第一章 预备知识

张祖锦(David Zhang)
中山大学数计学院

1.设Ω是R^n中的区域(不必有界),ε为给定的正数.记

$$\Omega_\varepsilon=\left\{x\in R^n;dist(x,\Omega)<\varepsilon\right\}$$

$$\Omega_{2\varepsilon}=\left\{x\in R^n;dist(x,\Omega)<2\varepsilon\right\}$$

证明:存在函数$\psi_\varepsilon\in C^\infty(R^n)$满足下列条件:

$(i)\psi_\varepsilon(x)=1,\forall x\in\Omega^-;$

$(ii)\psi_\varepsilon(x)=0,\forall x\in R^n\setminus\Omega_{2\varepsilon};$

$(iii)0\le\psi_\varepsilon(x)\le 1,\forall x\in\Omega_{2\varepsilon}\setminus\Omega^-;$

$(iv)\forall\alpha\in Z_+^n,\exists C=C(n,|\alpha|),s.t.|D^\alpha\psi_\varepsilon(x)|\le C\varepsilon^{-|\alpha|},\forall x\in R^n.$

证明 取$\psi_\varepsilon(x)=\left(j_\varepsilon*\chi_{\Omega_\varepsilon}\right)(x),x\in R^n$,其中$\chi_{\Omega_\varepsilon}$为$\Omega_{2\varepsilon}$的特征函数,则

$(i)\psi_\varepsilon(x)=1,\forall x\in\Omega^-;$

$(ii)\psi_\varepsilon(x)=0,\forall x\in R^n\setminus\Omega_{2\varepsilon};$

$(iii)0\le\psi_\varepsilon(x)\le 1,\forall x\in\Omega_{2\varepsilon}\setminus\Omega^-;$

$(iv)\forall\alpha\in Z_+^n,\exists C=C(n,|\alpha|),s.t.|D^\alpha\psi_\varepsilon(x)|\le C\varepsilon^{-|\alpha|},\forall x\in R^n.$

这是因为,若记$j(z)=j(\lambda),\lambda=|z|$,有

$$|D^\alpha\psi_\varepsilon(x)|=\varepsilon^{-n}\left|\int_{R^n}D_x^\alpha\left(j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)x_{\Omega_\varepsilon}(y)dy\right|$$

$$=\varepsilon^{-n-|\alpha|}\left|\int_{R^n}\frac{dj}{d\lambda^{|\alpha|}}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\chi_{\Omega_\varepsilon}(y)dy\right|$$

$$=\varepsilon^{-|\alpha|}\left|\int_{R^n}\frac{d^{|\alpha|}j}{d\lambda^{|\alpha|}}(z)\chi_{\Omega_\varepsilon}(x-\varepsilon z)dz\right|\le\left[\int_{R^n}\left|\frac{d^{|\alpha|}j}{d\lambda^{|\alpha|}}\right|dz\right]\varepsilon^{-|\alpha|}=C(n,|\alpha|)\varepsilon^{-|\alpha|}$$

2.设Ω是R^n中的有界区域,用$C_0(\Omega^-)$表示由全体在Ω^-上连续,在$\partial\Omega$上为零的函数构成的集合,即

$$C_0(\Omega^-)=\left\{u\in C(\Omega^-);u|_{\partial\Omega}=0\right\}$$

$C_0(\Omega^-)$按范数$\|u\|=max_{x\in\Omega^-}|u(x)|$构成$Banach$空间.

(i)用$C_0(\Omega)$表示由全体在Ω上连续,并且$sptu\subset\subset\Omega$的函数构成的集合,证明$C_0(\Omega)$在$C_0(\Omega^-)$中稠密.

(ii)应用(i)和函数的磨光技术证明$C_0^\infty(\Omega)$在$C_0(\Omega)$中稠密.

(iii)设$m\in Z_+$,记

$$C_0^m(\Omega^-)=\left\{u\in C^m(\Omega^-);D^\alpha u|_{\partial\Omega}=0,\forall\alpha\in Z_+^m,|\alpha|\le m\right\}$$

$C_0^m(\Omega^-)$按范数$\|u\|_m=\sum_{|\alpha|\le m}max_{x\in\Omega^-}|D^\alpha u(x)|$构成$Banach$空间.证明$C_0^\infty(\Omega)$在$C_0^m(\Omega^-)$中稠密.

