目 录

摘 要

本文研究笛卡尔积上的拓扑学, 即拓扑性质的可积性与逆可积性. 由于投射是连续满开映射而使得大部分拓扑性质都具有逆可积性. 而对于可积性, 我们得到了连通、道路连通、$T_0,T_{1/2},T_1,T_{3/2},T_2,T_{5/2},T_{11/4},T_3,T_{7/2}$、紧致、可数紧致的可积性, 可分的连续可积性, 序列紧致、A_1,A_2 公理、可度量化的可数可积性, 局部连通、局部道路连通、局部紧致的有限可积性. 此外, 对于上述具有有限或可数可积性的拓扑性质, 我们还讨论了笛卡尔积具有该性质的等价条件. 在道路连通中, 我们引进了基本群, 证明了积空间上的基本群与各坐标空间基本群的乘积是同构的. 此外, 在证明$T_{7/2}$空间的可积性中, 我们引进了序拓扑空间, 根据粘结引理, 证明了由映入序拓扑空间的连续映射构成的集合是格, 并且结论还可以推广.

关键字: 笛卡尔积;可积性;逆可积性;连通性;分离性;紧致性;可数性;可度量性

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the topology on Cartesian product, which is the relationship of topological invariants between the coordinate space and Cartesian product. Most of the topological invariants have the reverse multipliability because of the continuity, surjectivity, and openness of projections. On multipliability, we obtained the multipliability of connectedness, path connectedness, $T_0, T_{1/2}, T_1, T_{3/2}$, $T_2, T_{5/2}, T_{11/4}, T_3, T_{7/2}$, compactness, countably compactness, and the continuously multipliability of separability, and the countably multipliability of sequentially compactness, A_1, A_2 axioms, the metrizability, and the finitely multipliability of locally connectedness, locally path connected, locally compactness. Also, we investigated the equivalent condition for the Cartesian product having the topological invariant which has countably or finitely multipliability. In path connectedness, the notion of fundamental group is introduced, and the fact that the fundamental group of Cartesian product is homomorphic to the Cartesian product of fundamental group of each coordinate is proved. Also, in $T_{7/2}$ page, the concepte of order topology is introduced, and with pasting lemma, the fact that the collection of all mappings into one order topology forms a lattice is proved, and conclusions can be fortified.

Keywords: Cartesian product; multipliability; reversely multipliability; connectedness; separability; compactness; countability;metrizabilit

第 1 章 引言

在一般拓扑书上很少涉及笛卡尔积上的拓扑学. 本文就是专门为此而写的. 我们知道拓扑学的中心任务就是研究拓扑不变性质. 而对于一族拓扑空间, 其笛卡尔积上可以定义拓扑, 一般有积拓扑和箱拓扑两种. 因为后者连最起码的函数族的对角线的连续性和各函数的连续性等价都不满足, 给研究带来很大不便, 所以本文很少研究, 一般只研究积拓扑, 看坐标空间的拓扑不变性质和笛卡尔积(相对于积拓扑而言)的同种拓扑不变性质的关系如何, 顺着, 我们叫可积性, 逆着, 我们叫逆可积性.

第 2 章给出阅读本文的预备知识, 其中包括笛卡尔积与选择公理, 拓扑空间, 连续映射. 由于大学期间的拓扑一般都覆盖了该内容, 所以一般只给出定义和定理, 并且规定了本文所通用的符号.

从第 3 章开始, 我们开始研究可积性和逆可积性. 第 3 章考虑各种连通性, 其中包括连通性, 道路连通性, 局部连通性, 局部道路连通性. 在研究过程中, 我们可以看出前两者, 后两者之间在笛卡尔积保持拓扑不变性质方面的类似性, 在道路连通性方面, 我们还引进基本群, 证明了基本群与基点无关等价于其中某点的基本群是 *Abel* 群, 而后给出了道路连通空间的笛卡尔积上的基本群与各坐标空间上的基本群之间的同构关系.

第 4 章我们研究各种分离性, 包括 $T_0, T_{1/2}, T_1, T_{3/2}, T_2, T_{5/2}, T_{11/4}, T_3, T_{7/2}, T_4, T_5, T_6$, 都是本文作者在阅读各种拓扑书上得来的. 因为本文主要研究的是可积性和逆可积性, 对于这些分离性的各种包含和不可逆关系没有考虑, 前面 9 种分离性都有很好的可积性和逆可积性, 在证明过程中充分利用了投射的性质:连续的满开映射. 这是非常要紧的, 因为开的, 其逆也连续, 连续的诸多等价定义中的包含关系都可改为等号关系. 特别要指出的是, 在 $T_{7/2}$ 的可积性方面, 我们给出了用粘结引理的方法证明连续函数空间是格. 后面 3 种分离性因为其特殊性, 均涉及闭集, 其可积性表现的很不好, 即便是逆可积性也不好, 因为投射并不是一闭映射. 作者在此给出, 一方面是因为写论文前误以为笛卡尔积上的闭集都是一族闭集的笛卡尔积, 另一方面是为分离性的完整起见.

第 5 章我们研究各种紧致性, 包括紧致性, 可数紧致性, 序列紧致性, 局部紧致性, 极限点紧性, 仿紧性. 前两种由于有限子覆盖的一样而可积性与逆可积性类似. 序列紧性由于考虑的是收敛子列的问题, 从而只有可数可积性, 这里用了著名的 *Cantor* 对角线法. 局部紧致性和前文的局部连通性, 局部道路连通性一样都是局部性质, 在可积性和逆可积性方面类似. 仿紧性与后文的 *Lindelöf* 性都由于其局限性而只有与紧性联系起来才有很好的结论.

第 6 章我们研究可数性, 给出了 A_1, A_2, 可分, *Lindelöf* 性. A_1, A_2 性质由于只是点和空间的区别而使可积性与逆可积性类似. 可分性, 与实数的势比较, 可得很好的连续可积性. 而 *Lindelöf* 性前文已说.

第 7 章我们探讨可度量性, 其是可数可积的.

第 2 章 预备知识

本章给出了以后各章所需要的预备知识, 其中包括笛卡尔积和选择公理, 拓扑空间, 连续映射. 当然还有许多应该作为预备知识而给出的, 比如关于集合的各种运算, 基数的各种性质, 群的基本理论等等. 但是因为篇幅限制, 所以到要用的时候才给出.

2.1 笛卡尔积与选择公理

一般以 $A,B,C,\cdots$ 表示集合 (set), $a,b,c,\cdots$ 表示元素 $(element)$. 由集合论公理, 给定集合 A, 可以作以 A 的子集为元素的集合, 称之为集族, 一般以 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\cdots$ 表示. 特别的, 以 X 的所有子集为元素的集合称为 X 的幂集, 记作 $\mathcal{P}(X)$. 还可以作以集族为元素的集合, 称之为族类, 一般以 $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\cdots$ 表示.

设 $\mathcal{A}$ 是一个集族, $\mathcal{A}$ 的指标函数 $(indexing\ \ function)$ 是指从某个集合 J 到 $\mathcal{A}$ 的一个满射 f, J 称为指标集 $(index\ set)$, 族 $\mathcal{A}$ 连同指标函数 f 一起称为一加标集族 $(indexed\ \ family\ of\ \ sets)$. 给定 J 中的元 α, 集合 $f(\alpha)$ 记作 A_α. 加标集族本身记作 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$. 当指标集明显时, 则简记作 $\{A_\alpha\}$.

定义 2.1.1 设 J 时一指标集, 给定一集合 X, X 中元素的一 $J-$ 重元 $(J\text{-}tuple)$ 定义为函数 $x:J\to X$. 若 $\alpha\in J$, x 在 α 处的值往往记作 x_α, 而不记作 $x(\alpha)$. 函数 x 则用符号 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 表示. X 中元素的所有 $J-$ 重元的集合记作 X^J.

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一加标集族, $X=\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$. 这个加标集族的笛卡尔积 $(cartesian\ product)$ 记成 $\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$, 定义为 X 中元素的所有 $J-$ 重元的集合, 使得对于每个 $\alpha\in J$, $x_\alpha\in A_\alpha$. 也就是说,

$$\prod_{\alpha\in J}A_\alpha=\left\{x:J\to\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha;x_\alpha\in A_\alpha\text{对每个}\alpha\in J\text{成立}\right\}$$

设 X 是一集合, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一加标集族, 关于各 $\alpha\in J$ 给以映射 $f_\alpha:X\to A_\alpha$, 定义函数族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的对角线映射 $(diagonal\ mapping)$ $f=\Delta_{\alpha\in J}f_\alpha:X\to\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$ 为 $f(x)=(f_\alpha(x))_{\alpha\in J}$. 再设 $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一与 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 有相同指标集的加标集族, 关于各 $\alpha\in J$, 给以映射 $g_\alpha:A_\alpha\to B_\alpha$, 定义函数族 $\{g_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的乘积映射 $(product\ mapping)$ $g=\prod_{\alpha\in J}g_\alpha:\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\to\prod_{\alpha\in J}B_\alpha$ 为 $g\left((x_\alpha)_{\alpha\in J}\right)=\left(g_\alpha(x_\alpha)\right)_{\alpha\in J}$. 再有第 β 个投射 $(projective\ mapping)$ $\pi_\beta:\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\to A_\beta$ 定义为 $\pi_\beta\left((x_\alpha)_{\alpha\in J}\right)=x_\beta$.

给定一集合 A, A 上的一关系 $(relation)$ 是指 $R\subset A\times A$. 如果 $\forall a\in A,aRa$, 则称 R 是自反的 $(reflexive)$; 如果 aRb 可以推出 bRa, 则称 R 是对称的 $(symmetric)$; 如果 aRb,bRa 可以推出 $a=b$, 则称 R 是反对称的 $(skew-symmetric)$; 如果

aRb, bRc 可以推出 aRc，则称 R 是传递的$(transitive)$.

定义 2.1.2 如果关系 R 是自反的，反对称的，传递的，则称 R 是偏序$(partial\ order)$，一般以 $\leq$ 示 R，而 A 也记作 $(A,\leq)$. 如果 $\forall a,b\in A, a\leq b, b\leq a$ 至少一个成立，则称 $\leq$ 是全序或线性序$(simple\ order, linear\ order)$. A 的子集 B 如果在限制序关系下是全序的，则称 B 是 A 的全序子集.

设 $(A,\leq)$ 是一偏序集，$a\in A$ 称为 A 的极小元$(minimum\ element)$，如果 $\forall x\in A, x\leq a$ 可以推出 $x=a$. 相应的，我们可以定义 A 的极大元$(maximum\ element)$. 再设 B 是 A 的全序子集，$b_0\in B$ 称为 B 的最小元$(smallest\ element)$，如果 $b\geq b_0$ 对任何 $b\in B$ 都成立. 同样可以定义 B 的最大元$(largest\ element)$. $a\in A$ 称为 B 的下界$(lower\ bound)$，如果 $b\geq a$ 对任何 $b\in B$ 都成立. 同样可以定义 B 的上界$(upper\ bound)$.

对于全序集 $(A,\leq)$，如果 A 的每个非空子集都有最小元，则称 A 是良序的$(well-ordered)$. 这时也称 $\leq$ 良序化 A.

上述关于偏序，全序 $\leq$ 的讨论中，如果记 $a<b$ 为 $a\leq b$ 且 $a\neq b$，则只要作相应的微小变化就可以同样定义全序子集，极大元，极小元，最大元，最小元，良序等等，而且下面的定理 1.1.6 也同样成立. 实际上，根据需要，我们采取的序关系是 $a\leq b$ 还是 $a<b$ 由上下文即可定出而不至于发生混乱.

定理 2.1.3（选择函数的存在性）设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一加标集族，如果 $\forall\alpha\in J$，$A_\alpha\neq\varnothing$，那么存在映射 $c:J\to\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$，使得 $\forall\alpha\in J, c(\alpha)\in A_\alpha$，即 $\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\neq\varnothing$.

定理 2.1.4（$Zorn$ 引理）如果偏序集的每个全序子集都有上界，那么此集存在一个极大元.

定理 2.1.5（$Zermelo$ 公设）如果 $\mathcal{A}$ 是一互不相交的非空集的族，那么存在一集 C，使得对每一 $A\in\mathcal{A}$，$C\cap A$ 是单点集.

定理 2.1.6（良序原理）每个集都能良序化.

这些定理的等价关系在一般的公理集合论书上都能找到，在这里就不证明了. 特别的，可以参考文献[1]，其给出了很多的证明思路，虽然很多的细节省略了.

2.2 拓扑空间

设 X 是一集合，$\mathcal{T}$ 是 X 的一子集族. 如果 $\varnothing, X\in\mathcal{T}$ 且 $\mathcal{T}$ 对有限交和任意并封闭，则称 $\mathcal{T}$ 是 X 的一拓扑$(topology)$. 如果 $\mathcal{T}$ 是 X 的一拓扑，则称 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间$(topological\ space)$. 如果 $\mathcal{T}$ 已约定或行文中已说明，则直称 X 为拓扑空间. 再者如果 $\mathcal{T}=\{\varnothing, X\}$，则称 X 是平庸的$(trivial)$；如果 $\mathcal{T}=\mathcal{P}(X)$，则称 X 是离散的$(discrete)$.

对于 $A\subset\mathcal{P}(X)$, 如果 $A\in\mathcal{T}$, 则称 A 为拓扑空间 X 的开集 $(open\ set)$; 如果 $A^c\in\mathcal{T}$, 则称 A 是拓扑空间 X 的闭集 $(closed\ set)$, X 的所有闭集构成的集族记为 $\mathcal{F}$.

对于点 $x\in X$, 集 $U\subset X$, 如果 $\exists A\in\mathcal{T}\ s.t.\ x\in A\subset U$, 则称 U 是 x 的领域 $(neighborhood)$. 如果 U 是开集(闭集), 则称 U 是 x 的开(闭)领域. x 的所有领域组成的集族记作 $\mathcal{U}_x$, 所有开领域组成的集族记作 $\mathcal{N}_x$. 同样, 可以定义子集的领域, 开领域, 闭领域.

对于集合 A, A 的闭包 $(closure)$ 定义为 $A^-=\bigcap\{F\in\mathcal{F};A\subset F\}$, 内部 $(interior)$ 定义为 $A^o=\bigcup\{U\in\mathcal{T};U\subset A\}$, 边界 $(boundary)$ 定义为 $A^b=A^-\bigcap A^{c-}$. 点 $x\in X$ 称为 A 的接触点 $(cluster\ point)$, 如果 $x\in A^-$; 称为 A 的极限点 $(limit\ point)$, 如果 $x\in\left[A-\{x\}\right]^-$, A 的极限点全体称为 A 的导集, 记作 A^d; 称为 A 的孤立点 $(isolated\ point)$, 如果 $x\in A-A^d$; 称为 A 的内点 $(interior\ point)$, 如果 $x\in A^o$; 称为 A 的边界点 $(boundary\ point)$, 如果 $x\in A^b$.

定义 2.2.1 给定拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$, $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$ 称为 X 的基 $(basis)$, 如果 $\forall U\in\mathcal{T}$, $\exists\mathcal{B}_U\subset\mathcal{B}\ s.t.\ U=\bigcup_{B\in\mathcal{B}_U}B$; $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}$ 称为 X 的子基 $(subbasis)$, 如果 $\mathcal{S}$ 的元素的有限交是 $\mathcal{T}$ 的一个基.

定理 2.2.2 设 X 是一集合, $\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(X)$. 如果 $\mathcal{B}$ 满足条件:

(1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}}B=X$;

(2) $\forall x\in B_1\bigcap B_2,\exists B\in\mathcal{B},s.t. x\in B\subset B_1\bigcap B_2$.

