2007级硕士研究生算子半群期末考试题

Uia,Math,Sysu,China

2008年6月19日输入

1.设X是 Banach 空间,$T(t)$为X上的C_0-半群,A为其生成元,证明A是闭稠定的.

2.设X是Banach空间,$A: X \supseteq D(A) \to X$为线性算子,试用Lumer---Phillips定理证明A生成C_0-压缩半群当且仅当

i)$\overline{D(A)} = X$;

ii)A, A^*均耗散.

3.设$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$为 Hilbert 空间$H$的规范正交基,$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$为一组实数.定义

$$T(t)x = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{\lambda_n t} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

证明:若$\lambda_{n+1} < \lambda_n < 0, n = 1,2,\cdots$,则$T(t)$生成解析半群.

4.设H为 Hilbert 空间,H上的C_0-半群$T(t)$

的生成元为A,证明$T(t)$指数稳定当且仅当存在正定算子$P\in L(H)$,使得

$$\langle Az,Pz\rangle+\langle Pz,Az\rangle=-\langle z,z\rangle,\ \ \forall z\in D(A)$$

5.考虑控制系统$\Sigma(A,B,-)$,定义

$$\bar{\mathcal{R}}=\left\{z\in Z;\begin{array}{c}\exists\boldsymbol{\tau}>0\ \&\ u\in L_2(0,\boldsymbol{\tau};U),\\ s.t.\ z=\int_0^\tau T(\boldsymbol{\tau}-s)Bu(s)ds\end{array}\right\}$$

证明:$\bar{\mathcal{R}}$是包含$R(B)$的最小$T(t)-$不变子空间.

6.设X是Banach空间,A是X上C_0-半群$T(t)$的生成元,$D\in L(X)$.证明:$\forall t\geq 0$,算子积分方程

$$S(t)x_0=T(t)x_0+\int_0^t T(t-s)DS(s)x_0ds,\ \ x_0\in X$$

有唯一的解$S(t)\in L(X)$.