证明 (i)令$\Omega^\varepsilon=\left\{x\in\Omega;dist(x,\partial\Omega)>\varepsilon\right\}$,则当$\varepsilon>0$充分小时,$|u(x)|<\varepsilon$于

$\Omega-\Omega^{\varepsilon}$上.取$\psi_{\varepsilon}\in C_0^{\infty}(\Omega)$,使得$\psi_{\varepsilon}(x)=1$于$\Omega^{\varepsilon}$上,$0\le\psi_{\varepsilon}(x)\le 1$于$\Omega^{\varepsilon}$上.则

$(a)\,\psi_{\varepsilon}(x)u(x)\in C_0(\Omega)$,因为$spt[\psi_{\varepsilon}(x)u(x)]\subset spt[\psi_{\varepsilon}(x)]\subset\Omega$;

$(b)\,\|\psi_{\varepsilon}(x)u(x)-u(x)\|_{C(\Omega^{-})}=sup_{x\in\Omega\setminus\Omega^{\varepsilon}}|\psi_{\varepsilon}(x)u(x)-u(x)|\le sup_{x\in\Omega\setminus\Omega^{\varepsilon}}|u(x)|<\varepsilon$

(ii)由(i),

$$\exists v\in C_0(\Omega), s.t.\, \|u-v\|_{C(\Omega^{-})}<\varepsilon/2$$

再对v标准磨光,记为v_{ε},有当$\varepsilon>0$充分小时,$\|v-v_{\varepsilon}\|_{C(\Omega)}<\varepsilon/2$,从而

$$\|u-v_{\varepsilon}\|_{C(\Omega^{-})}\le\|u-v\|_{C(\Omega^{-})}+\|v-v_{\varepsilon}\|_{C(\Omega)}<\varepsilon.$$

(iii)同(i),(ii),只要把$C_0(\Omega)$换成$C_0^m(\Omega)$.还是稍微写清楚点[管它对与错]

(a) $C_0^{\infty}(\Omega)$在$C_0^m(\Omega^{-})$中稠密.

$\forall x\in\partial\Omega$,由$\forall\beta\in Z_+^n,|\beta|\le m$,$D^{\beta}u(x)=0$及$Taylor$定理,有

$$\begin{aligned}
\left|D^{\beta}u(y)\right|&=\left|D^{\beta}u(y)-D^{\beta}u(x)\right|\\
&=\left|\sum_{\gamma\ge\beta,|\gamma|\le m-1}\frac{1}{(\gamma-\beta)!}D^{\gamma}u(x)(y-x)^{\gamma-\beta}\right|\\
&+\left|\sum_{|\gamma|=m}\frac{1}{(\gamma-\beta)!}D^{\gamma}u\big(x+\theta_y(y-x)\big)(y-x)^{\gamma-\beta}\right|\\
&=\sum_{|\gamma|=m}\frac{1}{(\gamma-\beta)!}\left|D^{\gamma}u\big(x+\theta_y(y-x)\big)(y-x)^{\gamma-\beta}\right|\\
&\le C(m)\varepsilon^{m-|\beta|},\forall y\in U_x=\{y\in R^n;|y-x|<\varepsilon\}
\end{aligned}$$

其中$\theta_y\in(0,1)$,这里及以后如果需要将u零延拓至整个R^n上.

由$\partial\Omega$紧,$\{U_x\}_{x\in\partial\Omega}\supset\partial\Omega$知存在$\{x_k\}_{k=1}^n\subset\partial\Omega$,使得$\partial\Omega\subset\bigcup_{i=1}^n U_i$ (记$U_i=U_{x_i}$).

又有$U_0\subset\subset\Omega$,使$U_0\bigcup\bigcup_{i=1}^n U_i\supset\Omega$,作$\eta(x)\in C_0^{\infty}(\Omega)$使得

$$\eta(x)=1于U_0;0\le\eta(x)\le 1于\Omega;\left|D^{\beta}\eta(x)\right|\le\frac{C(m)}{\varepsilon^{|\beta|}}$$

[由题1知这样的η是存在的].

