

* 专题评述 *

复杂网络上传播动力学研究综述 *

周 涛^{1,2} 傅忠谦¹ 牛永伟² 王 达¹ 曾 燕¹ 汪秉宏^{2**} 周佩玲¹

1. 中国科学技术大学 电子科学与技术系, 合肥 230026;

2. 中国科学技术大学 近代物理系, 合肥 230026

摘要 近年来, 真实网络中小世界效应和无标度特性的发现激起了物理学界对复杂网络的研究热潮, 其中网络拓扑结构对复杂网络上动力学行为的影响是研究焦点之一. 文中对复杂网络上传播动力学研究做了综述, 包括介绍了经典传播模型, 讨论了小世界网络和无标度网络的传播特性以及网络免疫技术. 总结了物理学家进入网络研究领域的意义, 并提出了目前尚无答案且值得进一步研究的 4 个问题.

关键词 传播 复杂网络 临界值 免疫 小世界效应 无标度特性

自然界中存在的大量复杂系统都可以通过网络加以描述^[1-4]. 一个典型的网络是由节点与连接两个节点之间的一些边组成的, 其中节点用来代表真实系统中不同的个体, 边用来表示个体间的关系, 往往是两个节点之间具有某种特定的关系则连一条边, 连边的两个节点被看作是相邻的. 例如, 神经网络可以看作大量神经细胞通过神经纤维相互连接形成的网络^[5]; 计算机网络可以看作是自主工作的计算机通过通信介质相互连接形成的网络^[6]. 类似的还有电力网络^[5]、社会关系网络^[5,7,8]、交通网络^[9]等.

对网络最早进行研究的是数学家, 其基本理论是图论. 经典图论倾向于用规则的拓扑结构模拟真实网络^[10,11], 到了 20 世纪中叶, Erdős 和 Rényi 建立了随机网络的基本模型^[12-14], 后来一直是科学家研究真实网络最有力的武器^[15]. 直到最近几年, 科学家们发现大量的真实网络既不是规则网络, 也不是随机网络, 而是具有与前两者皆不同的统计特征

的网络. 这样的一些网络被科学家们叫做复杂网络, 其诸多统计特征中最重要的是小世界效应^[5,16]和无标度特性^[17,18].

在网络中, 两点间的距离被定义为连接两点的 shortest 路所包含的边的数目, 把所有节点对的距离求平均, 就得到了网络的平均距离. 另外一个叫做簇系数 C 的参数, 专司衡量节点集聚成团的情况. 单个节点的簇系数被定义为它所有相邻节点之间连边的数目占可能的最大连边数目的比例. 类似的, 网络的簇系数 C 是所有节点簇系数的平均值. 研究表明, 规则网络具有大的簇系数和大的平均距离, 随机网络则具有小的簇系数和小的平均距离. 1998 年, Watts 和 Strogatz 通过以某个很小的概率改变规则网络中边的连接方式构造出了一种介于规则网络和随机网络之间的网络 (WS 网络), 它同时具有大的簇系数和小的平均距离, 因此既不能当作规则网络处理, 也不能被看作是随机网络^[5]. 后来物理学家把大的簇系数和小的平均距离两个统计特征合

2004-08-10 收稿, 2004-09-28 收修改稿

* 国家自然科学基金(批准号: 10472116, 70171053, 70271070, 70471033)、中国科学技术大学研究生创新基金项目(批准号: VSTC-SS-0501)和高等学校博士点专项基金(SRFDP 20020358009)资助项目

** 通讯作者, E-mail: bhwang@ustc.edu.cn

在一起称为小世界效应，具有这种效应的网络就是小世界网络。

大量的实证研究表明，真实网络几乎都具有小世界效应^[1-9]，有的甚至具有所谓的超小世界效应^[19]，同时科学家还发现大量真实网络的节点度服从幂率分布^[1-4,6,8,19-21]。节点度是指一个节点拥有相邻节点的数目，节点度服从幂律分布就是说具有某个特定度的节点数目与这个特定的度之间的关系可以用一个幂函数近似地表示。幂函数曲线是一条下降相对缓慢的曲线，这使得度很大的节点可以在真实网络中存在。因为幂函数具有标度不变性因此我们把节点度服从幂律分布的网络叫做无标度网络，并称这种节点度的幂律分布为网络的无标度特性。