则存在 X 的唯一的以 $\mathcal{B}$ 为基的拓扑. 反之, 如果 $\mathcal{B}$ 是 X 的某一拓扑的基, 则 $\mathcal{B}$ 满足(1)和(2).

定理 2.2.3 设 $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ 分别是集合 X 上拓扑 $\mathcal{T},\mathcal{T}'$ 的基, 则

$$\mathcal{T}\subset\mathcal{T}'\Leftrightarrow\forall x\in X,B\in\mathcal{B}\bigcap\mathcal{N}_x,\exists B'\in\mathcal{B}'\bigcap\mathcal{N}_x'\ s.t.\ x\in B'\subset B.$$

其中 $\mathcal{N}_x,\mathcal{N}_x'$ 分别表示点 x 在拓扑空间 $(X,\mathcal{T}),(X,\mathcal{T}')$ 中开领域族.

定理 2.2.4 设 X 是一集合, $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(X)$. 如果 $X=\bigcup_{s\in\mathcal{S}}S$, 则存在 X 的唯一的以 $\mathcal{S}$ 为子基的拓扑.

定义 2.2.5 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 取 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 内所有形如 $\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$ 的子集构成的集族, 其中 U_α 是 X_α 的开集. 由定理 1.2.2, 由其生成的拓扑称为 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的箱拓扑 $(box\ topology)$.

定义 2.2.6 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, $\mathcal{S}_\beta=\left\{\pi_\beta^{-1}(U_\beta);U_\beta\text{是}X_\alpha\text{中的开集}\right\}$, $\mathcal{S}=\bigcup_{\beta\in J}\mathcal{S}_\beta$. 由定理 1.2.4, 由其生成的拓扑成为 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的积拓扑 $(product$

topology)·

由上述定义，$\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 上的箱拓扑以形如 $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ 的集合为基元素，其中 U_α 是 X_α 的开集（对于每个 α）. $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 上的积拓扑以形如 $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ 的集合为基元素，其中 U_α 是 X_α 的开集，并且除去有限多个 α 外，对于每个 α 都有 $U_\alpha = X_\alpha$.

如无特别说明，论文中对于笛卡尔积都赋以积拓扑，因其有比箱拓扑更好的性质. 当然，对于有限族的笛卡尔积，两种拓扑是一样的.

定理 2.2.7 设拓扑空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 中每个 X_α 的拓扑由基 $\mathcal{B}_\alpha$ 给出，则由形如 $\prod_{\alpha\in J} B_\alpha$ 构成的集族是 $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 上箱拓扑的一个基，其中对于每个 α，$B_\alpha\in\mathcal{B}_\alpha$.

定义 2.2.8 设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间，A 是 X 的一子集，则可以定义 A 上的相对拓扑 (*relative topology*) 为 $\mathcal{T}_A=\{A\cap U; U\in\mathcal{T}\}$.

定理 2.2.9 设对于每个 $\alpha\in J$，A_α 是 X_α 的一子空间. 则无论是箱拓扑还是积拓扑，$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ 都是 $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 的子空间.

2.3 连续映射

设 X,Y 是拓扑空间，映射 $f:X\to Y$ 称为连续的 (*continuous*)，如果对于 Y 中的每一开集 V，$f^{-1}(V)$ 是 X 的开子集.

定理 2.3.1（连续映射的等价定义） 设 X,Y 拓扑空间，$f:X\to Y$. 则下列陈述是等价的：

(1) f 连续；

(2) 对于 Y 的任一闭集 F，$f^{-1}(F)$ 是 X 的闭子集；

(3) 对于 X 的任一子集 A，有 $f(A^-)\subset[f(A)]^-$；

(4) 对于 Y 的任一子集 B，有 $f^{-1}(B^-)\supset[f^{-1}(B)]^-$.

(5) 对于任意 $x\in X$，$f(x)$ 的任意（开）领域 V，存在 x 的一（开）领域 U，使得 $f(U)\subset V$.

定理 2.3.2（连续映射的构造法则一） 设 X,Y,Z 是拓扑空间.

(1)（常值映射）若 $f:X\to Y$ 将整个 X 映成 Y 中一点 y_0，则 f 连续.

(2)（包含映射）若 A 是 X 的子空间，则包含映射 $j:A\to X$ 连续.

(3)（复合映射）若 $f:X\to Y$ 与 $g:X\to Y$ 连续，则映射 $g\circ f:X\to Z$ 连续.

(4)（限制定义域）设 $f:X\to Y$ 连续，A 是 X 的子空间，则限制函数 $f|_A:A\to Y$ 连续.

(5)(限制或扩大值域)设 $f:X\to Y$，Z 是包含象集 $f(X)$ 的子空间, 则限制 f 的值域而得到的映射 $g:X\to Z$ 也连续. 若 Z 以 Y 为其子空间, 则扩大 f 的值域而得到的映射 $h:X\to Z$ 也连续.

(6)(连续性的局部表示)若 X 可以写成一族开集 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的并, 且对任意 $\alpha\in J$，$f|_{U_\alpha}:U_\alpha\to Y$ 连续, 则 $f:X\to Y$ 连续.

(7)(粘结引理)若 X 可以写成一族有限闭集 $\{F_i\}_{i=1}^n$ 的并, 且对任意 $i\in\{1,\cdots,n\}$，$f_i:F_i\to X$ 连续, 则 $f:X\to Y$ 连续.

定理 2.3.3(连续映射的构造法则二) 设 X 是拓扑空间, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J},\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是两族具有相同指标集的拓扑空间, $\prod_{\alpha\in J}A_\alpha,\prod_{\alpha\in J}B_\alpha$ 都赋以积拓扑.

(1)对每个 $\alpha\in J$，$f_\alpha:X\to A_\alpha$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f=\Delta_{\alpha\in J}f_\alpha:X\to\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$ 连续.

等价的, 映射 $f:X\to\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$ 连续 $\Leftrightarrow\forall\alpha\in J,p_\alpha\circ f:X\to A_\alpha$ 连续.

(2)对每个 $\alpha\in J$，$f_\alpha:A_\alpha\to B_\alpha$ 连续 $\Leftrightarrow$ $f=\prod_{\alpha\in J}f_\alpha:\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\to\prod_{\alpha\in J}B_\alpha$ 连续.

(3)投射 $p_\beta:\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\to A_\beta$ 是连续的满开映射.

设 X,Y 是拓扑空间，$f:X\to Y$ 是连续的单满映射, 且 $f^{-1}:Y\to X$ 也是连续的, 则称 X,Y 同胚$(homeomorphism)$, 记作 $X\triangleq Y$，f 为从 X 到 Y 的同胚映射. 拓扑空间的某种性质 P, 如果为某一拓扑空间所具有, 则必为与其同胚的任一拓扑空间所具有, 则称此性质 P 是一拓扑不变性质$(topological\ invariant)$.

定理 2.3.4 设 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 是一族有限拓扑空间, 则 $\prod_{i=1}^n X_i\triangleq\left(\prod_{i=1}^{n-1}X_i\right)\times X_n$

证明 据定理 2.3.3(1)及(3)即得. □

更多的关于拓扑空间和连续映射的知识请见参考文献[2],[4].

第 3 章 连通性

本章主要讨论各种形式的连通性. 指出了连通性和道路连通性, 局部连通性和局部道路连通性在可积性方面的类似. 对于道路连通, 这里还给出了由其导出的等价类生成的基本群, 这是代数拓扑的内容.

3.1 连通空间

定义 3.1.1 设$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间, U,V 称为 X 的一个分裂$(separation)$, 如果$U,V\in\mathcal{T}\setminus\{\varnothing\};U\cap V=\varnothing;U\cup V=X$. X 称为不连通的$(disconnected)$, 如果存在如此之分裂. X 称为连通的$(connected)$, 如果不存在如此之分裂.

定义 3.1.2 设 X 是一拓扑空间, A 是 X 的一子集. A 称为 X 的连通子集$(connected\ subspace)$, 如果 A 作为 X 的子空间是连通的.

引理 3.1.3 设 $f:X\to Y$ 是从连通空间 X 到拓扑空间 Y 的一个连续映射, 则 $f(X)$ 是 Y 的连通子集.

引理 3.1.4 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$是由拓扑空间 X 的连通子集构成的一子集族. 如果 $\bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha\neq\varnothing$, 则$\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$ 是 X 的一连通子集.

定理 3.1.5 拓扑空间 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 连通 $\Leftrightarrow\prod_{i=1}^n X_i$ 连通.

证明 $\Leftarrow$因投射 $p_i:\prod_{i=1}^n X_i\to X_i$ 是连续的满射, X_i 是连通的.

$\Rightarrow$ 用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时显然成立. 当 $n=2$ 时, 取一点$(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$ 作 $T_x=(X\times\{x_2\})\cup(\{x\}\times Y)$, 则由引理 2.1.3 和引理 2.1.4 知, T_x 连通. 而又由 $X_1\times X_2=\bigcup_{x\in X}T_x$, 再次利用引理 3.1.4 有 $X_1\times X_2$ 连通. 假设当 $n<k\ (k\geq 3)$时成立, 我们证明 $n=k$ 时定理成立, 此时 $\prod_{i=1}^k X_i=\left(\prod_{i=1}^{k-1}X_i\right)\times X_k$, 明显的, 其连通. □

引理 3.1.6 设 A 是拓扑空间 X 的一连通子集, $A\subset B\subset A^-\subset X$, 则 B 连通.

定理 3.1.7 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$是一族拓扑空间, 则

$$\forall\alpha\in J,X_\alpha\text{连通}\Leftrightarrow\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{连通}$$

证明 取定一元$\left(x_\alpha^0\right)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 我们分三步来证明.

第一步: 设 F 是 J 的任一有限子集, X_F 表示$\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 中所有形如$(x_\alpha)_{\alpha\in J}$的元组成的集合, 其中 $x_\alpha=x_\alpha^0,\forall\alpha\in J-F$. 则 $X_F\sim\prod_{\alpha\in F}X_\alpha$ 由定理 3.1.3 知其连通.

第二步: 设 $X=\bigcup_{F\subset J,F\text{有限}} X_F$, 则 $\left(x_\alpha^0\right)_{\alpha\in J}\in X_F,\forall F\subset J,F$ 有限, 由引理 3.1.4 知 X 连通.

第三步: 我们证明 $X^-=\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 则由引理 3.1.6 知 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 连通, 得证. 任取 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 包含 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 的基元 $U=\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 其中除去有限多个 α 值(比如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$)外, $U_\alpha=X_\alpha$. 令 $F=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 及

$$y_\alpha=\begin{cases}x_\alpha, & \alpha=\alpha_1,\cdots,\alpha_n\\ x_\alpha^0, & \text{其余}\alpha\end{cases}$$

则有 $(y_\alpha)_{\alpha\in J}\in U\cap X_F\subset U\cap X$, 证毕. □

引理 3.1.8 设 X 是拓扑空间, A 是 X 的连通子集, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 X 的一族连通子集, 且 $\forall\alpha\in J, A\cap A_\alpha\neq\varnothing$. 则 $A\cup\left(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha\right)$ 连通.

证明 假设 $A\cup\left(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha\right)$ 不连通, 则存在其中非空不相交的开集 U,V, 使得 $U\cup V=A\cup\left(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha\right)$, 由 A 连通, 知 A 必包含在 U 或 V 中. 不妨设 $A\subset U$, 则由 $\forall\alpha\in J,A\cap A_\alpha\neq\varnothing$ 知 $\varnothing\neq A_\alpha\cap A\subset A_\alpha\cap U$, 同样, 由于 A_α 连通, $A_\alpha\subset U$, 而有 $A\cup\left(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha\right)\subset U$, 使得 $V=\varnothing$, 矛盾. 证毕. □

定理 3.1.9 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族连通拓扑空间, J 的势大于 1, A_α 是 X_α 的真子集, 则 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha-\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$ 连通.

证明 据定理 2.1.6 良序原理, 对 J 良序化. 我们对 $\forall\alpha\in J$ 取定 $b_\alpha\in X_\alpha-A_\alpha$, 设

$$A=\left(\prod_{\tau<\beta}\{b_\tau\}\right)\times X_\beta\times\left(\prod_{\tau>\beta}\{b_\tau\}\right),$$

$$A_{x_\beta}=\left(\prod_{\tau<\beta}X_\tau\right)\times\{x_\beta\}\times\left(\prod_{\tau>\beta}X_\tau\right),\forall x_\beta\in X_\beta-A_\beta,$$

$$\begin{aligned}Y_\beta&=\left[\left(\prod_{\tau<\beta}X_\tau\right)\times(X_\beta-A_\beta)\times\left(\prod_{\tau>\beta}X_\tau\right)\right]\cup\left[\left(\prod_{\tau<\beta}\{b_\tau\}\right)\times X_\beta\times\left(\prod_{\tau>\beta}\{b_\tau\}\right)\right]\\&=\left\{\bigcup_{x_\beta\in X_\beta-A_\beta}A_\beta\right\}\cup A\end{aligned}$$

则

$$\prod_{\alpha\in J}X_\alpha-\prod_{\alpha\in J}A_\alpha=\bigcup_{\beta\in J}Y_\beta.$$

由引理 3.1.3 和引理 3.1.8 知其连通. 证毕. □

注 1 在上述定理中应注意: J 的势大于 1 这个条件是不可或缺的, 若不然, 取 $J=\{1\}$, $X=\mathbb{R}$, $A=[-1,1]$, 但 $\mathbb{R}-A=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 不连通.

注 2 由上述定理可以得到很多漂亮的结论, 比如: $\mathbb{R}^n\,(n\geq 2)$ 中除去某些有理

点(坐标全是有理数的点)后得到的集仍然是连通的. 特别的, $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 是连通的.

对于拓扑空间 X 中的关系: $x\sim_c y\Leftrightarrow\exists$连通子集同时包含$x,y$. 由引理 3.1.4 知, 其为等价关系. 由 x 确定的等价类记作 $[x]_p=\{y\in X;y\sim_c x\}$, 称作 X 的一连通分支$($*connected component*$)$.

定理 3.1.10 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, $\left\{A_\beta^{(\alpha)}\right\}$ 是 X_α 的连通分支全体, 则 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 中所有形如 $\prod_{\alpha\in J}A_\beta^{(\alpha)}$ 构成的子集族 $\mathcal{C}$ 是 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的连通分支全体.

证明 明显的, $\bigcup\mathcal{C}=X$ 且 $\mathcal{C}$ 是互不相交的集族. 由定理 3.1.7 知各 $\prod_{\alpha\in J}A_\beta^{(\alpha)}$ 是连通的. 对于每一 $\mathcal{C}$ 中元 $\prod_{\alpha\in J}A_{\beta^*}^{(\alpha)}$, 取定其中一点 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$, 对于任何 $(y_\alpha)_{\alpha\in J}$ $\notin\prod_{\alpha\in J}A_{\beta^*}^{(\alpha)}$, 存在 $\alpha'\in J$, 使得 $y_\alpha\notin A_{\beta^*}^{(\alpha')}$, 从而由连通分支的定义, 不存在同时包含 $x_{\alpha'},y_{\alpha'}$ 的连通子集, 从而据投射的连续性及引理 3.1.3, 也不存在同时包含 $(x_\alpha)_{\alpha\in J},(y_\alpha)_{\alpha\in J}$ 的连通子集, $\prod_{\alpha\in J}A_{\beta^*}^{(\alpha)}$ 是连通分支. □

3.2 道路连通空间

设 X 是拓扑空间, X 上的一条道路$($*path*$)$, 是指一连续映射 $p:[0,1]\to X$, $p(0),p(1)$ 分别称为这条道路的起点$($*start point*$)$, 终点$($*end point*$)$, p 也就称为从 $p(0)$ 到 $p(1)$ 的一条道路. X 上的所有道路记为 $C([0,1],X)$. 如果对于 X 中任意两点 x,y, 都存在一条从 x 到 y 的道路, 我们就称 X 是道路连通的$($*path connected*$)$. 如果 A 作为 X 的子集是道路连通的, 则称 A 是 X 的道路连通子集.