于是对$\forall\alpha\in Z_+^n,|\alpha|\le m,\forall x\in\Omega\setminus U_0$有

$$\left|D^{\alpha}(\eta u)-D^{\alpha}u\right|=\left|\sum_{0<\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}\eta D^{\beta}u\right|$$

$$\le\sum_{0<\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}C(m)\varepsilon^{-|\alpha-\beta|}\varepsilon^{m-|\beta|}\le C(m,|\alpha|)\varepsilon^{m-|\alpha|}\to 0(\varepsilon\to 0)$$

从而

$$\begin{aligned}
\|\eta u-u\|_{C^m(\Omega^{-})}&=\sum_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\Omega^{-}}\left|D^{\alpha}(\eta u)-D^{\alpha}u\right|\\
&=\sum_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\Omega^{-}\setminus U_0}\left|D^{\alpha}(\eta u)-D^{\alpha}u\right|\to 0(\varepsilon\to 0)
\end{aligned}$$

由于$\eta u\in C_0^m(\Omega)$,而有结论.

(b) $C_0^\infty(\Omega)$在$C_0^m(\Omega)$中稠密.

取$0<\varepsilon<\frac{1}{2}dist(sptu,\partial\Omega)$,有$\forall\alpha\in Z_+^n,|\alpha|\le m$,

$$\begin{aligned}&\left|\sup_{x\in\Omega}\left|D^\alpha(j_\varepsilon*u)(x)-D^\alpha u(x)\right|\right|\\&=\sup_{x\in\Omega}\left|D^\alpha\int_{R^n}\frac{1}{\varepsilon^n}u(y)j\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy-D^\alpha u(x)\right|\\&=\sup_{x\in\Omega}\left|\int_{|z|\le1}[u(x-\varepsilon z)-u(x)]j(z)dz\right|\\&\le\sup_{x\in\Omega}\sup_{(sptu)_\varepsilon}|u(x-\varepsilon z)-u(x)|\to0(\varepsilon\to0)\end{aligned}$$

故有

$$\|j_\varepsilon*u-u\|_{C_0^m(\Omega)}=\sum_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\Omega}\left|D^\alpha(j_\varepsilon*u)-D^\alpha u\right|\to0(\varepsilon\to0)$$

而$j_\varepsilon*u\in C_0^\infty(\Omega)$而有结论.

(c)结合(a),(b)有$\left[\left[\left(C_0^\infty(\Omega)\right)\right]\right]=\left[\left(C_0^\infty(\Omega)\right)\right]=\left[\left(C_0^m(\Omega)\right)\right]=C_0^m(\Omega^-)$.这里仿照*Lars Hormander*的*Linear Functional Analysis*中的闭包符号.

3.(i)设Ω是R^n中的有界区域,u和v是Ω上的局部可积函数,$\alpha\in Z_+^n$.又设对每点$x_0\in\Omega$,存在x_0的相应领域$U_{x_0}\subset\Omega$,使得在U_{x_0}上成立$D^\alpha u=v$.证明:在整个Ω上亦成立$D^\alpha u=v$.

(ii)设Ω是R^n中的有界区域,u是定义在Ω^-的某个领域上的函数,$0<\alpha<1$.又设每点$x_0\in\Omega^-$都存在x_0的相应领域U_{x_0},使成立$u\in C^\alpha\left(U_{x_0}^-\right)$.证明$u\in C^\alpha(\Omega^-)$.

证明 (i)由于$\{U_x\}_{x\in\Omega}$构成Ω的一开覆盖,可以找到可数的,局部有限的子覆盖$\left\{U_i=U_{x_i}\right\}_{i=1}^\infty$,作从属于该子覆盖的单位分解,即取

$$\eta_i(x)\in C_0^\infty(R^n),s.t.spt\eta_i\subset U_i;0\le\eta_i(x)\le1于U_i;\sum_{i=1}^\infty\eta_i(x)=1于\Omega$$

则$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$,$spt\varphi$仅与有限多个$U_i$相交,设为$\left\{U_j\right\}_{j=1}^k$,则

$$\int_\Omega v\varphi dx=\int_{spt\varphi}v\varphi dx=\int_{spt\varphi}v\sum_{j=1}^k\eta_j\varphi dx=\sum_{j=1}^k\int_{spt\varphi}v(\eta_j\varphi)dx=\sum_{j=1}^k\int_{spt\eta_j\varphi}v(\eta_j\varphi)dx$$

$$=\sum_{j=1}^k(-1)^{|\alpha|}\int_{spt\eta_j\varphi}uD^\alpha(\eta_j\varphi)dx=(-1)^{|\alpha|}\int_{spt\varphi}uD^\alpha\left(\sum_{j=1}^k\eta_j\varphi\right)dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx$$

从而$D^\alpha u=v$于Ω上.