病毒在计算机网络上的蔓延、传染病在人群中的流行、谣言在社会中的扩散等，都可以看作是服从某种规律的网络传播行为。由于以前的网络传播模型大都是基于规则网络的，因此，复杂网络不同统计特征的发现使科学家面临更改既有结论的危险。当然，如果理论研究和实验结果都说明复杂网络上的传播行为与规则网络别无二致，那么至少暂时还可以心安理得地使用以前的结论。但不幸的是，复杂网络上的传播行为与规则网络相比确实存在根本的不同。

1 经典传播模型简介

目前研究最为彻底，应用最为广泛的传染病模型是 SIR 模型和 SIS 模型，关于它们的讨论和较新的研究进展可以在文献^[22-24]中找到。

在 SIR 模型中，人群被划分为三类：第一类是易感人群(S)，他们不会感染他人，但有可能被传染；第二类是染病人群(I)，他们已经患病，具有传染性；第三类是免疫人群(R)，他们是被治愈并获得了免疫能力的人群，不具有传染性，也不会再次被感染。假设易感个体在单位时间内被某个染病个体传染的比例为 β ，而染病个体的康复比例为 γ ，并用 s, i, r 分别标记群体中 S, R, I 类个体所占比例，则在 SIR 模型中，疾病传播可以用下列微分方程组描述

$$\frac{ds}{dt} = -\beta is, \frac{di}{dt} = \beta is - \gamma i, \frac{dr}{dt} = \gamma i. \quad (1)$$

但在实际传播中，易感个体只有通过接触染病个体才能被传染，如果把每个个体用网络中的一个节点代表，两个个体可能接触就在相应的节点之间连一条边，当一个易感节点的相邻节点是患病节点时，疾病就会以一定概率感染易感节点，这样，传统的传播模型就可以自然地推广到一般传播网络中，而方程(1)可以看作传播网络为完全图的一种特殊情况。Grassberger 最早讨论了网络上的传播行为^[25]，指出网络传播的 SIR 模型可以等价于网络上的键逾渗问题^[26]，该结论最近由 Sander 等推广到了更一般的情形^[27]。假设(1)式中的 β 和 γ 并不是对每个节点都一致的，而是分别服从分布 $P_i(\beta)$ 和 $P_r(\gamma)$ ，Newman 证明了网络传播的 SIR 模型等价于键占据率为

$$T = 1 - \int_0^{\infty} P_i(\beta) P_r(\gamma) e^{-\beta/\gamma} d\beta d\gamma \quad (2)$$

的键逾渗模型^[28]。因此只要知道网络的拓扑结构并根据其拓扑结构给出合理的确定分布 $P_i(\beta)$ 和 $P_r(\gamma)$ 的方法，原则上就可以得到网络传播的 SIR 模型的解析解。

对于像肺结核、淋病这类治愈后患者也没有办法获得免疫能力的疾病，使用 SIR 模型是不适宜的，这时候往往采用 SIS 模型，该模型与 SIR 模型类似，只是患者被治愈后自动恢复为易感状态。因此，对于 SIS 模型，与(1)式对应的微分方程组的形式为

$$\frac{ds}{dt} = -\beta is + \gamma i, \frac{di}{dt} = \beta is - \gamma i, \quad (3)$$

与 SIR 模型不同的是，网络传播的 SIS 模型没有办法获得精确解。Pastor-Satorras 和 Vespignani 利用平均场的方法给出了一个相当好的近似解^[29-31]，假设度为 k 的顶点在网络中的比率为 p_k ，令 $\theta(\lambda)$ 表示某个体相邻顶点为染病节点的概率，其中 λ 是易感个体在单位时间内被单个患病个体传染的比率，他们得到了关于 $\theta(\lambda)$ 的一个隐式方程

$$\lambda \left(\sum_k k p_k \right)^{-1} \sum_k \frac{k^2 p_k}{1 + k\lambda\theta(\lambda)} = 1. \quad (4)$$

除了上述 SIR 和 SIS 模型外, 针对不同传染病的特点, 还有其他相应的传播模型. 比如, 对于免疫期有限的疾病, 往往利用 SIRS 模型进行分析; 对于潜伏期不可忽略的疾病, 可以引入潜伏人群的概念.

