$$C_{BIT}^{M}(n)=C_{BIT}^{M}\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)+C_{BIT}^{M}\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right)+\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor,\quad n\geq 2$$

$$n=2^{t}\quad C_{BIT}^{M}(2^{t})=2C_{BIT}^{M}(2^{t-1})+\frac{n}{2}=\frac{n}{2}\log n$$

$$D_{BIT}^{M}(n)=1+D_{BIT}^{M}\left(\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil\right)$$

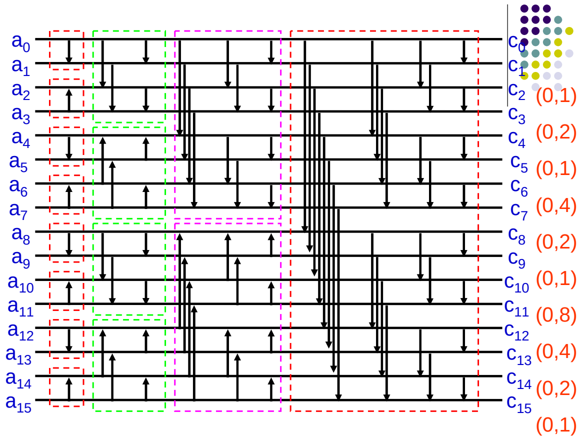


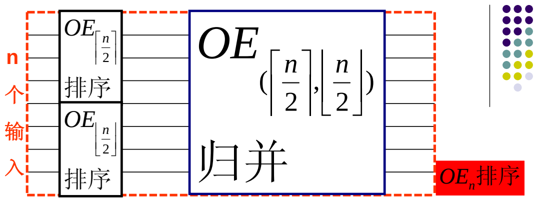
$$D_{BIT}^{M}(n)=\lceil \log n\rceil,\quad n\geq 2$$

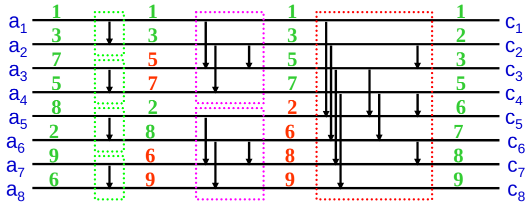


Batcher排序网络

- 对输入数进行两两比较，以形成长度为2的诸有序序列；
- 使用奇偶归并网络和双调归并网络，对两两长度各为2的有序序列施行归并，以形成一些长度为4的有序序列；
- 重复上述步骤，直到形成两个长度各为n/2的有序序列；
- 对这两个序列进行归并最终形成结果。







二维网孔上的排序算法

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

行主编号：

1,2,1,1,2,1,2,1,2,1

0	1	4	5
2	3	6	7
8	9	12	13
10	11	14	15

洗牌编号：

1,1,1,2,1,1,2,2,1,1

(0,1)
(0,2)
(0,1)
(0,4)
(0,2)
(0,1)
(0,8)
(0,4)
(0,2)
(0,1)

$$tr(2^t) = S\left(\left\lceil 2^{\frac{t}{2}-1} \right\rceil\right) + tr(2^{t-1})$$

$$\sum_{k=1}^{t} tr(2^k) = \sum_{k=1}^{t} (t-k+1) S\left(\left\lceil 2^{\frac{k}{2}-1} \right\rceil\right)$$

$k = 2l$与$k = 2l-1$时的$S\left(\left\lceil 2^{\frac{k}{2}-1} \right\rceil\right)$相同：

$$(t-(2l)+1)S(2^{l-1})$$

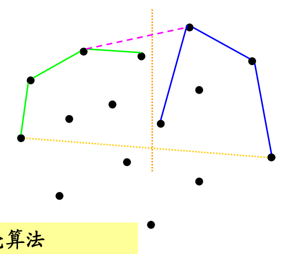
$$(t-(2l-1)+1)S(2^{\frac{2l-1}{2}-1})$$

$$= \sum_{l=1}^{\frac{t}{2}} (2t-4l+3) S(2^{l-1}) = \sum_{l=1}^{\frac{t}{2}} (2t-4l+3) 2^{l-1}$$

洗牌编号排序总选路数

*tr*归并中的总选路数

*S(j)*交换相距*j*的元素的选路数



PRAM上求上凸壳算法

- 点数小于等于4直接求;
- 按照x坐标把点集分成两半;
- 分别求各半的上凸壳;
- 求二者的上公切线;
- 得到结果.