对于 X 中的两条道路 $f,g:[0,1]\to X$, 如果 $f(1)=g(0)$, 我们可以定义道路的复合 $f*g:[0,1]\to X$ 为

$$(f*g)(x)=\begin{cases}f(2x), & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ g(2x-1), & x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

由定理 2.3.2(7) 知该定义是完全确定的, 其是从 $f(0)$ 到 $g(1)$ 的一条道路.

引理 3.2.1 设 $f:X\to Y$ 是从道路连通空间 X 到拓扑空间 Y 的一个连续映射, 则 $f(X)$ 是 Y 的道路连通子集.

定理 3.2.2 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间. 则

$$\forall\alpha\in J,X_\alpha\text{道路连通}\Leftrightarrow\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{道路连通}$$

证明 $\Leftarrow$ 由投射是连续及引理 3.2.1 即知.

$\Rightarrow$ 对于 $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 中任意两点 $(x_\alpha)_{\alpha\in J},(y_\alpha)_{\alpha\in J}$，由 $\forall\alpha\in J, X_\alpha$ 连通, 存在连续映射 $f_\alpha:[0,1]\to X_\alpha$ 使得 $f_\alpha(0)=x_\alpha, f_\alpha(1)=y_\alpha$. 作对角线映射 $f=\Delta_{\alpha\in J} f_\alpha:[0,1]\to\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$，则 $f(0)=(x_\alpha)_{\alpha\in J}, f(1)=(y_\alpha)_{\alpha\in J}$. 由定理 2.3.3 知 f 连续. 证毕. □

定理 3.2.3 设 X 是拓扑空间, A 是 X 的道路连通子集, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是 X 的一族道路连通子集, 且 $\forall\alpha\in J, A\cap A_\alpha\neq\varnothing$. 则 $A\cup\left(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha\right)$ 道路连通.

证明 对于 $A\cup\left(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha\right)$ 中任意两点 x_1,x_2，分三种情况:

(1) x_1,x_2 同时属于 A 或者某个 A_α，则由 A 是道路连通的, 知存在从 x_1 到 x_2 的一条道路;

(2) x_1 属于 A，x_2 属于某个 A_α，则由 $A\cap A_\alpha\neq\varnothing$ 知, 存在 $x\in A\cap A_\alpha$，由 A 是道路连通的, 存在连续映射 $f:[0,1]\to A$，使得 $f(0)=x_0, f(1)=x$；由 A_α 是道路连通的, 存在连续映射 $g:[0,1]\to A$ 使得 $g(0)=x, g(1)=x_1$. 作

$$h=f*g:[0,1]\to A\cup\left(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha\right)$$

即是从 x_1 到 x_2 的一条道路.

(3) $x_1\in A_\alpha, x_2\in A_\beta\,(\alpha\neq\beta)$，则由 $A\cap A_\alpha\neq\varnothing,\forall\alpha\in J$ 知, 存在 $x\in A\cap A_\alpha$，$y\in A\cap A_\beta$. 由 $A,\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的道路连通性, 存在从 x_0 到 x 的道路 f_1，从 x 到 y 的道路 f，从 y 到 x_2 的道路 f_2. 作

$$g=(f_1*f)*f_2:[0,1]\to A\cup\left(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha\right)$$

即是从 x_1 到 x_2 的一条道路. □

定理 3.2.4 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族道路连通拓扑空间, J 的势大于 1, A_α 是 X_α 的真子集, 则 $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha-\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ 道路连通.

证明 与定理 3.1.9 证明完全类似. 利用定理 3.2.2 和定理 3.2.3 即有. □

注 与定理 3.1.9 一样, 应注意 J 的势大于 1 不能省略. 而其注 2 的结论在此也成立.

同样的, 可以讨论拓扑空间 X 的关系 $x\sim_p y\Leftrightarrow\exists$道路连通子集同时包含$x,y$. 其为等价关系, x 所在的等价类记作 $[x]_{p.c.}$，称作是 X 的一道路连通分支 (*path connected component*). 与定理 3.1.10 类似, 我们有:

定理 3.2.5 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, $\left\{A_\beta^{(\alpha)}\right\}$ 是 X_α 的道路连通分支全体, 则 $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 中所有形如 $\prod_{\alpha\in J} A_\beta^{(\alpha)}$ 构成的子集族 $\mathcal{C}$ 是 $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ 的道路连通分支全体.

3.3 基本群

先复习一下有关群论的知识. 设在非空集合 G 上定义了一二元运算 $(binary\ operation)$ $\varphi: G\times G\to G$, $\varphi(a,b)$ 记作 ab 或 $a\bullet b$, 满足 (1) 结合律: $\forall a,b,c\in G$, 有 $(ab)c=a(bc)$; (2) 单位元的存在性: $\exists e\in G$, 使得 $\forall a\in G, ea=ae=a, e$ 叫做单位元; (3) 逆元的存在性: $\forall a\in G, \exists b\in G, s.t. ab=ba=e$, b 称为 a 的逆元, 记作 a^{-1}. 则 $(G,\bullet)$ 为群 $(group)$, 简记为 G. "$\bullet$" 称为 G 上的乘法. 群 G 称为 $Abel$ 群, 如果其还满足交换律: $\forall a,b\in G, ab=ba$. 对于两个群.

对于一族群 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$, 在 $\prod_{\alpha\in J} G_\alpha$ 可以定义二元运算, 也称作乘法 $\bullet$, 为

$$(x_\alpha)_{\alpha\in J}\bullet(y_\alpha)_{\alpha\in J}=(x_\alpha\bullet y_\alpha)_{\alpha\in J},$$

其满足群的三条公理, 而成为群.

对于两个群 G_1,G_2, 如果存在映射 $h: G_1\to G_2$ 使得对任意的 $a,b\in G_1$, 都有 $h(ab)=h(a)h(b)$, 则称 G_1,G_2 是同态的 $(homomorphism)$, 记作 $G_1\approx G_2$ h 称为同态映射. 再如果 h 是单满的, 则称 G_1,G_2 是同构的 $(isomorphism)$, 记作 $G_1\cong G_2$, h 称为同构映射.

定理 3.3.1 设 G 是一群, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族群, 则

$$\forall\alpha\in J, G\approx G_\alpha \Leftrightarrow G\approx\prod_{\alpha\in J} G_\alpha$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $h_\alpha: G\to G_\alpha$ 是同态映射, 作 $h: G\to\prod_{\alpha\in J} G_\alpha$ 为 $h(x)=(h_\alpha(x))_{\alpha\in J}$, 其为同态, 因为

$$h(xy)=(h_\alpha(xy))_{\alpha\in J}=(h_\alpha(x)h_\alpha(y))_{\alpha\in J}=(h_\alpha(x))_{\alpha\in J}(h_\alpha(y))_{\alpha\in J}=h(x)h(y).$$

$\Leftarrow$ 设 $h: G\to\prod_{\alpha\in J} G_\alpha$ 为同态映射, 对 $\forall\alpha\in J$, 作映射 $h_\alpha: G\to G_\alpha$ 为 $h_\alpha(x)=(p_\alpha\circ h)(x)$, 同样的, 其为同态, 因为

$$h_\alpha(xy)=(p_\alpha\circ h)(xy)=p_\alpha(h(xy))=p_\alpha(h(x)h(y))=p_\alpha(h(x))p_\alpha(h(y))=h(x)h(y)$$

得证. □

注 上述定理不可以推广到同构上去. 读者可以自己举例说明.

下面我们根据上节中道路的复合及其道路的等价类来构造基本群.

定义 3.3.2 设 X 是拓扑空间, f, f' 是 X 上的两条道路. 如果 f, f' 都以 x_0 为起点, x_1 为终点并且存在一连续映射 $F: I\times I\to X$, 使得对 $\forall s,t\in I$, 都有

$$F(s,0)=f(s), F(s,1)=f'(s);$$
$$F(0,t)=x_0, F(1,t)=x_1.$$

则称 f, f' 是道路同伦的 $(path\ homotopic)$, F 称为 f, f' 之间的一个道路同伦 $(path\ homotopy)$. 若 f, f' 是道路同伦的, 则记为 $f\simeq_p f'$.

明显的，X 上的道路的道路同伦关系是等价关系，道路 f 所在的等价类记为 $[f]$，称之为 X 上的一道路同伦类. 与上节类似，可以定义 $[f]*[g]=[f*g]$，这是完全确定的，如果 $f(1)=g(0)$.

引理 3.3.3 道路同伦类之间的运算$*$满足下列性质:

(1) 结合律：如果 $[f]*([g]*[h])$ 有定义，则 $([f]*[g])*[h]$ 也有定义，并且它们相等.

(2) 右单位元和左单位元的存在性：给定 $x\in X$，令 $e_x:[0,1]\to X$ 表示将 $[0,1]$ 变为点 x 的常值道路. 若 f 是 X 中从 x_0 到 x_1 的一条道路，则

$$[f]*[e_{x_1}]=[f],[e_{x_0}]*[f]=[f].$$

(3) 逆元的存在性：给定 X 中从 x_0 到 x_1 的道路 f，由 $f^-(s)=f(1-s)$ 定义的道路 f^- 称为 f 的逆，则 $[f]*[f^-]=[e_{x_0}],[f^-]*[f]=[e_{x_1}]$.

证明 见参考文献[3]. □

在引理 3.3.2 中，我们注意到，如果是对 X 中以某一固定点 x_0 为起点和终点的道路同伦类作复合，我们得到的就是一个群的运算. 该道路同伦类就称为 X 的以 x_0 为基点(*base point*)的基本群(*fundamental group*)，记作 $\pi_1(X,x_0)$.

引理 3.3.4 若空间 X 是道路连通的，$x_0,x_1\in X$，则 $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(X,x_1)$.

证明：由 X 是道路连通的，存一条从 x_0 到 x_1 的道路 α，由其我们定义 $\alpha^\wedge:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_1)$ 为 $\forall[f]\in\pi_1(X,x_0)$，有 $\alpha^\wedge([f])=[\alpha^-]*[f]*[\alpha]$. 明显的，该映射是完全确定的，且是单满的同态. □

由上述引理，道路连通空间 X 中所有的基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 都是同构的，但是不同的道路可以给出两个群之间不同的同构. 因此忽略基点，而将所有的基本群等同起来是回导致差错的. 一般的，我们有下面的定理：

定理 3.3.5 设 x_0,x_1 是道路连通空间 X 中给定的两个点. 则

$$\pi_1(X,x_0)\text{是}Abel\text{群}\Leftrightarrow\text{任意两条从}x_0\text{到}x_1\text{的道路}\alpha,\beta,\alpha^\wedge=\beta^\wedge.$$

证明 $\Rightarrow\forall[f]\in\pi_1(X,x_0)$，由于 $\beta*\alpha^-$ 是从 x_0 到 x_0 的道路，这样的道路叫做回路(*loop*)，所以由 $\pi_1(X,x_0)$是$Abel$群 知

$$[f]*([\beta]*[\alpha^-])=([\beta]*[\alpha^-])*[f]$$

两边左乘 $[\beta^-]$，右乘 $[\alpha]$，即得 $\alpha^\wedge([f])=\beta^\wedge([f])$. 而有 $\alpha^\wedge=\beta^\wedge$.

$\Leftarrow$ 由 X 是道路连通的，存在一条从 x_0 到 x_1 的道路 α. $\forall[f],[g]\in\pi_1(X,x_0)$，$f*\alpha$ 也是从 x_0 到 x_1 的道路，而由假设有 $\alpha^\wedge([g])=(f*\alpha)^\wedge([g])$，即

$$\left[\alpha^{-}\right]*[g]*[\alpha]=\left[\alpha^{-}\right]*\left[f^{-}\right]*[g]*[f]*[\alpha]$$

两边左乘$[f]*[\alpha]$, 右乘$\left[\alpha^{-}\right]$, 得$[f]*[g]=[g]*[f]$. 而有$\pi_1(X,x_0)$是$Abel$群. □

设X,Y是拓扑空间, $h:X\to Y$是连续的, 且将$x_0\in X$映为$y_0\in Y$. 这个事实我们简记为$h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$. 对此我们有:

定义 3.3.6 设$h:(X,x_0)\to(Y,y_0)$是一连续映射, 定义

$$h_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$$

为$h_*([f])=[h\circ f]$. 映射h_*称为h(相对于基点x_0而言)的诱导同态.

该定义是完全确定的, 因为对$\forall f,g\in C([0,1],X)$且$f(1)=g(0)$, 有$h\circ(f*g)=(h\circ f)*(h\circ g)$.

定理 3.3.7 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$是一族道路连通拓扑空间, $(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 则

$$\pi_1\left(\prod_{\alpha\in J}X_\alpha,(x_\alpha)_{\alpha\in J}\right)\cong\prod_{\alpha\in J}\pi_1(X_\alpha,x_\alpha)$$

证明 为简单起见, 我们设$X=\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, $x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}$. 由定理 3.2.2 知$X$是道路连通的, 再由上述关于基本群的叙述, $\pi_1(X,x)$确实为一群.

设$p_\beta:X\to X_\beta$是第β个投射, 由其诱导的同态为$p_{\beta*}:\pi_1(X,x)\to\pi_1(X_\beta,x_\beta)$. 由定理 3.3.1 知, 可以定义同态$H:(X,x)\to\prod_{\alpha\in J}\pi_1(X_\alpha,x_\alpha)$为

$$H([f])=\prod_{\beta\in J}p_{\beta*}([f])=\prod_{\beta\in J}\left[p_\beta\circ f\right]$$

下面我们仅需证明H是单满的.

(1) 单的: 只要证明单位元的逆象是单点集. 设$f:[0,1]\to X$是以x为基点的道路, 且$H([f])=\prod_{\beta\in J}\left[p_\beta\circ f\right]$是$\prod_{\alpha\in J}\pi_1(X_\alpha,x_\alpha)$中的单位元, 则$\forall\beta\in J$, $p_\beta\circ f\simeq_p e_{x_\beta}$, 设$F_\beta$是对应的道路同伦, 则我们可以定义$F:[0,1]\times[0,1]\to X$为

$$F(s,t)=\prod_{\beta\in J}F_\beta(s,t),$$

其为f和e_x的道路同伦.

(2) 满的: $\forall\beta\in J$, 设$f_\beta:[0,1]\to X_\beta$是X_β中以x_β为基点的道路. 我们就是要证明$\prod_{\beta\in J}f_\beta$在$H$的象集上. 定义$f:[0,1]\to X$为

$$f(s)=\prod_{\beta\in J}f_\beta(s)$$

则f是X中以x基点的道路, 且

$$H([f])=\prod_{\beta\in J}\left[p_\beta\circ f\right]=\prod_{\beta\in J}\left[f_\beta\right]. \square$$

3.4 局部连通空间和局部道路连通空间

定义 3.4.1 设 X 是拓扑空间, 如果

$$\forall x\in X, U\in\mathcal{N}(x), \exists \text{连通} V\in\mathcal{N}(x), s.t.\, x\in V\subset U$$

则称 X 是局部连通的(*locally connected*). 而如果

$$\forall x\in X, U\in\mathcal{N}(x), \exists \text{道路连通} V\in\mathcal{N}(x), s.t.\, x\in V\subset U$$

则称 X 是局部道路连通的(*locally path connected*).

引理 3.4.2 设 X,Y 是拓扑空间, $f:X\to Y$ 是连续开映射, 则

(1) 如果 X 是局部连通的, 则 $f(X)$ 是 Y 的局部连通子集.