2 小世界网络的传播特性

Moore 和 Newman 最早对小世界网络上的传播行为进行了较系统的研究^[32]. 他们所考虑的小世界网络叫做 NW 网络^[33]. 在该网络中, 与 WS 网络类似, 节点先排布在一个最近邻环网上^[5], 但 NW 网络并不会破坏原来的连接, 只是以一个很小的概率在原来的最近邻环网上添加新的连接. Moore 和 Newman 把 NW 网络上的 SIR 模型等价于逾渗问题考虑, 用 ϕ 表示新添加的边的数目与原有边的数目的比值, k 表示在最近邻环网中沿顺时针或逆时针方向与某节点连接的节点数目, 他们给出了 NW 网络上座逾渗的临界值的隐式表示

$$\phi = \frac{(1 - p_c)^k}{2kp_c[2 - (1 - p_c)^k]}. \quad (5)$$

Moore 和 Newman 进一步研究了 NW 网络上的键逾渗问题, 他们直观地说明了在 $k = 1$ 时, 键逾渗与座逾渗有相同的临界值; 并利用生成函数的方法, 给出了当 $k = 2$ 时键逾渗的临界值

$$\phi = \frac{(1 - p_c)^3(1 - p_c + p_c^2)}{4p_c(1 + 3p_c^2 - 3p_c^3 - 2p_c^4 + 5p_c^5 - 2p_c^6)}. \quad (6)$$

结合(5), (6)式的结果, Moore 和 Newman 得到了座-键混合逾渗在 $k = 1$ 时的结果, 很快他们又给出了座-键混合逾渗的精确解^[34], 该结果对于网络免疫技术的研究, 是有启发意义的. 更高维度的小世界网络的传播行为的细致的研究, 可见文献^[35].

Kuperman 和 Abramson 研究了 WS 网络上的 SIRS 模型^[36], 他们发现当断键重连概率 p 很小 ($p = 0.01$) 的时候, 疾病可以在网络中长期存在, 但患病比例很小且波动不大, 可以近似地看作收敛到一个不动点; 而当断键重连概率 p 很大 ($p = 0.9$)

的时候, 患病人数会出现周期性的波动. 同时他们发现随着 p 的增长, 系统会出现从非同步相到同步相的相变. 基于 Kuperman 和 Abramson 的工作, Agiza 等考察了小世界网络上不同的传播模型, 并讨论了相关的相变行为^[37].

2000 年以后, 网络传播模型的重点已经从小世界网络转移到无标度网络, 这一方面是由于 Barabási 和 Albert 突破性的进展吸引了大量科学家的注意, 另一方面也是由于 Moore 和 Newman 等出色的工作, 似乎解决了最基本的有关小世界网络的传播问题. 当然, 至少还有一个问题是具有挑战性的, 即抛开具体的网络拓扑结构, 抽象地考虑小世界效应本身对于疾病传播的影响.

3 无标度网络的传播特性

经典的传播理论认为^[23], 存在大于零的传播强度临界值 λ_c , 当 $\lambda > \lambda_c$ 时疾病可以在网络中传播开, 并持久存在; 当 $\lambda < \lambda_c$ 时, 疾病以指数速度消亡. 由于疾病波及的范围(患病个体数占人群总数的比例)与传播强度正相关, 因此根据经典的传播理论, 疾病若是持久存在, 则必然波及大量个体. 但实证研究表明, 计算机病毒, 麻疹等一般仅波及少数个体但能够长期存在^[38,39]. Pastor-Satorras 等利用平均场的方法求得了一般网络上 SIS 模型传播的临界值为^[29-31]

$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}, \quad (7)$$

其中 $\langle A \rangle$ 表示 A 的均值. 由于无标度网络 $\langle k^2 \rangle \rightarrow \infty$, 因此 $\lambda_c \rightarrow 0$, 即在无标度网络中, 无论传播强度多么小, 疾病都能持久存在, 这就很好地符合了实证研究的结果.

(7) 式的结果是针对非关联网络的, 对于关联网络, Boguna 和 Pastor-Satorras 给出了 SIS 模型传播的临界值为^[40]

$$\lambda_c = \frac{1}{\Lambda_m}, \quad (8)$$

其中 Λ_m 为邻接矩阵的最大特征值. Boguna 等^[41]进一步证明了当 $\langle k^2 \rangle$ 发散时, $\Lambda_m \rightarrow \infty$, 亦即无标度

网络中,不管是关联网络还是非关联网络,都不存在正的临界值. Moreno 等分析了关联网络上的 SIR 模型,也得到了类似的结论^[42].