PRAM上求凸壳算法

- 识别x坐标最大和最小两个极点;
- 按照y坐标点集分成两部分;
- 调用求上/下凸壳算法;
- 并且得到结果.

算法描述

- **Batcher双调归并算法**

输入：双调序列$X=(x_0,x_1,\ldots,x_{n-1})$

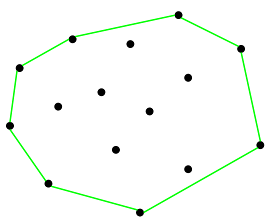
输出：非降有序序列$Y=(y_0,y_1,\ldots,y_{n-1})$

```
Procedure BITONIC_MERG(x)
Begin
  (1)for i=0 to n/2-1 par-do
     (1.1) s_i=min{xi,xi+n/2}
     (1.2) l_i=max{xi,xi+n/2}
     end for
  (2)Recursive Call:
     (2.1)BITONIC_MERG(MIN=(s_0,...,s_{n/2-1}))
     (2.2)BITONIC_MERG(MIN=(l_0,..., l_{n/2-1}))
  (3)output sequence MIN followed by sequence MAX
End
```

第六章 并行算法的基本设计技术

6.1 划分设计技术
6.2 分治设计技术
6.3 平衡树设计技术
6.4 倍增设计技术
6.5 流水线设计技术

凸壳问题



6.1 划分设计技术

6.1.1 均匀划分技术
6.1.2 方根划分技术
6.1.3 对数划分技术
6.1.4 功能划分技术

均匀划分技术

- **划分方法**

  n个元素A[1..n]分成p组，每组A[(i-1)n/p+1..in/p]，i=1~p

- **示例：** MIMD-SM模型上的PSRS排序

  begin

  (1)均匀划分：将n个元素A[1..n]均匀划分成p段，每个p_i处理A[(i-1)n/p+1..in/p]

  (2)局部排序：p_i调用串行排序算法对A[(i-1)n/p+1..in/p]排序

  (3)选取样本：p_i从其有序子序列A[(i-1)n/p+1..in/p]中选取p个样本元素

  (4)样本排序：用一台处理器对p^2个样本元素进行串行排序

  (5)选择主元：用一台处理器从排好序的样本序列中选取p-1个主元，并播送给其他p_i

  (6)主元划分：p_i按主元将有序段A[(i-1)n/p+1..in/p]划分成p段

  (7)全局交换：各处理器将其有序段按段号交换到对应的处理器中

  (8)归并排序：各处理器对接收到的元素进行归并排序

  end.

6.1.2方根划分技术

- 划分方法

  n个元素$A[1..n]$分成$A[(i-1)\times\sqrt{n}+1\cdots i\times\sqrt{n}]$，$i=1\cdots\sqrt{n}$

示例：SIMD-CREW模型上的Valiant归并(1975年发表)

// 有序组A[1..p], B[1..q],(假设p ≤ q)，处理器数$k=\lfloor\sqrt{pq}\rfloor$

begin

(1)方根划分：A, B分别按$i\lceil\sqrt{p}\rceil$ 和 $j\lceil\sqrt{q}\rceil$分成若干段（$i=1\sim\lfloor\sqrt{p}\rfloor$、$j=1\sim\lfloor\sqrt{q}\rfloor$）

(2)段间比较：

A划分元与B划分元比较（至多$\lfloor\sqrt{p}\rfloor\cdot\lfloor\sqrt{q}\rfloor$对），确定A划分元应插入B中的区段

(3)段内比较：A划分元与B相应段内元素进行比较，并插入适当位置

(4)递归归并：B按插入的A划分元重新分段，与A相应段（A除去原划分元）构成了成对的段组，对每对段组递归执行(1)~(3)，直至组为空时递归结束；

各组仍按$k=\lfloor\sqrt{pq}\rfloor$分配处理器

end.