(2) 如果 X 是局部道路连通的, 则 $f(X)$ 是 Y 的局部道路连通子集.

定理 3.4.3 设 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 是一族有限拓扑空间, 则

$$\forall i\in\{1,\cdots,n\}, X_i \text{局部连通} \Leftrightarrow \prod_{i=1}^n X_i \text{局部连通}.$$

证明 同定理 2.1.5, 我们只要证明两个的情形.

$\Leftarrow$ 由投射是连续的开映射及引理 2.4.2 即知.

$\Rightarrow$ $\forall x_1\times x_2\in X_1\times X_2$, 由 $X_1\times X_2$ 的局部连通性, $\forall U_1\in\mathcal{N}(x_1), U_2\in\mathcal{N}(x_2)$,

$U_1\times U_2\in\mathcal{N}(x_1\times x_2)$, $\exists$连通$V_1\in\mathcal{N}(x_1), V_2\in\mathcal{N}(x_2), s.t. x_1\times x_2\in V_1\times V_2\subset U_1\times U_2$. 于是$V_1\times V_2\in\mathcal{N}(x_1\times x_2)$且 $x_1\times x_2\in V_1\times V_2\subset U_1\times U_2$. 得证. □

定理 3.4.4 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\prod_{\alpha\in J} X_\alpha \text{局部连通} \Leftrightarrow \forall\alpha\in J, X_\alpha \text{局部连通且} \exists F\subset J \text{有限} s.t. \forall\alpha\in J\setminus F, X_\alpha \text{连通}.$$

证明 $\Rightarrow$ 由投射的连续性及引理 2.4.2 知 $\forall\alpha\in J, X_\alpha$局部连通. 又 $\forall(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ $\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 存在包含 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 的连通开集 U 使得 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in U\subset\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 而由 U 为开集, 又存在基元 $\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 其中除有限多个(比如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$)外, $U_\alpha=X_\alpha$, 使得 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\subset U\subset\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 这样, 令 $F=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 有 $\forall\alpha\in J\setminus F$,

$$U_\alpha=X_\alpha\subset p_\alpha(U)\subset X_\alpha,$$

从而由 U 的连通性知 $U_\alpha=p_\alpha(U)$ 连通.

$\Leftarrow$ $\forall(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 及其一开领域 U, 存在基元 $\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 其中除有限多个 α 值(比如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$)外, $U_\alpha=X_\alpha$, 使得 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\subset U$. 由 $\forall\alpha\in J$, X_α 局部连通, 设 $K=F\bigcup\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, 则 $\forall\alpha\in K$, 存在连通子集 V_α, 使得 $x_\alpha\in V_\alpha\subset U_\alpha$. 这样, $\prod_{\alpha\in J}V_\alpha$, 其中

$$V_\alpha=\begin{cases}V_\alpha, & \alpha\in K\\ X_\alpha, & \alpha\in J\setminus K\end{cases}$$

是包含$\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}$的, 包含于$\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$的连通基元. □

定理 3.4.5 设$\left\{X_i\right\}_{i=1}^n$是一族有限拓扑空间, 则

$$\forall i\in\left\{1,\cdots,n\right\}, X_i\text{局部道路连通}\Leftrightarrow\prod_{i=1}^n X_i\text{局部道路连通}.$$

定理 3.4.6 设$\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in J}$是一族拓扑空间, 则

$$\begin{aligned}\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{局部连通}\Leftrightarrow&\forall\alpha\in J, X_\alpha\text{局部道路连通}\\ &\text{且}\exists F\subset J\text{有限}s.t.\forall\alpha\in J\setminus F, X_\alpha\text{道路连通}.\end{aligned}$$

注 定理 3.4.5 和定理 3.4.6 的证明分别与定理 3.4.3 和定理 3.4.4 的证明类似.

第 4 章 分离性

一般点集拓扑书(比如[2])都有关于分离公理的讨论,但是都不是很全面.这里综合参考文献[2],[3],[4],[5]中所出现的分离公理

$$T_6 \to T_5 \to T_4 \to T_{7/2} \to T_3 \to T_{11/4} \to T_{5/2} \to T_2 \to T_{3/2} \to T_1 \to T_{1/2} \to T_0$$

进行可积性的讨论.当然由于T_5,T_6的特殊性,这里只给出定义,而让其可积性的讨论留给读者.

4.1 $T_0,T_1,T_2,T_{5/2},T_3$空间

定义 4.1.1 设$(X,\mathcal{T})$拓扑空间,其闭集全体记作$\mathcal{F}$,则

(1)如果$\forall x,y\in X,x\neq y,\exists U\in\mathcal{N}(x),s.t.y\notin U$或者$\exists V\in\mathcal{N}(y),s.t.x\notin(y)$,则称$X$是$T_0$的;

(2)如果$\forall x,y\in X,x\neq y,\exists U\in\mathcal{N}(x),V\in\mathcal{N}(x),s.t.x\notin\mathcal{N}(y)$且$y\notin\mathcal{N}(x)$,则称$X$是$T_1$的;

(3)如果$\forall x,y\in X,x\neq y,\exists U\in\mathcal{N}(x),V\in\mathcal{N}(x),s.t.U\cap V=\varnothing$,则称$X$是$T_2$的,或者*Hausdorff* 的;

(4)如果$\forall x,y\in X,x\neq y,\exists U\in\mathcal{N}(x),V\in\mathcal{N}(x),s.t.U^-\cap V^-=\varnothing$,则称$X$是$T_{5/2}$的.

(5)如果$\forall x\in X,F\in\mathcal{F},x\notin F,\exists U\in\mathcal{N}(x),V\in\mathcal{N}(F),s.t.U\cap V=\varnothing$,则称$X$是正则的,如果$X$还是$T_1$的,则称$X$是$T_3$的.

定理 4.1.2 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$是一族拓扑空间,则

$$\forall\alpha\in J,X_\alpha\text{是}T_0(T_1,T_2)\text{的}\Leftrightarrow\prod\nolimits_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是}T_0(T_1,T_2)\text{的}.$$

证明 我们只证关于T_0的,其他(T_1,T_2)的可类似而证.

$\Rightarrow$设$(x_\alpha)_{\alpha\in J},(y_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod\nolimits_{\alpha\in J}X_\alpha$,$(x_\alpha)_{\alpha\in J}\neq(y_\alpha)_{\alpha\in J}$,则至少存在一个$\beta\in J$,使得$x_\beta\neq y_\beta$,从而由$X_\beta$是$T_0$的,存在$x_\beta$的开领域$U_\beta$使得$y_\beta\notin U_\beta$或者存在$y_\beta$的开领域$V_\beta$使得$x_\beta\notin V_\beta$.对于第一种情形,我们作$U=p_\beta^{-1}(U_\beta)$,有$U$是$(x_\alpha)_{\alpha\in J}$的开领域,$(y_\alpha)_{\alpha\in J}\notin U$,因为至少$y_\beta\notin p_\beta(U)=U_\beta$;对于第二种情形,我们作$V=p_\beta^{-1}(V_\beta)$,同样有$V$是$(y_\alpha)_{\alpha\in J}$的开领域,$(x_\alpha)_{\alpha\in J}\notin V$.

$\Leftarrow\forall\alpha\in J,x_\alpha,y_\alpha\in X_\alpha,x_\alpha\neq y_\alpha$对$\forall\gamma\in J,\gamma\neq\alpha$,取$x_\gamma^0\in X_\gamma$.则$(x_\gamma)_{\gamma\in J},(y_\gamma)_{\gamma\in J}$

$\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, $\left(x_\gamma\right)_{\gamma\in J}\neq\left(y_\gamma\right)_{\gamma\in J}$, 其中

$$x_\gamma=\begin{cases}x_\alpha, & \gamma=\alpha\\ x_\gamma^0, & \gamma\neq\alpha\end{cases}, y_\gamma=\begin{cases}y_\alpha, & \gamma=\alpha\\ x_\gamma^0, & \gamma\neq\alpha\end{cases}$$

这样, 由$\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的T_0 性, 存在$\left(x_\gamma\right)_{\gamma\in J}$ 的开领域U, 使得$\left(y_\gamma\right)_{\gamma\in J}\notin U$ 或者存在$\left(y_\gamma\right)_{\gamma\in J}$ 的开领域V, 使得$\left(x_\gamma\right)_{\gamma\in J}\notin V$. 同必要性一样, 我们仅讨论第一种情形, 由于 U 是开的, 存在基元 $\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 使得 $\left(x_\gamma\right)_{\gamma\in J}\in\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\subset U$. 既然 $\left(y_\gamma\right)_{\gamma\in J}\notin U$, $\left(y_\gamma\right)_{\gamma\in J}\notin\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 但是对于所有的$\gamma\neq\alpha, y_\gamma=x_\gamma^0=x_\gamma\in U_\gamma$, 故而只能$y_\alpha\notin U_\alpha$. 即得证. □

引理 4.1.3 设$\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, $\forall\alpha\in J, A_\alpha\subset X_\alpha$, 则

$$\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\right)^-=\prod_{\alpha\in J}A_\alpha^-$$

证明 $\forall x=\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}\in\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\right)^-$, 我们证明$x\in\prod_{\alpha\in J}A_\alpha^-$, 即$\forall\alpha\in J, x_\alpha\in A_\alpha^-$. 任一$x_\alpha$ 的开领域U_α, $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 是包含x 的基元, 从而 $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\cap\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\right)\neq\varnothing$, 用$p_\alpha$ 作用, 有$U_\alpha\cap A_\alpha\neq\varnothing$.

$\forall x=\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}A_\alpha^-$, 我们证明 $x\in\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\right)^-$. 任一包含 x 的基元 $\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 由于$\forall\alpha\in J, x_\alpha\in A_\alpha^-$, 我们有$U_\alpha\cap A_\alpha\neq\varnothing$, 从而由选择公理,

$$\left(\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\right)\cap\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\right)=\prod_{\alpha\in J}\left(U_\alpha\cap A_\alpha\right)\neq\varnothing. \square$$

注 上述结论对箱拓扑也成立.

推论 4.1.4 设$\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\subset\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是闭集}\Leftrightarrow\forall\alpha\in J, A_\alpha\subset X_\alpha\text{是闭集}.$$

证明 由引理 4.1.3 有$\prod_{\alpha\in J}A_\alpha^-=\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\right)^-=\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$ 即得. □

注 千万不要以为$\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的闭集都是形如$\prod_{\alpha\in J}A_\alpha$, 其中$\forall\alpha\in J, A_\alpha$ 是闭集.

定理 4.1.5 设$\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\forall\alpha\in J, X_\alpha\text{是}T_{5/2}\text{的}\Leftrightarrow\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是}T_{5/2}\text{的}.$$

证明: $\Rightarrow$ 设 $\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}, \left(y_\alpha\right)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, $\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}\neq\left(y_\alpha\right)_{\alpha\in J}$, 则至少存在一个$\beta\in J$, 使得$x_\beta\neq y_\beta$, 从而由$X_\beta$ 是$T_{2\frac{1}{2}}$ 的, 存在x_β 的开领域U_β, y_β 的开领域V_β, 使得 $U_\beta^-\cap V_\beta^-=\varnothing$. 作 $U=p_\beta^{-1}\left(U_\beta\right), V=p_\beta^{-1}\left(V_\beta\right)$, 则 U 是 $\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}$ 的开领域, V 是

$\left(y_\alpha\right)_{\alpha\in J}$ 是开领域, 且 $U^-\cap V^-=\left[p_\beta^{-1}\left(U_\beta\right)\right]^-\cap\left[p_\beta^{-1}\left(V_\beta\right)\right]^-=p_\beta^{-1}\left(U_\beta^-\right)\cap p_\beta^{-1}\left(V_\beta^-\right)=$ $p_\beta^{-1}\left(U_\beta^-\cap V_\beta^-\right)=p_\beta^{-1}(\varnothing)=\varnothing$. 这里, 第二个等号是因为 p_β 是开的连续映射, 第三个等式是因为逆函数的基本性质.

$\Leftarrow \forall\alpha\in J$, 取点 $\left(x_\alpha^0\right)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 我们证明 X_α 是 $T_{2\frac{1}{2}}$ 的. $\forall x_\alpha,y_\alpha\in X_\alpha,x_\alpha\neq y_\alpha$, 作 $x=\left(x_\gamma\right)_{\gamma\in J},y=\left(y_\gamma\right)_{\gamma\in J}$, 其中

$$x_\gamma=\begin{cases}x_\alpha, & \gamma=\alpha\\ x_\gamma^0, & \gamma\neq\alpha\end{cases};y_\gamma=\begin{cases}y_\alpha, & \gamma=\alpha\\ x_\gamma^0, & \gamma\neq\alpha\end{cases}$$

则 $x,y\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha,x\neq y$, 由 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的 $T_{2\frac{1}{2}}$ 性, 存在包含 x 的基元 $U=\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 包含 y 的基元 $V=\prod_{\alpha\in J}V_\alpha$, 使得 $U^-\cap V^-=\left(\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\right)^-\cap\left(\prod_{\alpha\in J}V_\alpha\right)^-$ $=\left(\prod_{\alpha\in J}U_\alpha^-\right)\cap\left(\prod_{\alpha\in J}V_\alpha^-\right)=\prod_{\alpha\in J}\left(U_\alpha^-\cap V_\alpha^-\right)=\varnothing$. 从而由定理 2. 1. 3 及其 $\forall\gamma\neq\alpha$, $x_\gamma^0\in U_\alpha\cap V_\alpha\subset U_\alpha^-\cap V_\alpha^-$ 知道 $U_\alpha^-\cap V_\alpha^-=\varnothing$. □

引理 4. 1. 6 设 X 是拓扑空间, 则下列陈述是等价的.

(1) X 是正则的;

(2) $\forall x\in X,U\in\mathcal{N}(x),\exists V\in\mathcal{N}(x),s.t.x\in V\subset V^-\subset U$.

定理 4. 1. 7 设 $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\forall\alpha\in J,X_\alpha\text{是}T_3\text{的}\Leftrightarrow\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是}T_3\text{的}$$

证明 $\Rightarrow\forall x=\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}$, $\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\in\mathcal{N}(x)$, 其中除去有限个 α 值外, $U_\alpha=X_\alpha$. 令 $F=\left\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\right\}$, 对任意的 $\alpha\in F$, 由于 X_α 是正则的, 存在 X_α 的开集 V_α, 使得 $x_\alpha\in V_\alpha\subset V_\alpha^-\subset U_\alpha$. 作 $\prod_{\alpha\in J}V_\alpha\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 如下:

$$V_\alpha=\begin{cases}V_\alpha, & \alpha\in F\\ X_\alpha, & \alpha\in J\setminus F\end{cases}$$

则明显的, $x=\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}V_\alpha\subset\left(\prod_{\alpha\in J}V_\alpha\right)^-=\prod_{\alpha\in J}V_\alpha^-\subset\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$.

而由定理 4. 1. 2 知 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 是 T_1 的, 于是 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 是 T_3 的.