May 和 Lloyd 首先研究了无标度网络上传播行为的有限尺度效应,指出有限度的无标度网络存在正的传播强度临界值^[43]. Pastor-Satorras 和 Vespignani 给出了有限尺度效应下临界值的量化结果^[44],

$$\lambda_c(k_c) = k_c^{-1} \frac{\Gamma(-\gamma, m/k_c)}{\Gamma(1-\gamma, m/k_c)}, \quad (9)$$

其中 k_c 代表网络中结点的最大度,是网络尺度的函数, γ 和 m 是 BA 网络的参数^[17,18].

Barthélemy 等细致地研究了 SI 模型中疾病爆发的传播特性,发现传播的动力学结构具有层次性,一般从度大的节点群一直到度小的节点群^[45]. 考虑到不同亲疏关系的个体之间感染疾病的概率并不相同,我们讨论了含权无标度网络上的传播动力学特性,其中边权用来表示个体之间接触的频繁程度,研究发现边权对传播动力学特征有明显的影响^[46]. 从疾病爆发开始,有一段很短的时间,疾病以较慢的速度传播,然后迅速上升到一个很高的峰值,继而以幂函数形式下降. 疾病优先感染强度大的节点,没有出现明显的层次效应.

4 网络免疫技术

一个饶有趣味并且具有明显实际意义的问题是能否通过对部分人接种疫苗而有效地控制疾病的传播. 如第 1 节所述,网络传播的 SIR 模型可以等价于网络上的键逾渗,并且对个体进行免疫可以看成是网络上的座逾渗问题,因此针对 SIR 模型的免疫问题可以被等价地变换为网络上的座-键混合逾渗问题求解. Callway 等利用平均场近似的方法给出了座-键混合逾渗问题在一般网络拓扑结构下的解析解^[47],这个解实际上给出了在网络上随机选择个体接种疫苗的效果. 考虑到在实际应用中,节点的度,即在可能传染期间与某个体有可能接触的个体数目,往往是很难统计的, Cohen 等设计并分析了一种叫做“熟识者免疫”的策略^[48],即每一次选择都分两步:先随机选择一个个体,再随机选择该个

体的一个相邻个体进行免疫. 这种策略可以回避计算每个节点的度,且由于在无标度网络中度大的节点比度小的节点被选中的概率大很多^[49],因此该策略效果比随机免疫好很多. 与 Cohen 类似的叫做“接触免疫”^[50]和“环状免疫”^[51,52]的方法已经在应用中表现了较好效果.

SIS 模型免疫问题的主要工作由 Pastor-Satorras 和 Vespignani 完成^[53],他们首先提出了所谓的“目标免疫”方法,即对度大的节点优先免疫. 利用平均场近似的方法, Pastor-Satorras 和 Vespignani 证明了若想使用随机免疫的方法有效地控制疾病在无标度网络中的传播,需要对占总人数比例为 $g_c \rightarrow 1$ 的人群接种疫苗,即必须做到每人都接种疫苗. 而如果使用“目标免疫”方法,这个临界值可以下降到

$$g_c = e^{-2/m\lambda}, \quad (10)$$

其中 λ 代表传播率^[30]. 更早一点的工作是由 Dezsö 和 Barabási 完成的,他们提出了一种针对无标度网络的“比例优先免疫”策略,即每个个体被选中接种疫苗的概率与相应节点在网络中的度成正比^[54]. Dezsö 和 Barabási 的实验表明该方法是有效的, Pastor-Satorras 和 Vespignani 求出了相应的临界值为^[53]

$$g_c = \frac{1}{3}(m\lambda)^2. \quad (11)$$

最近的一个有趣的结果是由 Hayashi 等得到的,他们考虑了线性增长的无标度网络,发现如果想要控制疾病流行,就必须控制种群数量的增长^[55,56]. 这个结果对于控制类似于禽流感、口蹄疫等动物疾病显然有明显的指导意义.