均匀划分技术

- 例6.1 PSRS排序过程。N=27，p=3，PSRS排序如下：

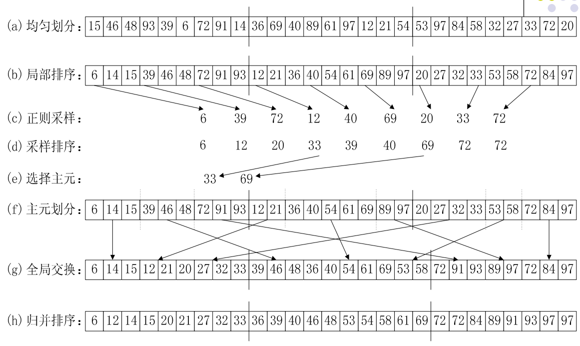
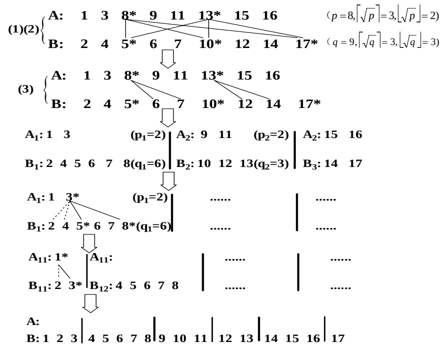


图6. 1

方根划分技术

- 示例: A={1,3,8,9,11,13,15,16},p=8; B={2,4,5,6,7,10,12,14,17},q=9



Time Comlexity

- 在**Phase b**中，由於各處理器平行進行**Quicksort**，故所需時間爲**O(k log k)**，其中**k=n/p**。
- 在**Phase d**中，對**p2**個資料做排序需要**O(p² log p²)**的時間。在**Phase f**中各個處理器對本地排序好的**list**做**p-1**次**binary search(list**的長度不大於**k)**，所以總共需要的時間爲**O(p² log p² + p log k)**。
- 在**Phase h**中，各處理器所需要**merge**的大小不會超過**2k**，故**Phase h**可在**O(2k log p)**時間完成。
- 將上述結果相加，所需時間爲**O(k log k + k log p + p log k + p² log p²)**。當**n≥p³**時，近似於**O(k log k) =** ***O((n/p)log n)***，顯然是**cost optimal**的。

林育德,A Survey on Parallel Sorting by Regular Sampling (PSRS) ,台灣大學 R87921104

分析：第4步递归归并时，原来的k台处理器是否够用？

设A和B中各段长度分别为p_i和q_i

$$\sum p_i = p \quad \sum q_i = q$$
$$\sum\sqrt{p_i q_i} \le \sqrt{\sum p_i \sum q_i}$$
$$\sum\left\lfloor\sqrt{p_i q_i}\right\rfloor \le \left\lfloor\sum\sqrt{p_i q_i}\right\rfloor \le \left\lfloor\sqrt{\sum p_i \sum q_i}\right\rfloor \le \lfloor pq \rfloor = k$$

时间复杂度分析

- 递归归并过程中，各段组中的有序序列均是A,B中的一段，所以从A的分段来看，每个归并中的两段中，至少有一段其长度不大于 $\lfloor\sqrt{p}\rfloor$
- 假定第i次递归归并中，某归并有一个序列长度为

$$R(i):\lambda_i$$
$$R(i+1):\lambda_{i+1}\le\left\lfloor\sqrt{\lambda_i}\right\rfloor$$
$$\lambda_0=p\Rightarrow\lambda_i\le\left\lfloor p^{2^{-i}}\right\rfloor$$
$$i\le\log\log p+C\Rightarrow T_k(p,q)=2\lceil\log\log p+C\rceil$$

6.1.4功能划分技术

- 划分方法

  n个元素A[1..n]分成等长的p组，每组满足某种特性。
- 示例：(m, n)选择问题(求出n个元素中前m个最小者)
  - 功能划分：要求每组元素个数必须大于m；
  - 算法：p148算法6.4

输入：A=(a1,...,an)；输出：前m个最小者；

Begin

(1) 功能划分：将A划分成g=n/m组，每组含m个元素；

(2) 局部排序：使用Batcher排序网络将各组并行进行排序；

(3) 两两比较：将所排序的各组两两进行比较，从而形成MIN序列；

(4) 排序-比较：对各个MIN序列，重复执行第(2)和第(3)步，直至

选出m个最小者。

End

分析

- 算法分析

(1)算法在并行递归过程中所需的处理器数≤ $k=\lfloor\sqrt{pq}\rfloor$

段间比较: $\lfloor\sqrt{p}\rfloor\cdot\lfloor\sqrt{q}\rfloor$ 比较对数≤ $\lfloor\sqrt{pq}\rfloor=k$；

段内比较: $\lfloor\sqrt{p}\rfloor\cdot(\lfloor\sqrt{q}\rfloor-1)\le\lfloor\sqrt{pq}\rfloor=k$