$\Leftarrow\forall\beta\in J$, 我们证明 X_β 是 T_3 的. 显然 X_β 是 T_1 的, 现证 X_β 是正则的. 先取定 $\left(x_\alpha^0\right)_{\alpha\in J}$, 任意的 $x_\beta\in X_\beta$, 不包含 x_β 的闭集 F_β, 我们作点 $\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}$, 闭集 $\prod_{\alpha\in J}F_\alpha$ 如下:

$$x_\alpha=\begin{cases}x_\beta, & \alpha=\beta\\ x_\alpha^0, & \alpha\neq\beta\end{cases};F_\alpha=\begin{cases}F_\beta, & \alpha=\beta\\ X_\alpha, & \alpha\neq\beta\end{cases}$$

则 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}F_\alpha$，由 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的 T_3 性, 我们可以作包含 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 的基元 $\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$ 和包含 $\prod_{\alpha\in J}F_\alpha$ 的基元 $\prod_{\alpha\in J}V_\alpha$ 使得 $\left(\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\right)\cap\left(\prod_{\alpha\in J}V_\alpha\right)_{\alpha\in J}=\varnothing$. 此时, 必有 $U_\beta\cap V_\beta=\varnothing$, 且 $U_\beta\in\mathcal{N}(x_\beta), V_\beta\in\mathcal{N}(F_\beta)$. □

4.2 $T_{1/2},T_{3/2}$ 空间

定义 4.2.1 设 X 是拓扑空间,

(1) 如果 $\forall A\subset X, A^d$ 是闭集, 则称 X 是 $T_{1/2}$ 的;

(2) 如果 X 中任一收敛序列有唯一的极限, 则称 X 是 $T_{3/2}$ 的.

引理 4.2.2 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, $A_\alpha\subset X_\alpha$, 则

$$\prod_{\alpha\in J}A_\alpha^d=\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\right)^d$$

证明 $\forall(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}A_\alpha^d$，我们证明 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\right)^d$. 任意的包含 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 的基元 $\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 其中除去有限多个 α 值(比如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$)外, $U_\alpha=X_\alpha$. 令 $F=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, 对任意的 $\alpha\in K$, 由于 $x_\alpha\in A_\alpha^d$, 存在 $y_\alpha\in U_\alpha\cap\left(A_\alpha-\{x_\alpha\}\right)$. 对任意的 $\alpha\in J\setminus F$, 任取 $y_\alpha\in A_\alpha$, 我们有 $(y_\alpha)_{\alpha\in J}\in\left(\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\right)\cap\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha-(x_\alpha)_{\alpha\in J}\right)$, 得证.

$\forall(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\right)^d$, 我们证明 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}A_\alpha^d$, 即是 $\forall\alpha\in J, x_\alpha\in A_\alpha^d$. 任意 x_α 的领域 U_α，$p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 是包含 $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ 的开领域, 存在 $(y_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 使得 $(y_\alpha)_{\alpha\in J}\in p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\cap\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha-(x_\alpha)_{\alpha\in J}\right)$, 从而 $y_\alpha\in U_\alpha\cap\left(A_\alpha-\{x_\alpha\}\right)$. □

定理 4.2.3 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\forall\alpha\in J, X_\alpha\text{是}T_{1/2}\text{的}\Leftrightarrow\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是}T_{1/2}\text{的}\cdot$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\subset\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 则由 $\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\right)^d=\prod_{\alpha\in J}A_\alpha^d$ 及 $\forall\alpha\in J, A_\alpha^d$ 是闭集, 推论 4.1.4 知 $\left(\prod_{\alpha\in J}A_\alpha\right)^d$ 是闭集.

$\Leftarrow\forall\alpha\in J, A_\alpha\subset X_\alpha$, 作 $A=\prod_{\beta\in J}A_\beta$ 如下:

$$A_\beta=\begin{cases}A_\alpha; & \beta=\alpha\\ X_\beta; & \beta\neq\alpha\end{cases}$$

则 $A^d=\left(\prod_{\beta\in J}A_\beta\right)^d=\prod_{\beta\in J}A_\beta^d$ 是闭集, 从而由推论 4.1.4 知 A_β^d 是闭集. □

引理 4.2.4 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 序列 $\left\{\left(x_\alpha^{(n)}\right)_{\alpha\in J}\right\}_{n=1}^\infty\subset\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 则

$$\left\{\left(x_\alpha^{(n)}\right)_{\alpha\in J}\right\}_{n=1}^{\infty}\to\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}\Leftrightarrow\forall\alpha\in J,\left\{x_\alpha^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}\to x_\alpha$$

证明: $\Rightarrow$ 由投射的连续性及其连续的极限定义即知.

$\Leftarrow$ 任取包含 $\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}$ 的基元 $\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 其中除去有限多个 α 值(比如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$) 外, $U_\alpha=X_\alpha$. 对 $\forall i=1,\cdots,n$, 由 $\left\{x_{\alpha_i}^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}\to x_\alpha\left(i=1,\cdots,n\right)$ 知, 存在 $N_i>0$, 当 $n\ge N_i$ 时, $x_{\alpha_i}^{(n)}\in U_{\alpha_i}$. 取 $N=\max\left\{N_1,\cdots,N_n\right\}$, 则当 $n\ge N$ 时, $\left(x_\alpha^{(n)}\right)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$. □

定理 4.2.5 设 $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\forall\alpha\in J,X_\alpha\text{是}T_{3/2}\text{的}\Leftrightarrow\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是}T_{3/2}\text{的}.$$

证明 由引理 4.2.4 立得. □

4.3 $T_{11/4}$ 空间

定义 4.3.1 设 X 是拓扑空间, 如果任意的 $x,y\in X,x\ne y$, 存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 使得 $f\left(x\right)=0,f\left(y\right)=1$, 则称 X 是 $Uysohn$ 的, 如果 X 还是 T_1 的, 则称 X 是 $T_{11/4}$ 的.

定理 4.3.2 设 $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\forall\alpha\in J,X_\alpha\text{是}T_{11/4}\text{的}\Leftrightarrow\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是}T_{11/4}\text{的}$$

证明 T_1 的等价性由定理 4.1.2 即得. 现证 $Urysohn$ 性的等价性.

$\Rightarrow$ 设 $x=\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J},y=\left(y_\alpha\right)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, $x\ne y$. 则至少存在一个 $\gamma\in J$, 使得 $x_\gamma\ne y_\gamma$, 由 X_γ 是 $T_{11/4}$ 的, 存在连续映射 $f_\gamma:X_\gamma\to[0,1]$, 使得 $f_\gamma\left(x_\gamma\right)=0,f_\gamma\left(y_\gamma\right)=1$ 作映射 $f:\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\to[0,1]$ 为 $f=f_\gamma\circ p_\gamma$, 则 f 是连续的, 且 $f\left(x\right)=0,f\left(y\right)=1$.

$\Leftarrow$ $\forall\alpha\in J$, 我们证明 X_α 是 $T_{11/4}$ 的. 先取定一点 $\left(x_\gamma^0\right)_{\gamma\in J}$, 对于 $\forall x_\alpha,y_\alpha\in X_\alpha$, $x_\alpha\ne y_\alpha$, 作 $x=\left(x_\gamma\right)_{\gamma\in J},y=\left(y_\gamma\right)_{\gamma\in J}$ 如下:

$$x_\gamma=\begin{cases}x_\alpha; & \gamma=\alpha\\ x_\gamma^0; & \gamma\ne\alpha\end{cases};y_\gamma=\begin{cases}y_\alpha; & \gamma=\alpha\\ x_\gamma^0; & \gamma\ne\alpha\end{cases}.$$

则存在连续映射 $f:\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\to[0,1]$, 使得 $f\left(x\right)=0,f\left(y\right)=1$. 作 $f_\alpha:X_\alpha\to[0,1]$ 为 $f_\alpha\left(x\right)=\left(f\circ q_\alpha\right)\left(x\right)$, 其中 q_α 定义为

$$q_\alpha\left(x\right)=\left(x_\gamma\right)_{\gamma\in J},x_\gamma=\begin{cases}x, & \gamma=\alpha\\ x_\gamma^0, & \gamma\ne\alpha\end{cases}$$

则 f_α 连续, 且 $f_\alpha\left(x_\alpha\right)=0,f_\alpha\left(y_\alpha\right)=1$. □

4.4 $T_{7/2}$空间

在讨论$T_{7/2}$空间的可积性前, 我们先讨论一下序拓扑.

设$(X,<)$是全序集, 我们取所有形如

(1) (a,b), 其中$a,b\in X$; (2) $[a_0,b)$, 其中a_0是X的最小元; (3) $(a,b_0]$, 其中b_0是X的最大元

的X的子集作为基生成X的一拓扑, 称为X上的序拓扑(*order topology*).

又如果我们记$(a,+\infty)$为$\{x\in X;x>a\}$, $(-\infty,a)$为$\{x\in X;x<a\}$, 则这两种类型的集合构成序拓扑的子基.

我们又记形如$(a,b),(a,b],[a,b),[a,b]$的X的子集为区间(*intervals*), 形如$(a,+\infty),[a,+\infty),(-\infty,b),(-\infty,b]$的$X$的子集为射线(*rays*). 其中又可根据区间或射线是否为开的, 闭的而定义开区间, 闭区间, 开射线, 闭射线等等.

引理 4.4.1 设全序集$(X,<)$具有序拓扑, 则X是T_2的.

证明 $\forall x,y\in X,x\neq y$, 由X是全序的, 不妨设$x<y$.

(1) (x,y)中还有点z, 则$(-\infty,z)$, $(z,+\infty)$分别是包含x,y的开集, 而且不相交.

(2) (x,y)中没有X中其他点, 则$(-\infty,y),(x,+\infty)$是包含x,y的开集, 而且也不相交. □

注 其实定理 4.4.1 是很弱的, 可以证明设全序集$(X,<)$具有序拓扑, 则X是T_4,T_5(定义见后文)的.

引理 4.4.2 设X是拓扑空间, Y是具有序拓扑的全序集, $f,g:X\to Y$是连续映射, 则

(1) X中的子集$\{x\in X;f(x)\leq g(x)\}$是闭的;

(2) 令$m(x)=\min\{f(x),g(x)\},M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$, 则$m,M:X\to Y$都是连续的.

证明 (1) 设$F=\{x\in X;f(x)\leq g(x)\}$, 我们证明$F^c=\{x\in X;f(x)>g(x)\}$是开的. 设$x\in F^c$, 则$f(x)>g(x)$, 由引理 4.4.1 知, 存在$f(x)$的开射线$U$, $g(x)$的开射线V, 使得$U\cap V=\varnothing$. 作$W=f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$, 则由$f,g$的连续性知$W$是$x$的开领域, 且对于$w\in W$, $f(w)\neq g(w)$. 我们证明$f(w)>g(w)$, 若不然$f(w)<g(w)$从而$f(w)\in(-\infty,g(w))\subset V,f(w)\in U\cap V$, 矛盾. 上面即证得

$$\forall x\in F^c,\exists W\in\mathcal{N}(x),s.t.w\in F^c.$$

(2) 由

$$m(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\{x;f(x)\le g(x)\}\\ g(x), & x\in\{x;f(x)\ge g(x)\}\end{cases};M(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\{x;f(x)\ge g(x)\}\\ g(x), & x\in\{x;f(x)\le g(x)\}\end{cases}$$

及定理 2. 3. 2(7)知 $m,M:X\to Y$ 连续. □

注 一般的, 我们还有设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族从拓扑空间 X 到具有序拓扑的全序集 Y 的连续映射, 则 $S(x)=\sup_{\alpha\in J}\{f_\alpha(x)\},I(x)=\inf_{\alpha\in J}\{f_\alpha(x)\}$ 连续. 这个用超限归纳法($transitive\ induction$)即可证. 我们这里不用, 所以证明也省略了.

现在我们开始讨论 $T_{7/2}$ 空间了.

定义 4. 4. 3 设 X 是拓扑空间, 如果任意的 $x\in X$, 不包含 x 的闭集 F, 存在连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使得 $f(x)=0$, 且 $\forall y\in F,f(y)=1$, 则称 X 是完全正则的, 如果 X 还是 T_1 的, 则称 X 是 $T_{7/2}$ 的或者是 $Tychonoff$ 的.

引理 4. 4. 4 设 $\{X_i\}_{i=1}^n$ 是一族有限拓扑空间, 则

$$\forall i\in\{1,\cdots,n\},X_i\text{是}T_{7/2}\text{的}\Rightarrow\prod_{i=1}^n X_i\text{是}T_{7/2}\text{的}$$

证明 同定理 2. 1. 5, 我们只要证明两个的情形.

设 $x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$, F 是不包含 x 的闭集, 则 $(X_1\times X_2)\setminus F$ 是包含 x 的开集, 从而存在基元 $U_1\times U_2$, 使得 $(x_1,x_2)\in U_1\times U_2\subset(X_1\times X_2)\setminus F$. $\forall i=1,2$, 由于 X_i 是完全正则的, 存在连续映射 $f_i:X_i\to[0,1]$, 使得 $f_i(x)=0$ 且 $\forall y_i\in X_i-U_i$, $f_i(y_i)=1$. 作 $f=M\circ\Delta_{i=1}^2 f_i:X_1\times X_2\to[0,1]$, 则由连续函数族对角线的连续性及引理 4. 4. 2 知 f 连续, 且 $f(x)=(M\circ\Delta_{i=1}^2 f_i)(x)=\sup\{f_1(x_1),f_2(x_2)\}=0$ 且对于任意的 $y=(y_1,y_2)\in F\subset(X_1\times X_2)\setminus(U_1\times U_2)$, 或者 $f_1(y_1)=1$ 或者 $f_2(y_2)=1$, 而有 $f(y)=\sup\{f_1(y_1),f_2(y_2)\}=1$. 于是 $X_1\times X_2$ 是完全正则的, 而由定理 4. 1. 2 知其也是 T_1 的, 而是 $T_{7/2}$ 的. □

定理 4. 4. 5 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\forall\alpha\in J,X_\alpha\text{是}T_{7/2}\text{的}\Leftrightarrow\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是}T_{7/2}\text{的}$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}$, 不包含 x 的闭集 $F\subset\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$. 则 $V=\left(\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\right)-F$ 是包含 x 的开集, 存在基元 $U=\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 使得 $x\in U\subset V$, 其中除去有限个 α 值(比如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$)外, $U_\alpha=X_\alpha$. 定义映射 $\phi:\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\to\prod_{i=1}^n X_{\alpha_i}$ 为 $\phi(x)=(x_{\alpha_1},\cdots,x_{\alpha_n})$. 则由函数族 $p_{\alpha_i}:\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\to X_{\alpha_i}(i=1,\cdots,n)$ 的连续性及定理 2. 3. 3(1)知 ϕ 是连续的, 且 $\phi(U)=\prod_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ 是 $\prod_{i=1}^n X_{\alpha_i}$ 的一开集. 再由引理 4. 4. 4, $\prod_{i=1}^n X_{\alpha_i}$ 是完全正则的, 存在连续映射 $g:\prod_{i=1}^n X_{\alpha_i}\to[0,1]$, 使得 $g(\phi(x))=0$ 且对任意的 $y\in\prod_{i=1}^n X_{\alpha_i}-\prod_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ 有 $g(y)=1$. 令 $f=g\circ\phi:\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\to[0,1]$, 则

$f(x)=0$ 且

$$\forall y\in F\subset\prod_{\alpha\in J}X_\alpha-U,\phi(y)\in\prod_{i=1}^n X_{\alpha_i}-\prod_{i=1}^n U_{\alpha_i},f(y)=1$$

这就证明了 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 是完全正则的, 而其为 T_1 的显然, 从而是 $T_{7/2}$ 的.