(ii)由Ω^-的紧性,存在$\left\{U_i=U_{x_i}\right\}_{i=1}^k$,使得$\Omega^-\subset\bigcup_{i=1}^kU_i$.作从属于$\{U_i\}_{i=1}^k$的单位分解$\eta_i$,使得

$$\eta_i\in C_0^\infty(R^n);spt\eta_i\subset U_i;0\le\eta_i\le1于U_i;\sum_{i=1}^k\eta_i(x)=1于\Omega^-$$

且$\exists C>0, s.t. \| \eta_i \|_{C^\alpha(U_i)} \le C\,(i=1,2,\cdots k)$从而

$$\| u \|_{C^\alpha(\Omega^-)} = \| \sum_{i=1}^k \eta_i(x) u(x) \|_{C^\alpha(\Omega^-)} = \| \sum_{i=1}^k \eta_i(x) u(x) \|_{C^\alpha(U_i^-)} \le C \sum_{i=1}^k \| u \|_{C^\alpha(U_i^-)} < \infty$$

即$u \in C^\alpha(\Omega^-)$.

4.设Ω是R^n中的有界区域,$0<\alpha<\beta<1$.

(i)证明:$C^\beta(\Omega^-) \subset C^\alpha(\Omega^-)$且$C^\beta(\Omega^-)$中的有界集合是$C^\alpha(\Omega^-)$中的相对紧集.

(ii)设$u_k \in C^\beta(\Omega^-)(k=1,2,\cdots)$且$\exists M>0, s.t. \| u_k \|_{C^\beta(\Omega^-)} \le M\,(k=1,2,\cdots)$.又设

$$lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x), \forall x \in \Omega^-$$

证明:$u \in C^\beta(\Omega^-)$且$lim_{k\to\infty} \| u_k - u \|_{C^\alpha(\Omega^-)} = 0$.

证明 (i)由$\dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} = \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta} |x-y|^{\beta-\alpha} \le [u]_{\beta;\Omega} \left[diam(\Omega)\right]^{\beta-\alpha}$知

$$C^\beta(\Omega^-) \subset C^\alpha(\Omega^-).$$

设$\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset C^\beta(\Omega^-)$是$C^\beta(\Omega^-)$中有界列,即

$$\exists M>0, s.t. \| u_n \|_{\beta;\Omega} = | u_n |_{0;\Omega} + [u_n]_{\beta;\Omega} \le M$$

由$Azela-Ascoli$定理,$\{u_n\}_{n=1}^\infty$有子列$\left\{u_k = u_{n_k}\right\}_{k=1}^\infty$在$\Omega^-$上一致收敛,设极限函数为$u$.我们有$u \in C^\beta(\Omega) \subset C^\alpha(\Omega)$,因为在

$$| u_k |_{0;\Omega} \le M \text{ 及 } \frac{|u_k(x)-u_k(y)|}{|x-y|^\beta} \le M\,(\forall x,y \in \Omega)$$

中令$k\to\infty$即有.余下我们证明$u_k \to u\left(\text{于} C^\alpha(\Omega^-)\right)$.