注: $\lceil\sqrt{q}\rceil-1\le\lfloor\sqrt{q}\rfloor$

递归调用: 设 A,B 分成若干子段对为 (p_1,q_1), (p_2,q_2),……

则 $\sum p_i\le p$, $\sum q_i\le q$，由Cauchy不等式=>

$$\sum\left\lfloor\sqrt{p_iq_i}\right\rfloor\le\left\lfloor\sum\sqrt{p_iq_i}\right\rfloor\le\left\lfloor\sqrt{\sum p_i\sum q_i}\right\rfloor\le\left\lfloor\sqrt{pq}\right\rfloor=k$$

综上，整个过程可用处理器数 $k=\lfloor\sqrt{pq}\rfloor$ 完成。

$$p^{2^{-i}}\ge C$$
$$2^{-i}\log p\ge C'$$
$$2^iC'\le\log p$$
$$iC''\le\log\log p$$

(2)时间分析

记 λ_i 是第 i 次递归后的 A 组最大长度，=> $\lambda_0=p$，$\lambda_i\le\left\lfloor\sqrt{\lambda_{i-1}}\right\rfloor\le\cdots\le\left\lfloor p^{2^{-i}}\right\rfloor$

算法在 $\lambda_i=$ 常数C 时终止递归，即 $\left\lfloor p^{2^{-i}}\right\rfloor\ge$ 常数C => $i\le\log\log p+$ 常数C_1

由(1)知算法中其他各步的时间为 O(1)，所以 Valiant 归并算法时间

$$t_k(p,q)=O(\log\log p)\qquad p\le q$$

功能划分技术

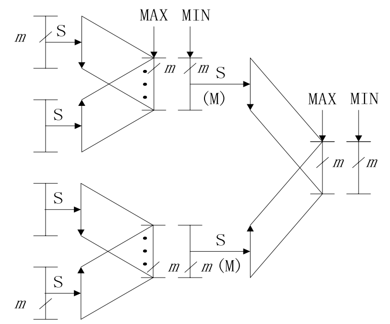


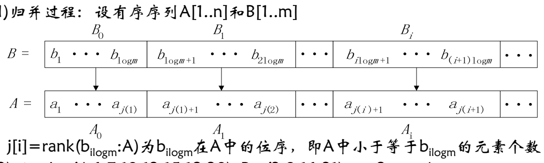
图6. 3 (m-n)-选择过程

6.1.3对数划分技术

- 划分方法

  n个元素A[1..n]分成A[(i-1)logn+1..ilogn]，i=1~n/logn
- 示例：PRAM-CREW上的对数划分并行归并排序

(1)归并过程：设有序序列A[1..n]和B[1..m]



$j[i]=rank(b_{ilogm}:A)$ 为 b_{ilogm} 在A中的位序，即A中小于等于 b_{ilogm} 的元素个数

(2)例：A=(4,6,7,10,12,15,18,20), B=(3,9,16,21) n=8, m=4

=>logm=log4=2

=> $j[1]=rank(b_{logm}:A)=rank(b_2:A)=rank(9:A)=3$, j[2]= ... =8

B_0: 3, 9　　B_1: 16, 21

A_0: 4, 6, 7　　A_1: 10, 12, 15, 18, 20

A和B归并转化为(A_0, B_0)和(A_1, B_1)的归并

第六章 并行算法的基本设计技术

6.5 流水线设计技术

6.5.1 设计思想
6.5.2 5-point DFT的计算

5-point DFT的计算

◆ 问题描述

5-point DFT的计算。应用秦九韶(Horner)法则，

$$\begin{cases} y_0 = b_0 = a_4\omega^0 + a_3\omega^0 + a_2\omega^0 + a_1\omega^0 + a_0 \\ y_1 = b_1 = a_4\omega^4 + a_3\omega^3 + a_2\omega^2 + a_1\omega^1 + a_0 \\ y_2 = b_2 = a_4\omega^8 + a_3\omega^6 + a_2\omega^4 + a_1\omega^2 + a_0 \\ y_3 = b_3 = a_4\omega^{12} + a_3\omega^6 + a_2\omega^4 + a_1\omega^2 + a_0 \\ y_4 = b_4 = a_4\omega^{16} + a_3\omega^6 + a_2\omega^4 + a_1\omega^2 + a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = (((a_4\omega^0 + a_3)\omega^0 + a_2)\omega^0 + a_1)\omega^0 + a_0 \\ y_1 = (((a_4\omega^1 + a_3)\omega^1 + a_2)\omega^1 + a_1)\omega^1 + a_0 \\ y_2 = (((a_4\omega^2 + a_3)\omega^2 + a_2)\omega^2 + a_1)\omega^2 + a_0 \\ y_3 = (((a_4\omega^3 + a_3)\omega^3 + a_2)\omega^3 + a_1)\omega^3 + a_0 \\ y_4 = (((a_4\omega^4 + a_3)\omega^4 + a_2)\omega^4 + a_1)\omega^4 + a_0 \end{cases}$$