$\Leftarrow\forall\alpha\in J$, 我们证明 X_α 是 $T_{7/2}$ 的. X_α 是 T_1 的显然, 只要证明 X_α 是完全正则的. 先取定 $\left(x_\gamma^0\right)_{\gamma\in J}$, 对任意的 $x_\alpha\in X_\alpha$, 不包含 x_α 的闭集 F_α, 作 $\prod_{i=1}^n X_{\alpha_i}$ 中的点 $\left(x_\gamma\right)_{\gamma\in J}$ 和闭集 $F=\prod_{\gamma\in J}F_\gamma$ 如下:

$$x_\gamma=\begin{cases}x_\alpha, & \gamma=\alpha\\ x_\gamma^0, & \gamma\neq\alpha\end{cases};F_\gamma=\begin{cases}F_\alpha, & \gamma=\alpha\\ X_\gamma, & \gamma\neq\alpha\end{cases}$$

则 $x\notin F$, 由 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的 $T_{7/2}$ 性, 存在连续函数 $f:\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\to[0,1]$, 使得 $f(x)=0$ 且 $\forall y\in F,f(y)=1$. 作 $f_\alpha:X_\alpha\to[0,1]$ 为 $f_\alpha=f\circ q_\alpha$, 其中 $q_\alpha:X_\alpha\to\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 为

$$q_\alpha(x)=\left(x_\gamma\right)_{\gamma\in J},x_\gamma=\begin{cases}x, & \gamma=\alpha\\ x_\gamma^0, & \gamma\neq\alpha\end{cases}$$

则 f_α 连续, 且 $f_\alpha(x_\alpha)=0$, 任意的 $y_\alpha\in F_\alpha$, $f_\alpha(y_\alpha)=1$. □

4.5 T_4,T_5,T_6 空间

定义 4.5.1 设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间, 其闭集全体记作 $\mathcal{F}$. 如果

$$\forall E,F\in\mathcal{F},E\cap F=\varnothing,\exists U\in\mathcal{N}(E),V\in\mathcal{N}(F),s.t.U\cap V=\varnothing$$

则称 X 是正规的, 而如果 X 还是 T_1 的则称 X 是 T_4 的.

定理 4.5.2 设 $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是}T_4\text{的}\Rightarrow\forall\alpha\in J,X_\alpha\text{是}T_4\text{的}$$

证明 $\forall\alpha\in J$, 我们证明 X_α 是正规的. 设 E_α,F_α 是 X_α 中互不相交的闭集, 作 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 中的闭集 $E=\prod_{\gamma\in J}E_\gamma,F=\prod_{\gamma\in J}F_\gamma$ 如下:

$$E_\gamma=\begin{cases}E_\alpha, & \gamma=\alpha\\ X_\gamma, & \gamma\neq\alpha\end{cases};F_\gamma=\begin{cases}F_\alpha, & \gamma=\alpha\\ X_\gamma, & \gamma\neq\alpha\end{cases}$$

则 $E\cap F=\varnothing$, 由 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的 T_4 性, 存在包含 E 的基元 $\prod_{\gamma\in J}U_\gamma$, 包含 F 的基元 $\prod_{\gamma\in J}V_\gamma$, 使得 $\varnothing=\left(\prod_{\gamma\in J}U_\gamma\right)\cap\left(\prod_{\gamma\in J}V_\gamma\right)=\prod_{\gamma\in J}\left(U_\gamma\cap V_\gamma\right)$, 而有 $U_\alpha\cap V_\alpha=\varnothing$.

再由定理 4.1.2 知各 X_α 是 T_1 的, 从而是 T_4 的. □

注 1 定理 4.3.2 的逆命题一般是不成立的, 对于 J 是有限的, 不可数的情形,

参考文献[2]$(P198, P206)$给出了反例. 而对于可数无限的情形, 我们有:

问题 4.5.3 设$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$是一族T_4空间, $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$是否为T_4空间?

按照上面的注, 可以猜想对该问题的回答是否定的.

注 2 在参考文献[6]中已经有了T_5, T_6分离公理, 而且有很好的性质, 读者如果感兴趣可以去看看. 这里只给出定义:

定义 4.5.4 设X是拓扑空间, 如果X的每个子空间都是正规的, 且X本身是T_1的, 则称X是T_5的.

定义 4.5.5 设X是拓扑空间, 如果X是T_4的, 且其中每个闭集都是G_δ集(一集F称为G_δ的, 如果其是一可数开集族的交), 则称X是T_6的.

第 5 章 紧致性

5.1 紧致空间

设 X 是一集合, $\mathcal{C}$ 是 X 的一子集族. 如果 $X=\bigcup_{C\in\mathcal{C}}C$, 则称集族 $\mathcal{C}$ 是 X 的一覆盖(*covering*). 如果 $\mathcal{C}$ 是可数的, 则称其为可数覆盖; 如果 $\mathcal{C}$ 是有限的, 则称其为有限覆盖; 如果 $\mathcal{C}$ 中元都是开的, 则称其为开覆盖; 如果 $\mathcal{C}$ 中元都是闭的, 则称其为闭覆盖. 再如果 $\mathcal{C}$ 的一子族 $\mathcal{C}_1$ 也覆盖 X, 则称 $\mathcal{C}_1$ 是 $\mathcal{C}$ 的子覆盖.

定义 5.1.1 设 X 是拓扑空间, 如果 X 的每一开覆盖都有一有限子覆盖, 则称 X 是紧致的(*compact*), 如果 $Y\subset X$ 在相对拓扑下是紧致的, 则称 Y 是 X 的紧致子集.

定义 5.1.2 集合 X 的子集族 $\mathcal{C}$ 称为具有有限交性质(*finite intersection property*), 如果 $\mathcal{C}$ 的任一有限子族的交都是非空的.

引理 5.1.3 设 X 是拓扑空间, 则 X 是紧致的 $\Leftrightarrow$ 任一具有有限交性质的 X 的子集族 $\mathcal{C}$, 它的成员的闭包的交 $\bigcap_{C\in\mathcal{C}}C^-\neq\varnothing$.

证明 $\Rightarrow$ 如果 $\bigcap_{C\in\mathcal{C}}C^-=\varnothing$, 则 $\bigcup_{C\in\mathcal{C}}\left(X\setminus C^-\right)=X$, 而由 X 是紧致的, 存在有限子覆盖 $\left\{X\setminus C_1^-,\cdots,X\setminus C_n^-\right\}$, 即 $X=\bigcup_{i=1}^n\left(X\setminus C_i^-\right)$, 从而 $\bigcap_{i=1}^n C_i\subset\bigcap_{i=1}^n C_i^-=\varnothing$, 这与 $\mathcal{C}$ 具有有限交性质矛盾.

$\Leftarrow$ 任一 X 的开覆盖 $\mathcal{C}$, 如果其任一有限子集都不覆盖 X, 则 $\mathcal{G}=\left\{X\setminus C;C\in\mathcal{C}\right\}$ 具有有限交性质, 从而 $\bigcap_{G\in\mathcal{G}}G=\bigcap_{C\in\mathcal{C}}\left(X\setminus C\right)\neq\varnothing$, $\bigcup_{C\in\mathcal{C}}C\neq X$, 矛盾. □

引理 5.1.4 设 X,Y 是拓扑空间, X 是紧致的, 则 $f\left(X\right)$ 是 Y 的紧致子集.

引理 5.1.5 设 X 是一集合, $\mathcal{A}$ 是 X 的一满足有限交性质的子集族, 则存在 X 的一子集族 $\mathcal{G}$, 使得 (1) $\mathcal{G}\supset\mathcal{A}$; (2) $\mathcal{G}$ 具有有限交性质; (3) 如果 $\mathcal{E}\supset\mathcal{G},\mathcal{E}\neq\mathcal{G}$, 则 $\mathcal{E}$ 不具有有限交性质.

证明 我们称满足上述 3 个条件的集族 $\mathcal{G}$ 为关于有限交是极大的. 对于证明, 用 *Zorn* 引理. 设 $\mathbb{A}$ 是满足条件(1), (2) 的 X 的子集族构成的族类, 其关于集合的包含关系构成偏序集. 设 $\mathbb{B}$ 是 $\mathbb{A}$ 的一全序的子族类(即 $\mathbb{B}\subset\mathbb{A}$), 令 $\mathcal{C}=\bigcup_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}}\mathcal{B}$, 我们证明 $\mathcal{C}$ 就是 $\mathbb{B}$ 的一上界, 从而由 *Zorn* 引理得 $\mathcal{G}$ 的存在性.

往证 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{B}$ 的一上界. 只要证明 $\mathcal{C}\supset\mathcal{A}$ 及 $\mathcal{C}$ 具有有限交性质. $\mathcal{C}\supset\mathcal{A}$ 是显然的, 假设 $\left\{C_1,\cdots,C_n\right\}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一有限子族, 由于 $\mathcal{C}=\bigcup_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}}\mathcal{B}$, 对每个 $i\in\left\{1,\cdots,n\right\}$, 存在 $\mathbb{B}$ 中的 $\mathcal{B}_i$ 使得 $C_i\in\mathcal{B}_i$. 由于 $\mathbb{B}$ 是全序的, 从而存在 $k\in\left\{1,\cdots,n\right\}$, 使得 $\mathcal{B}_i\subset\mathcal{B}_k$, 从而由 $\mathcal{B}_k$ 具有有限交性, $\bigcap_{i=1}^n C_i\neq\varnothing$. 得证. □

注 设 $\mathcal{G}$ 是引理 5.1.5 所述的关于有限交极大的 X 的子集族, 则

(1) $\mathcal{G}$ 中元的有限交还是 $\mathcal{G}$ 中元;

(2) 如果一元 A 与 $\mathcal{G}$ 中任一元都相交, 则 A 属于 $\mathcal{G}$.

其实这就是极大的实质和内涵.

定理 5.1.6 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\forall\alpha\in J, X_\alpha\text{是紧致的}\Leftrightarrow\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是紧致的}.$$

证明 $\Leftarrow$ 由引理 5.1.4 及对任意的 $\alpha\in J$, 投射 p_α 是连续的满射, 知 X_α 是紧致的.

$\Rightarrow$ 我们利用引理 5.1.3 证明 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 是紧致的.

设 $\mathcal{C}$ 是 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的一具有有限交性质的集族, 由引理 5.1.5 知存在一包含 $\mathcal{A}$ 的, 具有有限交性质的, 极大的 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的子集族 $\mathcal{G}$. 如果我们证明了 $\bigcap_{G\in\mathcal{G}}G^-\neq\varnothing$, 则 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}}A^-\neq\varnothing$ 而由引理 5.1.3 知 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 是紧致的.

往证 $\bigcap_{G\in\mathcal{G}}G^-\neq\varnothing$. 对于 $\forall\alpha\in J$, 考虑 X_α 的子集族 $\{p_\alpha(G);G\in\mathcal{G}\}$, 其具有有限交性质, 因为 $\mathcal{G}$ 具有. 这样, 据 X_α 的紧致性, 可以取 $x_\alpha\in\bigcap_{G\in\mathcal{G}}\left[p_\alpha(G)\right]^-$. 设 $x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 我们证明 $x\in\bigcap_{G\in\mathcal{G}}G^-$, 从而得证.

往证 $x\in\bigcap_{G\in\mathcal{G}}G^-$, 即对于任意 $G\in\mathcal{G}$, $x\in G^-$. 只要证每个包含 x 的基元都与 G 相交, 而由引理 5.1.5 注 (1) 和 (2), 只需证明每个包含 x 的子基元 $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 与 G 相交, 其中 U_α 是 X_α 中的开集. 现往证, 由于 U_α 是包含 x_α 的开集, 存在 $y_\alpha\in U_\alpha\cap p_\alpha(G)$, 也就存在 G 中的元 y 使得 $p_\alpha(y)=y_\alpha$, 而有 $y\in p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\cap G$. □

5.2 可数紧致空间与序列紧致空间

定义 5.2.1 设 X 是拓扑空间, 如果 X 的每个可数开覆盖都有有限子覆盖, 则称 X 是可数紧致的 (*countably compact*). 如果 $Y\subset X$ 在相对拓扑下是紧致的, 则称 Y 是 X 的紧致子集.

同紧致空间一样, 我们有引理:

引理 5.2.2 设 X 是拓扑空间, 则 X 是可数紧致的 $\Leftrightarrow$ 任一具有有限交性质的 X 的可数子集族 $\{C_i\}_{i=1}^\infty$, 它的成员的闭包的交 $\bigcap_{i=1}^\infty C_i^-\neq\varnothing$.

定理 5.2.3 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\forall\alpha\in J, X_\alpha\text{可数紧致}\Leftrightarrow\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{可数紧致}.$$

注 证明方法与关于紧致空间的定理 5.1.6 完全类似.

定义 5.2.4 设 X 是拓扑空间, 如果 X 的每一序列都有一收敛的子序列, 则称

X 是序列紧致的 $(sequentially\ compact)$.

定理 5.2.5 设 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一族可数拓扑空间, 则

$$\forall n\in\mathbb{N}, X_n\text{序列紧致}\Leftrightarrow\prod_{n=1}^{\infty}X_n\text{序列紧致}.$$

证明 $\Leftarrow$ 由投射的连续性即知.

$\Rightarrow$ 设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 中任一序列, $x_i=\left(\xi_n^i\right)_{n=1}^{\infty}$. 现在构造其一收敛子列. 对于 X_1 中的序列 $\left\{\xi_1^i\right\}_{i=1}^{\infty}$, 其有收敛子列 $\left\{\xi_1^{k_i^1}\right\}_{i=1}^{\infty}\to\xi_1$; 同理, 对于 X_2 中的序列 $\left\{\xi_2^{k_i^1}\right\}_{i=1}^{\infty}$, 其有收敛子列 $\left\{\xi_2^{k_i^2}\right\}_{i=1}^{\infty}\to\xi_2$, 如此一直作下去, 一般的, X_n 中有序列 $\left\{\xi_n^{k_i^{n-1}}\right\}_{i=1}^{\infty}$, 其有收敛子列 $\left\{\xi_n^{k_i^n}\right\}_{i=1}^{\infty}\to\xi_n$. 示意图如下:

$$\begin{array}{l}
X_1:\xi_1^{k_1^1},\xi_1^{k_2^1},\xi_1^{k_3^1},\cdots,\xi_1^{k_n^1},\cdots\to\xi_1\\
X_2:\xi_2^{k_1^2},\xi_2^{k_2^2},\xi_2^{k_3^2},\cdots,\xi_2^{k_n^2},\cdots\to\xi_2\\
X_3:\xi_3^{k_1^3},\xi_3^{k_2^3},\xi_3^{k_3^3},\cdots,\xi_3^{k_n^3},\cdots\to\xi_3\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_n:\xi_n^{k_1^n},\xi_n^{k_2^n},\xi_n^{k_3^n},\cdots,\xi_n^{k_n^n},\cdots\to\xi_n\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

其中第 $i\left(i\geq 2\right)$ 行是第 $i-1$ 的子列. 对每个 $n\in\mathbb{N}$, 取 X_n 序列 $\left\{\xi_n^{k_i^i}\right\}_{i=1}^{\infty}\left(k_i^i<k_{i+1}^i<k_{i+1}^{i+1}\right)$, 则其收敛于 ξ_n, 且有 $x_{k_i^i}=\left(\xi_n^{k_i^i}\right)_{n=1}^{\infty}$, 由引理 4.2.4 知 $\left\{x_{k_i^i}\right\}_{i=1}^{\infty}\to\left(\xi_n\right)_{n=1}^{\infty}\in\prod_{n=1}^{\infty}X_n$, 从而得证. □

注 定理 5.2.5 的证明方法就是著名的 $Cantor$ 对角线法.

5.3 局部紧致空间

定义 5.3.1 设 X 是拓扑空间, 如果 X 的每一点都有一个紧致的领域, 则称 X 是局部紧致的 $(locally\ compact)$. 如果 $Y\subset X$ 在相对拓扑下是局部紧致的, 则称 Y 是 X 的紧致子集.

引理 5.3.2 设 $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ 是一族有限拓扑空间, $\forall\alpha\in\{1,\cdots,n\}, A_\alpha\subset X_\alpha$, 则

$$\prod_{i=1}^{n}A_i^o=\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)^o.$$

证明 $\forall x=\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\in\prod_{i=1}^{n}A_i^o$, 我们有 $\forall i\in\{1,\cdots,n\}$, $x_i\in A_i^o$, 这样,

$$x=\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\in\prod_{i=1}^{n}A_i^o\subset\prod_{i=1}^{n}A_i$$

而有 $x\in\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)^{o}$.