(a)由$\{u_k\}$一致收敛到u,有$|u_k - u| \to 0\,(k\to\infty)$;

(b)

$$\frac{\left|[u_k(x)-u(x)]-[u_k(y)-u(y)]\right|}{|x-y|^\alpha}$$

$$= \left[\frac{\left|[u_k(x)-u(x)]-[u_k(y)-u(y)]\right|}{|x-y|^\beta}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}} \left|[u_k(x)-u(x)]-[u_k(y)-u(y)]\right|^{1-\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\le [2M]^{\frac{\alpha}{\beta}} \left|[u_k(x)-u(x)]-[u_k(y)-u(y)]\right|^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \to 0\left(k\to\infty,\text{关于}x,y\in\Omega\text{一致}\right)$$

(ii)类似于(i),通过取极限,我们有$u \in C^\beta(\Omega^-)$.由于连续函数列$\{u_k\}_{k=1}^\infty$在紧集Ω^-上收敛而一致收敛,通过上述不等式,有$u_k \to u\left(\text{于} C^\alpha(\Omega^-)\right)$.

5.(i)叙述$Sobolev$嵌入定理;

(ii)设Ω是R^n中的有界区域,$\partial\Omega$充分光滑,又设$1 \le p \le \infty$.证明:

$$\bigcap_{m=1}^\infty W^{m,p}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega^-)$$

(iii)设Ω是R^n中的有界区域,$\partial\Omega$充分光滑.又设$1 \le p < q \le \infty$,m,k为非负

整数$m>k$,且$m-\frac{n}{p}>k-\frac{n}{q}$.证明:

$$\forall\varepsilon>0,\exists C=C(\varepsilon)>0,s.t.\|u\|_{W^{k,q}(\Omega)}\le\varepsilon\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}+C\|u\|_{L^p(\Omega)},\forall u\in W^{m,p}(\Omega)$$

证明 (i) $Sobolev$嵌入定理如下

$$W^{k,p}(\Omega)\to\begin{cases}L^q(\Omega), & 1\le q\le p^*\equiv\dfrac{np}{n-kp}, \quad kp<n;\\ L^q(\Omega), & 1\le q\le\infty, \quad kp=n;\\ C^\alpha(\Omega^-), & 0<\alpha\le1-\dfrac{n}{kp}, \quad kp>n.\end{cases}$$

(ii)由于$C^\infty(\Omega^-)=\bigcap_{i=1}^\infty C^i(\Omega^-)$,故只要证$\forall i\in Z_+\Rightarrow\bigcap_{m=1}^\infty W^{m,p}(\Omega)\subset C^i(\Omega^-)$.这是因为有

$$W^{m,p}(\Omega)\to C^{m-\frac{n}{p}-1}(\Omega^-)\left(mp>n,\frac{n}{p}\in Z_+\right)$$

我们取$m_0=\frac{n}{p}+1+i$,即有$\bigcap_{m=1}^\infty W^{m,p}(\Omega)\subset W^{m_0,p}(\Omega)\to C^i(\Omega^-)$.

(iii)我们先证明

引理[张恭庆泛函分析$P215$]设X,Y,Z是B空间,$X\subset Y\subset Z$,如果$X\to Y$的嵌入映射是紧的,$Y\to Z$的嵌入映射是连续的,则

$$\forall\varepsilon>0,\exists C=C(\varepsilon)>0,s.t.\|x\|_Y\le\varepsilon\|x\|_X+C\|x\|_Z\ (\forall x\in X)$$

如果引理不成立,则

$$\exists\varepsilon_0>0,\forall n\in Z_+,\exists x_n\in X,s.t.\|x_n\|_Y>\varepsilon_0\|x_n\|_X+n\|x_n\|_Z$$

取$y_n=\frac{x_n}{\|x_n\|_X}\in X$,则$\|y_n\|_X=1$,且$\|y_n\|_Y>\varepsilon_0+n\|y_n\|_Z$.由$X\to Y$的嵌入是紧的,$\{y_n\}$有子列$\{y_k=y_{n_k}\}\to y(于Y)$.从而$\{\|y_k\|_Y\}$有界,由

$$\|y_k\|_Y>\varepsilon_0+n_k\|y_k\|_Z知\|y_k\|_Y>\varepsilon且\|y_k\|_Z<\frac{\|y_k\|_Y}{n_k}\to0(k\to\infty)$$

这与$Y\to Z$的嵌入是连续矛盾.从而得证.

现证明题目,由于$m-\frac{n}{p}>k-\frac{n}{q}$,$W^{m,p}(\Omega)\to W^{k,q}(\Omega)$紧,$W^{k,q}(\Omega)\to L^p(\Omega)$连续,由引理即得结论.