5 结束语

从上面的介绍可以看出,复杂网络上传播问题的研究方兴未艾,而且所得结果已经在很大程度上改变了我们对于传播问题的看法. 物理学家不仅带来了复杂网络这一新的研究对象,更重要的是他们带来了新的研究方法和研究视角. 作为文章的结尾,笔者拟提出一些目前尚无答案,值得进一步研

究的问题, 希望这些问题能够有助于我国相关科研人员在领域开展工作。

问题 1 本文所提到的大量结论, 都是物理学家通过一种直观的“物理式的”方法证明的, 其中使用最多的是平均场论近似。这种近似到底是不是可行的, 精确程度是多少, 目前还有待研究。尝试给出在测度意义下的严格证明, 是很有意义的。

问题 2 上面我们提到的结果, 很多都要依赖于某种具体的网络形式。例如小世界网络中的传播问题的讨论一般都是在 WS 模型或 NW 模型下进行的。一个非常有挑战性的问题是抛开具体的网络形式, 讨论网络拓扑结构中的某些几何量对于传播行为的影响。比如说抽象地讨论平均距离对于传播行为的影响, 研究疾病传播临界值和波及范围与网络平均距离之间的统计相关性。

问题 3 以前关于免疫策略的研究除 Cohen 等的工作外^[49,51-53]大都需要知道网络整体拓扑结构的信息, 一个有趣的问题是设计有效的分布式免疫策略, 该策略只需要知道局部的拓扑特性。另外, 以前的免疫算法都是离线算法, 有没有可以随着疾病传播情况实时修正的有效的在线免疫算法呢?

问题 4 同样是两个个体可能接触, 但家庭成员之间的接触可能非常亲密频繁, 而同事间的接触总会有一些距离, 因此实际传播网络的边的权重应该是不一样的。含权网络^[57,58]上的传播行为有什么特征, 如何去分析边权(或顶点权)分布对传播行为的影响, 是值得研究的^[46]。

参 考 文 献

- 1 Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev Mod Phys*, 2002, 74: 47—97
- 2 Newman M E J. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 2003, 45: 167—256
- 3 Wang X F. Complex networks: Topology, dynamics and synchronization. *Int J Bifurcation & Chaos*, 2002, 12: 885—916
- 4 Evans T S. Complex Networks. arXiv: cond-mat/0405123
- 5 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small world networks. *Nature*, 1998, 393: 440—442
- 6 Faloutsos M, Faloutsos P, Faloutsos C. On power-law relationship of the internet topology. *Computer Communications Review*, 1999, 29: 251—262
- 7 Liljeros F, Rdling C R, Amaral L A N, et al. The Web of human sexual contact. *Nature*, 2001, 411: 907—908

- 8 Ebel H, Mielsch L I, Borbholdt S. Scale-free topology of e-mail networks. *Phys Rev E*, 2002, 66: 035103
- 9 Sen P, Dasgupta P, Chatterjee A, et al. Small-world properties of the Indian railway network. *Phys Rev E*, 2003, 67: 036106
- 10 Bond J, Murty U S R. *Graph Theory with Applications*. London: MacMillan Press, 1976
- 11 Xu J M. *Topological Structure and Analysis of Interconnection Network*. Kluwer: Academic Publishers, 2001
- 12 Erdős P, Rényi A. On random graphs. *Publications Mathematica*, 1959, 6: 290—297
- 13 Erdős P, Rényi A. On the evolution of random graphs. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Science*, 1960, 5: 17—61
- 14 Erdős P, Rényi A. On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Scientia Hungary*, 1961, 12: 261—267
- 15 Bollobás B. *Random Graphs*. 2nd ed. New York: Academic Press, 2001
- 16 Milgram S. The smallworld problem. *Psychology Today*, 1967, 2: 60—67
- 17 Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286: 509—512
- 18 Barabási A L, Albert R, Jeong H. Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A*, 1999, 272: 173—187
- 19 Zhou T, Wang B H, Jiang P Q, et al. A deterministic super small-world network of integers. arXiv: cond-mat/0405258
- 20 Jeong H, Mason S, Barabási A L, et al. Lethality and centrality in protein networks. *Nature*, 2001, 411: 41—42
- 21 Jeong H, Tombor B, Albert R, et al. The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, 2000, 407: 651—654
- 22 Bailey N T J. *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications*. New York: Hafner Press, 1975
- 23 Anderson R M, May R M. *Infectious Diseases of Humans*. Oxford: Oxford University Press, 1992
- 24 Hethcote H W. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, 2000, 42: 599—653
- 25 Grassberger P. On the critical behavior of the general epidemic process and dynamical percolation. *Math Biosci*, 1983, 63: 157—172
- 26 Grimmett G R. *Percolation*. Berlin: Springer-Verlag 1989
- 27 Sander L M, Warren C P, Sokolov I, et al. Percolation on disordered networks as a model for epidemics. *Math Biosci*, 2002, 180: 293—305
- 28 Newman M E J. Spread of epidemic disease on networks. *Phys Rev E*, 2002, 66: 016128
- 29 Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic dynamics and endemic states in complex networks. *Phys Rev E*, 2001, 63: 066117