反过来, $\forall x=\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\in\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)^{o}$, 存在基元 $\prod_{i=1}^{n}U_i$ 使得 $x\in\prod_{i=1}^{n}U_i\subset\prod_{i=1}^{n}A_i$. 而有 $\forall i\in\{1,\cdots,n\}$, $x_i\in U_i\subset A_i$, x_i 是 A_i 的内点, $x=\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\in\prod_{i=1}^{n}A_i^{o}$. □

定理 5.3.3 设 $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ 是一族有限拓扑空间, 则

$$\forall i\in\{1,\cdots,n\},X_i\text{局部紧致}\Leftrightarrow\prod_{i=1}^{n}X_i\text{局部紧致}.$$

证明 $\Rightarrow$ 设 $x=\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\in\prod_{i=1}^{n}X_i$, 由于对每个 $i\in\{1,\cdots,n\}$, X_i 是局部紧致的, 存在 x_i 的紧致领域 V_i, 使得 $x\in V_i^{0}\subset V_i$, 而有

$$x=\left(x_i\right)_{i=1}^{n}\in\prod_{i=1}^{n}V_i^{0}=\left(\prod_{i=1}^{n}V_i\right)^{o}\subset\prod_{i=1}^{n}V_i$$

由定理 5.1.6 知 $\prod_{i=1}^{n}V_i$ 是紧致的.

$\Leftarrow$ $\forall i\in\{1,\cdots,n\}$, 我们证明 X_i 是局部紧致的. 先取定 $\left(x_i^{0}\right)_{i=1}^{n}\in\prod_{i=1}^{n}X_i$, 对于任意的 $x_i\in X_i$, 作 $x=\left(x_j\right)_{j=1}^{n}\in\prod_{i=1}^{n}X_i$ 为

$$x_j=\begin{cases}x_i, & j=i\\ x_j^{0}, & j\neq i\end{cases}$$

则由 $\prod_{i=1}^{n}X_i$ 的局部紧致性, 存在 x 的紧致领域 V. 存在基元 $\prod_{i=1}^{n}U_i$ 使 $x\in\prod_{i=1}^{n}U_i$

$\subset V$. 这样 $x_i\in U_i\subset p_i\left(V\right)$, 由引理 5.1.4 及 p_i 的连续性, 知 $p_i\left(V\right)$ 是紧致的. □

引理 5.3.4 设 X,Y 是拓扑空间, X 局部紧致, 映射 $f:X\to Y$ 是连续的开映射, 则 $f\left(X\right)$ 是 Y 的局部紧致子集.

定理 5.3.5 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{局部紧致}\Leftrightarrow\forall\alpha\in J,X_\alpha\text{局部紧致且}\exists F\subset J\text{有限}s.t.\forall\alpha\in J\setminus F,X_\alpha\text{紧致}$$

证明 $\Rightarrow$ 由 $\forall\alpha\in J,p_\alpha$ 是连续的开满射, X_α 是局部紧致的. 取一点 $x=\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}$ $\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 有 x 的紧领域 C, 这样, 存在基元 $\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 使得 $x\in\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\subset C$, 其中除去有限多个 α 值 (比如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$) 外, $U_\alpha=X_\alpha$. 令 $F=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, 则 $\forall\alpha\in J\setminus F$ 有 $X_\alpha=U_\alpha\subset p_\alpha\left(C\right)\subset X_\alpha$, $X_\alpha=p_\alpha\left(C\right)$ 是紧的.

$\Leftarrow$ 将 J 良序化, 由假设存在 $F=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\subset J$ 使得 $\forall\alpha\in J\setminus F$, X_α 紧致. 不妨设 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$. $\forall\left(x_\alpha\right)_{\alpha\in J}\in\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$, 对于每一 $\alpha\in F$, 由于 X_α 是局部紧致的, 可以作 X_α 中 x_α 的紧致领域 C_α., 令

$$C=\left(\prod_{\alpha<\alpha_1}X_\alpha\right)\times C_{\alpha_1}\times\left(\prod_{\alpha_1<\alpha<\alpha_2}X_\alpha\right)\times\cdots\times\left(\prod_{\alpha_{n-1}<\alpha<\alpha_n}X_\alpha\right)\times C_{\alpha_n}\times\left(\prod_{\alpha>\alpha_n}X_\alpha\right)$$

由定理 5.1.6 知 C 是 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的紧子集, 且

$$x\in\left(\prod_{\alpha<\alpha_1}X_\alpha\right)\times C^o_{\alpha_1}\times\left(\prod_{\alpha_1<\alpha<\alpha_2}X_\alpha\right)\times\cdots\times\left(\prod_{\alpha_{n-1}<\alpha<\alpha_n}X_\alpha\right)\times C^o_{\alpha_n}\times\left(\prod_{\alpha>\alpha_n}X_\alpha\right)$$
$$=C^o\subset C$$

故而 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 是局部紧致的. □

5.4 极限点紧空间与仿紧空间

定义 5.4.1 设 X 是拓扑空间. 如果 X 的每一无限子集都有极限点, 则称 X 是极限点紧的 $(\textit{limit point compact})$.

注 极限点紧空间的笛卡尔积一般不是极限点紧的. 关于这个的评注可以参考 $[3](P181)$.

定义5.4.2 设 X 是一集合, $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 都是 X 的覆盖, 如果 $\mathcal{A}$ 中每个元素都包含在 $\mathcal{B}$ 中某个元素中, 则称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一加细 $(\textit{refinement})$. 如果 $\mathcal{A}$ 的元都是开的, 则称 $\mathcal{A}$ 是开加细;如果 $\mathcal{A}$ 的元都是闭的, 则称 $\mathcal{A}$ 是闭加细.

注 如果 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一子覆盖, 则 $\mathcal{A}$ 显然是 $\mathcal{B}$ 的一加细.

定义 5.4.3 设 X 是拓扑空间, $\mathcal{A}$ 是 X 的一子集族, 如果

$$\forall x\in X,\exists U\in\mathcal{N}(x),s.t.\{A\in\mathcal{A};A\cap U\neq\varnothing\}\text{有限}$$

则称 $\mathcal{A}$ 是(关于拓扑空间 X 的)局部有限的 $(\textit{locally finite})$.

定义 5.4.4 拓扑空间 X 称为仿紧的 $(\textit{paracompact})$, 如果 X 的每一开覆盖都有一局部有限的开覆盖是它的加细.

定理 5.4.5 设 X 是紧致空间, Y 是仿紧空间, 则 $X\times Y$ 是仿紧的.

证明 设 $\mathcal{A}$ 是 $X\times Y$ 的任一开覆盖. 任意的 $(x,y)\in X\times Y$, 存在 $A(x,y)\in\mathcal{A}$, 使得 $(x,y)\in A(x,y)$, 从而也存在 x 的开领域 $U(x,y)$, y 的开领域 $V(x,y)$, 使得 $U(x,y)\times V(x,y)\subset A(x,y)$. 对任一固定的 $y\in Y$, $X\times Y$ 的开集族

$$\{U(x,y)\times V(x,y);x\in X\}$$

是 $X\times Y$ 中紧子集 $X\times\{y\}$ 的开覆盖, 由 X 的紧致性, 存在 $\left\{x_1^{(y)},\cdots,x_n^{(y)}\right\}\subset X$, 使得

$$X\times\{y\}\subset\prod_{i=1}^n\left[U\left(x_i^{(y)},y\right)\times V\left(x_i^{(y)},y\right)\right].$$

则 $V(y)=\bigcap_{i=1}^n V\left(x_i^{(y)},y\right)$ 是 y 的一开领域, 且 $\left\{U\left(x_i^{(y)},y\right)\times V(y);i=1,\cdots,n\right\}$ 是 $X\times\{y\}$ 的一开覆盖,

由于$\left\{V(y); y\in Y\right\}$是仿紧空间$Y$的开覆盖,其有局部有限的开覆盖$\mathcal{B}$是它的开加细. 令$\mathcal{C}=\left\{U\left(x_i^{(y)}, y\right)\times B; B\in\mathcal{B}, i=1,\cdots,n\right\}$,容易知道$\mathcal{C}$是$\mathcal{A}$的一开加细,往证$\mathcal{C}$是局部有限的,设$(x,y)\in X\times Y$,则存在$y$的某一开领域$O$及$\mathcal{B}$的某一有限子族$\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B}$,使得$\forall B\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_0, O\bigcap B=\varnothing$. 于是$X\times O$是$(x,y)$的一开领域,且$\forall B\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_0, i\in\{1,\cdots,n\}$,$(X\times O)\bigcap\left[U\left(x_i^{(y_B)}, y_B\right)\times B\right]=\varnothing$. 从而$X\times Y$是仿紧的. □

第 6 章 可数性

6.1 A_1, A_2 空间

定义 6.1.1 设 X 是一拓扑空间. 如果 X 中每一点都有一可数领域基, 则称其是 A_1 的 $\left(first\text{-}countable \right)$; 如果 X 有一可数基, 则称其是 A_2 的 $\left(second\text{-}countable \right)$

注 由于对拓扑空间 X 而言, 如果 $\mathcal{B}$ 是 X 的一可数基, 则 $\mathcal{B}_x = \left\{ B \in \mathcal{B}; x \in B \right\}$ 就是 $x \in X$ 处的一可数的领域基. 下面关于 A_2 的可积性方面的定理同样对 A_1 成立, 为节省篇幅, 就不一一证明了.

定理 6.1.2 设 $\left\{ X_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ 是一族可数拓扑空间, 则

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n 是 A_2 的 \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n 是 A_2 的$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n 是 A_1 的 \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} X_n 是 A_1 的$$

证明 $\Leftarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, 由于 p_n 是连续的开映射, 如果 $\mathcal{B}$ 是 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 的一可数基, 则 $\mathcal{B}_n = \left\{ p_n\left(B \right); B \in \mathcal{B} \right\}$ 就是 X_n 的一可数基, X_n 是 A_2 的.

$\Rightarrow$ 设 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_n$ 是 X_n 的可数基, 令 $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{n=1}^{\infty} B_n; 除去有限个 n 值外, B_n = X_n \right\}$ 显然 $\mathcal{B}$ 是可数的, 往证 $\mathcal{B}$ 是 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 的基, 而有 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 是 A_2 的.

任一 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 中的开集 U, 包含 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 的一基元 $\prod_{n=1}^{\infty} U_n$ 其中除去有限多个 α 值（比如 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$）外, $U_\alpha = X_\alpha$. 令 $F = \left\{ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \right\}$, 则对 $\forall \alpha \in F$, 可作 $B_n \in \mathcal{B}_n$ 使得 $B_n \subset U_n$. 作 $\mathcal{B}$ 中元 $\prod_{n=1}^{\infty} B_n$ 如下:

$$B_n = \begin{cases} B_n, & n \in F \\ X_n, & n \in \mathbb{N} \setminus F \end{cases}$$

则 $\prod_{n=1}^{\infty} B_n \subset \prod_{n=1}^{\infty} U_n \subset U$. □

引理 6.1.3 设 X, Y 是拓扑空间, $f: X \to Y$ 是连续的满开映射, 如果 X 是 A_2 的, 则 Y 也是 A_2 的.

引理 6.1.4 设 X 是 A_2 的拓扑空间, 则 X 的每一基中都包含该空间的一可数基.

证明 设 $\mathcal{B}$ 是 X 的任一基, 由 X 是 A_2 的, 存在 X 的一可数基 $\mathcal{B}_1$. 我们证明 $\mathcal{B}$ 中包含 X 的一可数基. $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1$, 由于 $\mathcal{B}$ 是 X 的一基, 对于 $\forall x \in B_1$, 存在 $B_x \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in B_x \subset B_1$, 再注意到 $\mathcal{B}_1$ 也是 X 的一基, 存在 $D_{1,x} \subset \mathcal{B}_1$ 使得 $x_1 \in D_{1,x} \subset B_x$, 这样便有

$$B_1=\bigcup_{x\in B_1}\{x\}\subset\bigcup_{x\in B_1}D_{1,x}\subset\bigcup_{x\in B_1}B_x\subset B_1,$$

即 $B_1=\bigcup_{x\in B_1}D_{1,x}=\bigcup_{x\in B_1}B_x$. 由于 $\{D_{1,x}\}_{x\in B_1}$ 是 $\mathcal{B}_1$ 的子族, 为可数的, 对于 $\forall x\in B_1$, 取定 B_x 使得 $x\in D_{1,x}\subset B_x$, 则 $\{B_x\}_{x\in\mathcal{B}_1}$ 也是可数的. 即证 $\mathcal{B}_1$ 中任一元 B_1 都可以表成 $\mathcal{B}$ 中可数个元 $\{B_x\}_{x\in\mathcal{B}_1}$ 的并. 作 X 的可数开集族

$$\{B_x;x\in B_1,B_1\in\mathcal{B}_1\}$$

其为 $\mathcal{B}$ 的一子族, 且是 X 的一基. □

定理 6.1.5 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 则

$$\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是}A_2\text{的}\Leftrightarrow\forall\alpha\in C,X_\alpha\text{是}A_2\text{的且}\exists C\subset J\text{可数},s.t.\forall\alpha\in J\setminus C,X_\alpha\text{是平庸的}.$$

$$\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\text{是}A_1\text{的}\Leftrightarrow\forall\alpha\in C,X_\alpha\text{是}A_1\text{的且}\exists C\subset J\text{可数},s.t.\forall\alpha\in J\setminus C,X_\alpha\text{是平庸的}.$$

证明 $\Leftarrow$ 设对 $\forall\alpha\in C$, $\mathcal{B}_\alpha$ 是 A_2 空间 X_α 的可数基, 对于 $\alpha\in J\setminus C$, X_α 是平庸的, 取 $\mathcal{B}_\alpha=\{X_\alpha\}$. 这时, 集族

$$\mathcal{B}=\bigcup_{\alpha\in J}\{p_\alpha^{-1}(U);U\in\mathcal{B}_\alpha\}$$

是 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的一子基. 明显的, $\mathcal{B}$ 是可数的, 而有可数子基的拓扑空必定有可数基. 所以 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 是 A_2 空间.

$\Rightarrow$ 由于投射 p_α 是连续的满开映射, $X_\alpha=p_\alpha\left(\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\right)$ 是 A_2 的. 往证存在 J 的可数子集 C, 使得 $\forall\alpha\in J\setminus C$, X_α 是平庸的.

由于所有形如 $U=\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$ 的 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的元构称的子集族 $\mathcal{B}$ 是其一基, 其中除去有限多个 α 值(比如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$)外, $U_\alpha=X_\alpha$, 设 $J_U=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$. 由引理 6.1.4, 存在 $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}$ 可数, 亦为 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的一基. 令

$$C=\bigcup_{U\in\mathcal{B}_1}J_U$$

其为可数个有限集的并, 而为可数的. 我们证明对 $\forall\alpha\in J\setminus C$, X_α 是平庸的.

如果不然, 则存在 X_α 的某个非空真子集 V_α, $p_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ 是 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 中的开集, 而存在 $\mathcal{B}_2\subset\mathcal{B}_1$, 使得

$$p_\alpha^{-1}(V_\alpha)=\bigcup_{U\in\mathcal{B}_2}U$$

但是因为 $\alpha\in J\setminus C$, 对于每个 $U\in\mathcal{B}_1$, $\alpha\in J-J_U$, 即有 $p_\alpha(U)=X_\alpha$, 这样,

$$V_\alpha=p_\alpha\left[p_\alpha^{-1}(V_\alpha)\right]=p_\alpha\left[\bigcup_{U\in\mathcal{B}_2}U\right]=\bigcup_{U\in\mathcal{B}_2}p_\alpha(U)=X_\alpha,$$

矛盾. 于是命题得证. □

6.2 可分空间

定义 6.2.1 设 X 是一拓扑空间, $D\subset X$. 如果 $D^-=X$, 则称 D 在 X 中是稠密的 $(dense)$.