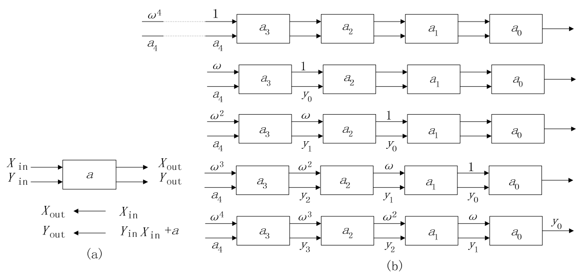
流水线设计技术

◆ 设计思想
- 将算法流程划分成p个前后衔接的任务片断，每个任务片断的输出作为下一个任务片断的输入；
- 所有任务片断按同样的速率产生出结果。

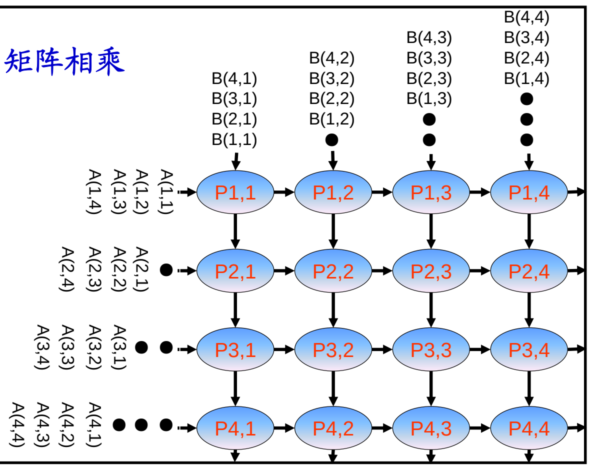
◆ 评注
- 流水线技术是一种广泛应用在并行处理中的技术；
- 脉动算法(Systolic algorithm)是其中一种流水线技术；

5-point DFT的计算

◆ 示例： p(n)=n-1, t(n)=2n-2=O(n)



矩阵相乘



第一次大作业

◆ 1. 设计3D-Mesh上的排序算法，分别给出算法的原理描述和具体描述，并进行时间复杂度分析；
◆ 2. 设计超立方体上的并行排序算法，分别给出算法的原理描述和具体描述，并进行时间复杂度分析；
◆ 3. 编程实现PSRS算法，给出带注解代码和运行测试结果；
◆ 4. 给出一个算法例子，该算法能够体现出LoGP模型的全部内容，并给出这个算法的原理描述、具体描述以及分析结果。

考试题

说明：

1. 任选一题，完成后书面提交，截至时间本学期第17周；
2. 题目中涉及的“并行计算”可能包括结构、模型、算法、性能、易用性等方面，所以思路要开阔；
3. 题目中涉及到要你进行选择的时候，一定要明确你的选择依据或者理由；
4. 答卷中需要包含分析或实验的内容，有新见解、完整性好或者论述充分者得满分。

1. 试论述生物学系统中的并行性对并行计算的贡献。
2. 试论述工学系统中的并行性对并行计算的贡献。
3. 写出一个典型的博弈树搜索问题（或其他同等问题）的并行算法，编程实现，进行算法分析。
4. 写出一个典型的数据挖掘问题的并行算法，编程实现，进行算法分析。
5. 试从网络协议级对第八章的选路方法和开关技术进行解释。
6. 应用**PCAM**方法学设计一个并行应用（必须要是临界问题）。
7. 写出一个典型的博弈树搜索问题（或其他同等问题）的并行算法，给出基于**BSP**模型和**LogP**模型的算法描述，进行算法分析。
8. 写出一个典型的数据挖掘问题的并行算法，给出基于**BSP**模型和**LogP**模型的算法描述，进行算法分析。