- 30 Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic spreading in scale-free networks. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 3200—3203
- 31 Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemics and immunization in scale-free networks. In: Bornholdt S, Schuster H G (eds.) *Handbook of Graph and Networks*. Berlin: Wiley-VCH, 2003
- 32 Moore C, Newman M E J. Epidemics and percolation in small-world networks. *Phys Rev E*, 2000, 61: 5678—5682
- 33 Newman M E J, Watts D J. Scaling and percolation in the small-world network model. *Phys Rev E*, 1999, 60: 7332—7342
- 34 Moore C, Newman M E J. Exact solution of site and bond percolation on small-world networks. *Phys Rev E*, 2000, 62: 7059—7064
- 35 Newman M E J, Jensen I, Ziff R M. Percolation and epidemics in a two-dimensional small world. *Phys Rev E*, 2002, 65: 021904
- 36 Kuperman M, Abramson G. Small world effect in an epidemiological model. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 2909—2912
- 37 Agiza H N, Elgazzar A S, Youssef S A. Phase transitions in some epidemic models defined on small-world networks. *arXiv: cond-mat/0301004*
- 38 Kephart J O, Sorkin G B, Chess D M, et al. Fighting computer viruses. *Sci Am*, 1997, 277: 56—61
- 39 Kephart J O, White S R, Chess D M. Computers and epidemiology. *IEEE Spectr*, 1993, 30: 20—26
- 40 Boguñá M, Pastor-Satorras R. Epidemic spreading in correlated complex networks. *Phys Rev E*, 2002, 66: 047104
- 41 Boguñá M, Pastor-Satorras R, Vespignani A. Absence of epidemic threshold in scale-free networks with connectivity correlations. *Phys Rev Lett*, 2003, 90: 028701
- 42 Moreno Y, Gómez J B, Pacheco A F. Epidemic incidence in correlated complex networks. *Phys Rev E*, 2003, 68: 035103
- 43 May R M, Lloyd A L. Infection dynamics on scale-free networks. *Phys Rev E*, 2001, 64: 066112
- 44 Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic dynamics in finite size scale-free networks. *Phys Rev E*, 2002, 65: 035108
- 45 Barthélemy M, Barrat A, Pastor-Satorras R, et al. Velocity and hierarchical spread of epidemic outbreaks in scale-free networks. *Phys Rev Lett*, 2004, 92: 178701
- 46 Yan G, Zhou T, Wang J, et al. Epidemic spread in weighted scale-free networks. *arXiv: cond-mat/0408049*
- 47 Callway D S, Newman M E J, Strogatz S H, et al. Network robustness and fragility: Percolation on random graphs. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 5468—5471
- 48 Cohen R, Havlin S, ben-Avraham D. Efficient immunization of populations and computers. *Phys Rev Lett*, 2003, 91: 247901
- 49 Newman M E J, Strogatz S H, Watts D J. Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications. *Phys Rev E*, 2001, 64: 026118
- 50 Kretzschmar M, vanDuynhoven Y T H P, Severijnen A J. Modeling prevention strategies for gonorrhoea and chlamydia using stochastic network simulation. *Am J Epidemiol*, 1996, 114: 306—317
- 51 Greenhalgh D. Optimal control of an epidemic by ring vaccination. *Communications in Statistics: Stochastic Models*, 1986, 2: 339—363
- 52 Müller J, Schönfisch B, Kirkilionis M. Ring vaccination. *J Math Biol*, 2000, 41: 143—171
- 53 Pastor-Satorras R, Vespignani A. Immunization of complex networks. *Phys Rev E*, 2002, 65: 036104
- 54 Dezső Z, Barabási A L. Halting viruses in scale-free networks. *Phys Rev E*, 2002, 65: 055103
- 55 Hayashi Y. Mechanisms of recoverable prevalence and extinction of viruses on linearly growing scale-free networks. *arXiv: cond-mat/0307135*
- 56 Hayashi Y, Minoura M, Matsukubo J. Oscillatory epidemic prevalence in growing scale-free networks. *Phys Rev E*, 2004, 69: 016112
- 57 Yook S H, Jeong H, Barabási A L. Weighted evolving networks. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 5835—5838
- 58 Barrat A, Barthélemy M, Pastor-Satorras R, et al. The architecture of complex weighted networks. *PNAS*, 2004, 101: 3747—3752