定义 6.2.2 设 X 是一拓扑空间. 如果 X 有一可数稠密子集, 则称 X 是可分的 $(separable)$.

定理 6.2.3 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是一族拓扑空间, 如果 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 是可分的, 则任意的 $\alpha\in J$, X_α 是可分的.

证明 设 D 是 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的一可数稠密子集, 则有

$$\forall\alpha\in J, X_\alpha\supset\left[p_\alpha(D)\right]^-\supset p_\alpha\left(D^-\right)=p_\alpha\left(\prod_{\alpha\in J}X_\alpha\right)=X_\alpha$$

而由可数性在映射下是不变的, 有 $p_\alpha(D)$ 是 X_α 的可数稠密子集, X_α 可分. □

定理 6.2.4 设 $\{X_{\alpha\in J}\}$ 是一族拓扑空间, J 的势不大于 $\aleph_1$ (连续基数), 且 $\forall\alpha\in J$, X_α 是可分的, 则 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 是可分的.

证明 由于 J 的势不大于 $\aleph_1$, 我们可以假定 $J\subset\mathbb{R}$. 又 $\forall\alpha\in J$, X_α 是可分的, 存在其可数的稠密子集 $M_\alpha=\left\{x_k^{(\alpha)};k\in\mathbb{N}\right\}$. 令

$$T=\left\{(r_1,\cdots,r_{n-1};k_1,\cdots,k_n);r_1,\cdots,r_{n-1}\in\mathbb{Q}\text{且严格递增}, k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{N},n=1,2,3,\cdots\right\}$$

且关于每一 $\gamma=(r_1,\cdots,r_{n-1};k_1,\cdots,k_n)\in T$, 作 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 中元 $x^{(\gamma)}=\left(x_\alpha^{(\gamma)}\right)_{\alpha\in J}$ 如下:

$$x_\alpha^{(\gamma)}=\begin{cases}x_{k_1}^{(\alpha)}, & \alpha\le r_1\\ x_{k_m}^{(\alpha)}, & r_{m-1}<\alpha\le r_m, m=2,\cdots,n-1\\ x_{k_n}^{(r_\alpha)}, & \alpha>r_{n-1}\end{cases}$$

当然其中的 $\alpha\in J$. 我们指出 $D=\left\{x^{(\gamma)}=\left(x_\alpha^{(\gamma)}\right)_{\alpha\in J};\gamma\in T\right\}$ 是 $\prod_{\alpha\in J}X_\alpha$ 的一可数稠密集. 显然 D 是可数的, 因为其可以看作是 $\mathbb{Q}\times\mathbb{N}$ 的子集. 往证 $D^-=X$.

对于 $\forall x=(x_\alpha)_{\alpha\in J}\in X$, 包含 x 的基元 $\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 其中除去有限多个 α 值 (比如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$) 外, $U_\alpha=X_\alpha$, 由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性, 可以作 $r_1,r_2,\cdots,r_{n+1}\in\mathbb{Q}$, 使得

$$\alpha_1\le r_1<\alpha_2\le r_2<\cdots\le r_{n-1}<\alpha_n$$

令 $K=\{1,\cdots,n\}$, 则由对每个 $i\in K$, U_{α_i} 是 x_{α_i} 的开集, $M_{\alpha_i}^-=X_{\alpha_i}$, 从而存在 $x_{k_i}^{(\alpha_i)}\in M_{\alpha_i}$ 使得 $x_{k_i}^{(\alpha_i)}\in U_{\alpha_i}$. 作 D 中元 $x^{(\gamma)}=\left(x_\alpha^{(\gamma)}\right)_{\alpha\in J}$ 如下:

$$x_\alpha^{(\gamma)}=\begin{cases}x_{k_1}^{(\alpha)}, & \alpha\le r_1\\ x_{k_m}^{(\alpha)}, & r_{m-1}<\alpha\le r_m, m=2,\cdots,n-1\\ x_{k_n}^{(\alpha)}, & \alpha>r_{n-1}\end{cases}$$

我们证明 $x^{(\gamma)}\in\left(\prod_{\alpha\in J}U_\alpha\right)\cap D$, 由上即知属于 D, 现证 $x^{(\gamma)}\in\prod_{\alpha\in J}U_\alpha$, 这也是显然的, 因为对于 $\alpha\in J\setminus\{\alpha_i;i\in K\}$, $U_\alpha=X_\alpha$, $x_\alpha^{(\gamma)}\in U_\alpha$; 对于 $\alpha\in\{\alpha_i;i\in K\}$, 有某个 $i\in K$ 使得 $x_\alpha^{(\gamma)}=x_{\alpha_i}^{(\gamma)}=x_{k_i}^{(\alpha_i)}\in M_{\alpha_i}\cap U_{\alpha_i}$ 得证. □

6.3 *Lindelöf* 空间

定义 6.3.1 设 X 是拓扑空间. 如果 X 的每个开覆盖都有一可数子覆盖, 则称 X 是 *Lindelöf* 的.

定理 6.3.2 设 X 是 *Lindelöf* 空间, Y 是紧致空间, 则 $X\times Y$ 是 *Lindelöf* 空间.

证明 设 $\mathcal{A}$ 是 $X\times Y$ 的任一开覆盖, 则 $\forall(x,y)\in X\times Y,\exists A\in\mathcal{A},s.t.(x,y)\in A$, 而有 x 的开领域 $U(x,y)$, y 的开领域 $V(x,y)$, 使得 $(x,y)\in U(x,y)\times V(x,y)\subset A$.

对于固定的 $x\in X$, $\{U(x,y)\times V(x,y);y\in Y\}$ 构成 $\{x\}\times Y$ 的开覆盖, 由于 Y 的紧致性及 $Y\triangleq\{x\}\times Y$, 存在 $\{y_{x^1},\cdots,y_{x^n}\}\subset Y$, 使得

$$\{x\}\times Y\subset\bigcup_{i=1}^n\left[U\left(x,y_{x^i}\right)\times V\left(x,y_{x^i}\right)\right].$$

令 $U(x)=\bigcap_{i=1}^n U\left(x,y_{x^i}\right)$, 则同样, $\{x\}\times Y\subset\bigcup_{i=1}^n\left[U(x)\times V\left(x,y_{x^i}\right)\right]$.

由于 $X\subset\{U(x);x\in X\}$ 及 X 的 *Lindelöf* 性, 存在 $\{x_n;n\in\mathbb{N}\}\subset X$, 使得

$$X\subset\bigcup_{n=1}^\infty U(x_n)$$

我们作

$$\mathcal{B}=\left\{U(x_n)\times V(x_n,y_i);i=x_n^1,\cdots,x_n^n,n\in\mathbb{N}\right\}$$

其是可数的, 往证其是 $X\times Y$ 的一开覆盖, 即证.

$\forall(x,y)\in X\times Y$, 对 x, 存在 $x_n\in X$, 使得 $x\in U(x_n)$, 这样, 又存在 $x_n^i\in\mathbb{N}$ 使得 $y\in V\left(x_n,y_{x_n^i}\right)$, 于是便有 $(x,y)\in U(x_n)\times V\left(x_n,y_{x_n^i}\right)$. 得证. □

注 在证明过程中的 $x^1,\cdots,x^n$ 不是表示 x 的幂, 而是相对于 x 确定的 $\{x\}\times Y$ 的有限开覆盖的这个有限. 同样的, x_n^i 表示相对于 x_n 确定的 $\{x_n\}\times Y$ 的有限开覆盖的这个有限.

第 7 章 可度量性

定义 7.1 设 X 是集合, $d: X\times X\to\mathbb{R}$. 如果对于任意的 $x,y,z\in X$, 有

(1) (正定性) $d(x,y)\geq 0$, 且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(2) (对称性) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) (三角不等式) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

则称 d 是 X 上的一度量 $(metric)$.

再有, 定义 $B_d(x,\varepsilon)=\{y\in X; d(y,x)<\varepsilon\}$, 则 X 的子集族

$$\mathcal{B}=\{B_d(x,\varepsilon); x\in X, \varepsilon>0\}$$

是 X 的一个基, 其生成的拓扑称为由度量 d 导出的拓扑.

对于拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$, 如果存在 X 上的一度量 d, 其导出的拓扑是 $\mathcal{T}$, 则称 X 是可度量的 $(metrizable)$. 而度量空间 $(metric\ space)$ 是指一可度量空间连同一给出 X 上拓扑的具体度量 d, 记作 (X,d).

定理 7.2 设 $\{(X_n,d_n)\}_{n=1}^\infty$ 是一族可数的度量空间, 则 $X=\prod_{n=1}^\infty X_n$ 是可度量的, 且如果令 $d_n^-(x_n,y_n)=\min\{d(x_n,y_n),1\}$ 则 X 上的度量

$$D(x,y)=D\left((x_n)_{n=1}^\infty,(y_n)_{n=1}^\infty\right)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{d_n^-(x_n,y_n)}{n}\right\}$$

生成 $\prod_{n=1}^\infty X_n$ 的拓扑.

证明 第一步: d_n^- 是 X_n 上的度量, 且由其导出的拓扑和由 d_n 导出的拓扑一样. d_n^- 是度量: 正定性和对称性显然, 往证 d_n^- 满足三角不等式. $\forall x,y,z\in X$, 如果 $d_n(x,y)\geq 1$ 或者 $d_n(y_n,z_n)\geq 1$, 则 $d_n^-(x,z)\leq 1\leq d_n^-(x,y)+d_n^-(y,z)=2$; 如果 $d_n(x,y)<1$ 且 $d_n(y,z)<1$, 则 $d_n(x,z)\leq d_n(x,y)+d_n(y,z)=d_n^-(x,y)+d_n^-(y,z)$, 即有 $d_n^-(x,z)\leq d_n^-(x,y)+d_n^-(y,z)$.

d_n^- 导出的拓扑和 d_n 导出的拓扑一样: 在一般度量空间 (X,d) 中, $\mathcal{B}$ 的子族 $\mathcal{B}_1=\{B(x,\varepsilon); x\in X, 0<\varepsilon<1\}$ 也生成 X 的拓扑. 而 (X_n,d_n) 与 (X_n,d_n^-) 有相同的如此子族.

第二步: D 是 X 上的度量. 正定性和对称行显然, 往证 D 满足三角不等式. $\forall x,y,z\in X$, 由于 $d_n^-(x_n,z_n)\leq d_n^-(x_n,y_n)+d_n^-(y_n,z_n)$, 则

$$\frac{d_n^-(x_n,z_n)}{n}\le\frac{d_n^-(x_n,y_n)}{n}+\frac{d_n^-(y_n,z_n)}{n}\le D(x,y)+D(y,z)$$

即有 $D(x,z)\le D(x,y)+D(y,z)$.

第三步: D 导出的 X 的拓扑 $\mathcal{G}$ 和积拓扑 $\mathcal{T}$ 一样. 利用定理 2. 2. 3 证之.

(1) $\mathcal{G}\subset\mathcal{T}$:对于 $\forall x\in X,\varepsilon>0$, 我们作 $U=\prod_{n=1}^{\infty}U_n$, 其中除去有限个 n 值外 $U_n=X_n$, 使 $U\subset B_D(x,\varepsilon)$.

作 N , 使得当 $n>N$ 时 $\frac{1}{n}<\varepsilon$, 令

$$U=B_{d_1^-}(x_1,\varepsilon)\times B_{d_2^-}(x_2,2\varepsilon)\times\cdots\times B_{d_N^-}(x_n,N\varepsilon)\times\prod_{n=N+1}^{\infty}X_n$$

则 $U\subset B_D(x,\varepsilon)$, 因为 $\forall y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in U$, 当 $n\in\{1,\cdots,N\}$ 时 $d_n^-(y_n,x_n)<n\varepsilon$, 而 $\frac{d_n^-(y_n,x_n)}{n}<\varepsilon$;当 $n>N$ 时, $y_n\in X_n,\frac{d_n^-(y_n,x_n)}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$. 这样, $D(y,x)<\varepsilon$.

(2) $\mathcal{T}\subset\mathcal{G}$:对于 X 的每一基元 $U=\prod_{n=1}^{\infty}U_n$, 其中除去有限个 n 值(不妨就设为 $1,\cdots,n$)外 $U_n=X_n$, 我们作 $B(x,\varepsilon)$ 使得 $B(x,\varepsilon)\subset U$.

先取定一点 $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in U$, $\forall k\in\{1,\cdots,n\}$, 由于 U_k 是开集, 可以取 $0<\varepsilon_k<1$, 使得 $B_{d_k^-}(x_k,\varepsilon_k)\subset U_k$. 这样, 取

$$\varepsilon=\min_{1\le k\le n}\left\{\frac{\varepsilon_k}{k}\right\}>0$$

则 $B_D(x,\varepsilon)\subset U$. 因为如果 $y\in B_D(x,\varepsilon)$, 则 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{d_n^-(y_n,x_n)}{n}<\varepsilon$, 对于 $k\in\{1,\cdots,n\}$, $\frac{d_k^-(y_k,x_k)}{k}<\varepsilon<\frac{\varepsilon_k}{k},d_k^-(y_k,x_k)<\varepsilon_k$, $y_k\in U_k$;而对其他的 $k\in\mathbb{N}$, 显然的有 $y_k\in X_k=U_k$, 从而 $y=(y_n)_{n=1}^{\infty}\in U$. □

结束语

经过三个月的学习、研究、探讨,毕业论文初稿即定.在这说长也长,说短也短的时间里,学习了不少新的东西,特别是参考文献[2],从中就选取笛卡尔积上的拓扑学作为课题.

首先感谢唐先华老师,因论文的形成和唐老师的悉心指导与用心鼓励是分不开的.唐老师的和蔼可亲、学识渊博、治学严谨,给我留下了很深的印象,对我未来的数学研究产生深刻的影响.

其次感谢我的同学王小捷和谢乐.小捷同学出色的排版技术让本文增色不少,如果没有他的帮助,论文的视觉效果将是非常不佳的.谢乐同学也给了我很大的帮助,在某些关键问题上给予了相当好的提示,大三以来,一起学习新知识,一起探讨问题,给予我各种鼓励.

再次还应感谢我的同班同学,尤其是同寝同学,正是由于他们在大学四年里的热情,我才有很好的环境使得能很好的成长,让我感受到班级的温暖,学习的激情.

最后感谢中南大学和所有教过我的老师,她们让我在这大学四年里如沐春风,让我能更快更好的成长.

参考文献

[1]J.L.Kelly. General Topology. van Nostrand,1955

中译本:一般拓扑学.吴从炘,吴让泉译.北京:科学出版社,1982

[2]J.R.Munkres. Topology(Second Edition).北京:机械工业出版社,2004

中译本:拓扑学基本教程.罗嵩龄等译.北京:科学出版社,1987

[3]L.A.Steen and J.A.Seebach Jr. Counterexamples in Topology. Holt, Rinehart &Winston,Inc.,New York,1970.

[4]熊金城..点集拓扑讲义(第三版).北京:高等教育出版社,2003

[5]蒲保明,蒋继光,胡淑礼.拓扑学.北京:高等教育出版社.1985

[6][日]儿玉之宏,永见起应(著),方嘉琳(译).拓扑空间论[M].北京:科学出版社,2001

[7]杜瑞瑾,金渝光,董高高.介于$T_{5/2}$ 与T_3空间之间的拓扑空间[J].河南大学学报(自然科学版).2007,1(37)

[8]韦玉程.拓扑空间分离公理的不可逆关系[J].广西教育学院学报.2004,4(72)